Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Vier und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Berlin, 1847.
Bei G. Reimer.
Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des vier und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

Nr. der Abhandlung.

1. Analysis.

Heft. Seite.

1.

Über die Substitutionen von der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform.

(Von dem Herrn Professor Dr. *F. Richelot* zu Königsberg in Pr.)

Euler hat die Formel

$$y = \frac{p+qx}{r+sx}$$

zur Umformung des Integrals

$$\frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}}$$

benutzt, und *Legendre* hat im 2ten Capitel seiner Theorie der elliptischen Functionen im Allgemeinen angegeben, wie man dadurch in allen Fällen auf eine ähnliche Differentialformel gelangt, unter deren Wurzelzeichen die ungeraden Potenzen der Variabeln fehlen. Im folgenden Capitel werden die verschiedenen Formen eines Differentials letzterer Art in das Differential

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

umgeformt.

Da diese Umformungen häufig gebraucht werden und mir eine einfache Zusammenstellung der wichtigsten und einfachsten derselben nicht bekannt ist, so werde ich im folgenden Aufsatze dieselbe zu geben versuchen; und zwar in der Art, dafs die directen Umformungen des Integrals

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4)}},$$

wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen als in seine relle, einfache oder Doppelfactoren aufgelöset angenommen wird, auf eine ähnliche Weise, wie es im 8ten und 9ten Paragraph der „Fundamenta nova" für vier reelle lineäre Factoren ausgeführt ist, für die verschiedenen Grenzen des Arguments y, in die Normalform der elliptischen Integrale erster Gattung zusammengestellt werden. Zu demselben Zwecke habe ich auch die Reductionen des Integrals, wenn neben dy eine rationale Function von y steht, auf die 3 Gattungen, am Ende des Aufsatzes hinzugefügt.

§. 1.

Über die Umformung des Differential-Ausdrucks $\frac{dy^2}{((y-m)^2+N)((y-\mu)^2+\mathrm{N})}$ durch eine lineäre Substitution im Allgemeinen.

Die Gröfsen m, μ, N und N sind reell, und je nachdem die beiden letztern beide positiv, beide negativ sind, oder die eine negativ, die andere positiv ist, lassen sich die Ausdrücke $(y-m)^2+N$, $(y-\mu)^2+\mathrm{N}$ respective beide in reelle, beide in conjugirt-imaginaire, oder der eine in reelle, der andere in conjugirt-imaginaire lineäre Factoren zerlegen. Durch Einführung einer lineären reellen Substitution werden die Zähler der diesen beiden Doppelfactoren entsprechenden Ausdrücke Doppelfactoren von derselben Art. Wenn es daher möglich ist, die 4 Coëfficienten der lineären Substitution so zu bestimmen, dafs diese Zähler in Bezug auf das neue Argument reine quadratische Factoren werden, so können dieselben in den drei obigen Fällen respective nur beide Differenzen, beide Summen, oder der eine eine Summe, der andere eine Differenz zweier reellen Quadrate geben. Damit die Zähler reine quadratische Ausdrücke werden, erhält man, wenn der Substitution in allen 3 Fällen die Form

$$\frac{y-m}{y-\mu} = \frac{r-sx}{\varrho-\sigma x}$$

gegeben wird, die zwei Bedingungsgleichungen:

$$rs(m-\mu)^2-(\varrho-r)(\sigma-s)N = 0,$$
$$\varrho\sigma(m-\mu)^2-(\varrho-r)(\sigma-s)\mathrm{N} = 0,$$

und hieraus die Formeln:

$$\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{s}{\sigma} = \frac{N}{\mathrm{N}}, \qquad \frac{r}{\varrho}+\frac{s}{\sigma} = \frac{N+\mathrm{N}+(m-\mu)^2}{\mathrm{N}},$$
$$\frac{\varrho}{r}+\frac{\sigma}{s} = \frac{N+\mathrm{N}+(m-\mu)^2}{N}.$$

Setzt man daher den Ausdruck, welcher die identischen Formen

$$((m-\mu)^2+N-\mathrm{N})^2-4(m-\mu)^2N$$
$$= ((m-\mu)^2-N+\mathrm{N})^2-4(m-\mu)^2\mathrm{N}$$
$$= ((m-\mu)^2-N-\mathrm{N})^2-4N\mathrm{N}$$

hat, der Kürze wegen $=\Delta$, so erhält man:

$$\frac{r}{\varrho}-\frac{s}{\sigma} = +\frac{\Delta}{\mathrm{N}},$$
$$\frac{\varrho}{r}-\frac{\sigma}{s} = -\frac{\Delta}{N}.$$

Im ersten der drei obigen Fälle sind die 3 Formen von Δ Differenzen zweier positiven Gröfsen; im zweiten und dritten Fall werden jedesmal zwei dieser 3 Formen Summen, und nur die dritte übrige eine Differenz zweier positiven Gröfsen geben. Hieraus wird, wie bekannt ist, geschlossen, dafs in den beiden letzten Fällen die Verhältnisse $\frac{r}{\varrho}$ und $\frac{s}{\sigma}$ stets reell und so bestimmt werden können, dafs die obengenannten Zähler reine quadratische Factoren werden. Damit jedoch dasselbe auch im ersten Falle Statt finde, müssen die beiden Factoren des Ausdrucks Δ,

$$(m-\mu)^2-(\sqrt{N}+\sqrt{\mathrm{N}})^2, \qquad (m-\mu)^2-(\sqrt{N}-\sqrt{\mathrm{N}})^2$$

gleiche Zeichen haben. Setzt man

$$2m = o+p, \qquad 2\mu = \omega+\pi,$$
$$2\sqrt{N} = o-p, \quad 2\sqrt{\mathrm{N}} = \omega-\pi,$$

so dafs o und p die Wurzeln der Gleichung

$$(y-m)^2-N = 0,$$

und ω und π die Wurzeln der Gleichung:

$$(y-\mu)^2-\mathrm{N} = 0$$

sind, so gehen die beiden Factoren, welche gleiche Zeichen haben müssen, in folgende Ausdrücke über:

$$(o-\pi)(p-\omega), \qquad (o-\omega)(p-\pi),$$

und lassen hieraus erkennen, dafs zur Realität der lineären Substitution obiger Art erforderlich ist, dafs die beiden Wurzeln der einen Gleichung entweder *beide* zugleich gröfser, oder beide zugleich kleiner als die Wurzeln der andern Gleichung seien, oder endlich, dafs *beide* zugleich zwischen den Wurzeln der letztern liegen. Unter dieser Voraussetzung erhält man aus den obigen Gleichungen für $\frac{r}{\varrho}$, $\frac{s}{\sigma}$ stets reelle Werthe und aufserdem die Formeln:

$$\frac{N}{(m-\mu)^2} = \frac{rs}{(\varrho-r)(\sigma-s)}, \qquad \frac{\mathrm{N}}{(m-\mu)^2} = \frac{\varrho\sigma}{(\varrho-r)(\sigma-s)},$$

$$\frac{r^2(m-\mu)^2-(\varrho-r)^2N}{r} = (m-\mu)^2\frac{(r\sigma-s\varrho)}{\sigma-s} = \frac{\varrho(m-\mu)^2-(\varrho-r)^2N}{\varrho},$$

$$\frac{s^2(m-\mu)^2-(\sigma-s)^2\mathrm{N}}{s} = (m-\mu)^2\frac{(s\varrho-r\sigma)}{\varrho-r} = \frac{\sigma^2(m-\mu)^2-(\sigma-r)^2\mathrm{N}}{\sigma},$$

mit deren Hülfe aus der Differentialformel

$$dy = \frac{(m-\mu)(r\sigma-\varrho s)\,dx}{(\varrho-r-(\sigma-s)x)^2}$$

sich endlich die Gleichung ergiebt:

$$\frac{(m-\mu)^2 dy^2}{((y-m)^2-N)((y-\mu)^2-N)} = \frac{dx^2}{\left(\frac{r}{\sigma-s}-\frac{s}{\varrho-r}x^2\right)\left(\frac{\varrho}{\sigma-s}-\frac{\sigma}{\varrho-r}x^2\right)}.$$

Den noch unbestimmten unter den Coëfficienten der Substitution kann man dazu benutzen, den reinen quadratischen Factoren respective in den drei Fällen die Formen zu geben:

$$(1-x^2)(1-k^2x^2), \quad (1-x^2)(1+k^2x^2), \quad (1+x^2)(1+k^2x^2).$$

Ich werde jedoch diese Umformungen für die drei verschiednen Fälle direct ableiten und zugleich so einrichten, dafs im ersten und zweiten Falle nur solche Formeln entstehen, in denen die Werthe des Arguments x^2, und im ersten und dritten Falle die Werthe der Constanten k^2 die Einheit nicht überschreiten.

§. 2.

Über die Umformung des Integrals

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}}$$

in Integrale von der Form

$$\frac{1}{M}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}}}$$

vermittelst einer linearen reellen Substitution.

Man kann immer annehmen, dafs die vier reellen Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ schon ihrer Gröfse nach geordnet seien, so dafs die Differenzen $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\delta$ positive Werthe haben. Um nun das gegebene Integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}},$$

zwischen beliebigen Grenzen genommen, auf ein Aggregat von Integralen von der zweiten Form

$$\frac{1}{M}\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}}}$$

zurückzuführen, bei denen sowohl der Modul k als die Grenzen echte Brüche sind, zerlege man dasselbe zuvörderst in eine Summe solcher Integrale von seiner Form, deren Grenzen die Intervalle

$$\alpha\ldots\ldots\beta, \quad \beta\ldots\ldots\gamma, \quad \gamma\ldots\ldots\delta, \quad \delta\ldots\ldots{}^{-\infty}_{+\infty}\ldots\ldots\alpha$$

einzeln nicht überschreiten. Man bemerkt dann leicht, dafs, während das Argument y im zweiten oder vierten dieser Intervalle sich befindet, das obere Zeichen, hingegen für das erste und dritte Intervall das untere Zeichen unter der Quadratwurzel beizubehalten ist, damit dieselbe keinen imaginären Werth annehme.

Durch Einführung einer beliebigen lineären reellen Substitution von der Form

$$y = \frac{p+qx}{r+sx}$$

geht das gegebene Differential

$$\frac{dy^2}{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}$$

in dieselbe Form

$$\frac{(rq-ps)^2\,dx^2}{\{(p-\alpha r)+(q-\alpha s)x\}\{(p-\beta r)+(q-\beta s)x\}\{(p-\gamma r)+(q-\gamma s)x\}\{(p-\delta r)+(q-\delta s)x\}}$$

über, worin die vier lineären Factoren, wegen der Realität der 4 Coëfficienten p, q, r, s, ebenfalls reell sind. Man kann daher die drei Verhältnisse zwischen diesen vier Coëfficienten so bestimmen, dafs diese neuen Factoren die Formen

$$1+kx,\quad 1+x,\quad 1-x,\quad 1-kx$$

annehmen, wo k eine positive Gröfse ist, mit Constanten, welche näher zu bestimmen bleiben, multiplicirt. Hiefür würde man, wie sich von selbst ergiebt, 24 verschiedene Voraussetzungen machen können. Man wird sich jedoch sogleich davon überzeugen, dafs nur 16 derselben reelle Werthe für die Coëfficienten p, q, r, s geben, und nur 8 endlich die Bedingung erfüllen, dafs die Werthe des Arguments x stets echte Brüche bleiben, während das Argument y in den 4 obigen einzelnen Intervallen beliebige Werthe annimmt.

Bezeichnet man nemlich durch o und p diejenigen von den 4 Gröfsen α, β, γ, δ, welche mit den Factoren

$$(1+x) \quad\text{und}\quad (1-x),$$

und durch ω und π die beiden übrigen, welche mit den Factoren

$$(1+kx) \quad\text{und}\quad (1-kx)$$

zusammenhangen, und durch O, P, Ω und Π 4 zu bestimmende Constanten, so kann man folgende Gleichungen setzen:

$$1.\quad \begin{cases} y-o = O\cdot\dfrac{(1+x)}{r+sx}, & y-p = P\cdot\dfrac{1-x}{r+sx}, \\ y-\omega = \Omega\cdot\dfrac{1+kx}{r+sx}, & y-\pi = \Pi\cdot\dfrac{1-kx}{r+sx}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man die Formeln:

$$2.\quad \frac{y-p}{y-o} = \frac{P}{O}\cdot\frac{1-x}{1+x}, \qquad \frac{y-\pi}{y-\omega} = \frac{\Pi}{\Omega}\cdot\frac{1-kx}{1+kx},$$

welche durch Substitution der Werthe $y=\pi$, $y=\omega$, $y=p$, $y=o$ und der dazu respective gehörigen

$$x=+\frac{1}{k},\quad x=-\frac{1}{k},\quad x=1,\quad x=-1$$

folgende Gleichungen geben:

$$\frac{\pi-p}{\pi-o}=\frac{P}{O}\cdot\frac{k-1}{k+1},\qquad \frac{\omega-p}{\omega-o}=\frac{P}{O}\cdot\frac{k+1}{k-1},$$
$$\frac{p-\pi}{p-\omega}=\frac{\Pi}{\Omega}\cdot\frac{1-k}{1+k},\qquad \frac{o-\pi}{o-\omega}=\frac{\Pi}{\Omega}\cdot\frac{1+k}{1-k}.$$

Die hieraus folgenden Formeln

$$3.\quad \left(\frac{P}{O}\right)^2=\frac{(\pi-p)(\omega-p)}{(\pi-o)(\omega-o)},\quad \left(\frac{\Pi}{\Omega}\right)^2=\frac{(p-\pi)(o-\pi)}{(p-\omega)(o-\omega)},\quad \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2=\frac{(p-\pi)(o-\omega)}{(p-\omega)(o-\pi)}$$

zeigen, dafs die Umformung jedesmal imaginär sein wird, sobald eine der Gröfsen ω und o innerhalb der Intervalle $o \ldots. p$, während die andere aufserhalb derselben liegt; welche Lage auf 8 verschiedene Arten bei den 4 Gröfsen α, β, γ, δ Statt finden kann.

Da k eine positive Gröfse ist, so erhält man aus der letzten Formel folgende:

$$\frac{1-k}{1+k}=+\sqrt{\left(\frac{(p-\pi)(o-\omega)}{(p-\omega)(o-\pi)}\right)},$$

wenn $k^2<1$ werden soll, und folgende:

$$\frac{1-k}{1+k}=-\sqrt{\left(\frac{(p-\pi)(o-\omega)}{(p-\omega)(o-\pi)}\right)},$$

wenn $k^2>1$ werden soll; und umgekehrt, je nachdem man dieser Quadratwurzel das positive oder das negative Zeichen giebt, wird die positive Gröfse k ein echter oder unechter Bruch sein.

Man überzeugt sich aber davon, dafs unter der obigen Bedingung für das Argument x immer nur die erste dieser beiden Formeln gültig ist, auf folgende Weise. Durch Differentiation der Gleichungen (2.) erhält man folgende Differentialformeln:

$$4.\quad \begin{cases} (p-o)\dfrac{dy}{(y-o)^2} = -2\cdot\dfrac{P}{O}\cdot\dfrac{dx}{(1+x)^2}, \\ (\pi-\omega)\dfrac{dy}{(y-\omega)^2} = -2k\cdot\dfrac{\Pi}{\Omega}\cdot\dfrac{dx}{(1+kx)^2}; \end{cases}$$

welche zeigen, dafs die Ausdrücke $(o-p)\cdot\frac{O}{P}$ und $(\omega-\pi)\cdot\frac{\Omega}{\Pi}$ dasselbe Zeichen haben müssen und dafs, je nachdem sie positiv oder negativ sind, die Argumente y und x stets zusammen wachsen, oder stets, während das eine abnimmt, das andere wächst.

Da nun zu jedem Werthe von y, zwischen $-\infty$ und $+\infty$, weil x durch y lineär ausgedrückt wird, nur ein Werth von x gehört, und umgekehrt:

so kann auch x nur für *einen* Werth von y verschwinden, und auch nur für *einen* Werth von y unendlich werden.

Da

$$\text{für } y = o, \quad x = -1 \text{ und}$$
$$\text{für } y = p, \quad x = +1$$

ist, so möge, während y von o bis p, ohne durch ω oder π zu gehen, fortschreitet, das Argument x continuirlich von -1 bis $+1$ wachsen; dann mufs auch $\frac{1}{k} > 1$ sein, weil sonst zu diesem Werthe zwei Werthe von y gehören müfsten: nämlich ein Werth, welcher auf dem Wege von o bis p, und der Werth $y = \pi$, welcher aufserhalb desselben liegt. Man sieht daher auch, dafs, während x von 1 bis $\frac{1}{k}$ wächst, das Argument y auf *dieselbe* Weise, d. h. wachsend oder abnehmend, von p zu π fortschreiten mufs, wie es von o zu p fortschritt, ohne jedoch durch ω gehn zu können, weil sonst auch das Argument x während des Wachsens von 1 bis $\frac{1}{k}$ durch $-\frac{1}{k}$ hindurch gehen müfste, ohne zweimal durch's Unendliche, oder durch o hindurch zu schreiten; was unmöglich ist. Durch diesen Schlufs überzeugt man sich davon, dafs von den 16 verschiedenen Anordnungen, welche reelle Substitutionen liefern, nur 8 angewendet werden können, wenn das Argument x innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ bleiben soll, während das Argument y in einem der 4 obigen Intervalle enthalten ist; und dafs zugleich der Modul k in diesen 8 Fällen ein echter positiver Bruch ist. Ebenso ist leicht einzusehen, dafs in den 8 übrigen Fällen sowohl das Argument x als der Modul k unechte Brüche sein müssen.

Wenn man die Gleichungen (4.) mit einander multiplicirt und das Product durch das Product der Gleichungen (1.) dividirt, so erhält man die Differential-Gleichung:

$$5. \quad \frac{(p-o)(\pi-\omega)}{4k} \cdot \frac{dy^2}{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)} = \frac{dx^2}{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

und wenn man auf beiden Seiten die Wurzel auszieht, nachdem man die Gröfsen selbst positiv gemacht hat, wird das Zeichen der einen Seite dadurch bestimmt, dafs es mit dem der Gröfse $(o-p)\cdot\frac{O}{P}$ übereinstimmt. Da jedoch durch die Substitution $x = -z$ die ganze Substitution ungeändert bleibt und nur die Grenzen und das Zeichen des neuen Integrals ins Entgegengesetzte übergehen, so werde ich von den 8 Voraussetzungen nur diejenigen 4 beibehalten, in welchen beide Argumente zugleich wachsen. Es seien daher die zu den Wer-

then von x:

$$-\frac{1}{k}, \quad -1, \quad +1, \quad +\frac{1}{k},$$

gehörigen 4 Werthe von y, nämlich

$$\omega, \quad o, \quad p, \quad \pi,$$

der Reihe nach gleich den Gröfsen

$$\begin{array}{cccc} \gamma, & \beta, & \alpha, & \delta, \\ \delta, & \gamma, & \beta, & \alpha, \\ \alpha, & \delta, & \gamma, & \beta, \\ \beta, & \alpha, & \delta, & \gamma. \end{array}$$

Man sieht hieraus, dafs die Differenzen $o-p$ und $\omega-\pi$

im ersten Falle . . . $= -(\alpha-\beta) = +(\gamma-\delta)$,
im zweiten Falle . . . $= -(\beta-\gamma) = -(\alpha-\delta)$,
im dritten Falle . . . $= -(\gamma-\delta) = +(\alpha-\beta)$,
im vierten Falle . . . $= +(\alpha-\delta) = +(\beta-\gamma)$

werden, und erkennt daher, indem die Producte

$$(o-p)\cdot\frac{O}{P}, \quad (\omega-\pi)\cdot\frac{\Omega}{\Pi}$$

positiv sein müssen, welche Zeichen den Ausdrücken für $\frac{O}{P}$ und $\frac{\Omega}{\Pi}$, nach Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen (3.), in den 4 verschiedenen Fällen gegeben werden müssen. Ebenso ergiebt sich aus den obigen Differenzen, dafs das Product

$$(o-p)(\omega-\pi)$$

im ersten und dritten Fall den negativen Werth

$$-(\alpha-\beta)(\gamma-\delta),$$

im zweiten und vierten Fall den positiven Werth

$$+(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)$$

erhält. Hienach wird die Differentialgleichung (5.), nachdem man beide Glieder derselben positiv gemacht und die Wurzel ausgezogen hat, in Betracht dafs der Werth von $\frac{dy}{dx}$ positiv ist, folgende beide Formen annehmen:

$$6. \quad \frac{dy}{\sqrt{\{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\}}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}}},$$

$$7. \quad \frac{dy}{\sqrt{\{y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}} = \frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{\{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)\}}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}}},$$

von welchen die erste, für den ersten und dritten Fall, zugleich mit der Formel

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\left\{\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}\right\}}$$

zur Bestimmung des Moduls k, und den Formeln respective

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma-y}{y-\delta} = \sqrt{\left(\dfrac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}\right)}\cdot\dfrac{1+kx}{1-kx}, & \\ \dfrac{\alpha-y}{y-\beta} = \sqrt{\left(\dfrac{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\delta)(\beta-\gamma)}\right)}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}, & \text{Grenzen}\begin{cases} y \text{ von } \alpha \text{ bis } \beta, \\ x \text{ von } +1 \text{ bis } -1, \end{cases} \\ \dfrac{\alpha-y}{\beta-y} = \sqrt{\left(\dfrac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\right)}\cdot\dfrac{1+kx}{1-kx}, & \\ \dfrac{y-\gamma}{y-\delta} = \sqrt{\left(\dfrac{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\delta)(\alpha-\delta)}\right)}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}, & \text{Grenzen}\begin{cases} y \text{ von } \gamma \text{ bis } \delta, \\ x \text{ von } +1 \text{ bis } -1, \end{cases} \end{cases}$$

zur Bestimmung der Argumente gilt, während die letztere für den zweiten und vierten Fall, nebst der Formel

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\left(\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}\right)},$$

zur Bestimmung des Moduls k, und den Formeln respective

$$9.\quad \begin{cases} \dfrac{y-\delta}{\alpha-y} = \sqrt{\left(\dfrac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right)}\cdot\dfrac{1+kx}{1-kx}, & \\ \dfrac{\beta-y}{y-\gamma} = \sqrt{\left(\dfrac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}\right)}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}, & \text{Grenzen}\begin{cases} y \text{ von } \beta \text{ bis } \gamma, \\ x \text{ von } +1 \text{ bis } -1, \end{cases} \\ \dfrac{\beta-y}{\gamma-y} = \sqrt{\left(\dfrac{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}\right)}\cdot\dfrac{1+kx}{1-kx}, & \\ \dfrac{\delta-y}{\alpha-y} = \sqrt{\left(\dfrac{(\gamma-\delta)(\beta-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}\right)}\cdot\dfrac{1-x}{1+x}, & \text{Grenzen}\begin{cases} y \text{ von } \delta \mp\infty\ \alpha, \\ x \text{ von } +1 \text{ bis } -1, \end{cases} \end{cases}$$

zur Bestimmung der Argumente dient.

Man kann den Differentialgleichungen auch folgende Gestalt geben, welche der am angeführten Orte der „Fundamenta nova" aufgestellten völlig analog ist.

Für den ersten und dritten Fall:

$$\frac{dy}{\sqrt{\{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}} = \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(L^2-N^2x^2)\}}},$$

worin gesetzt ist:

$$L = \tfrac{1}{2}\{\sqrt[4]{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))} + \sqrt[4]{((\alpha-\delta)(\beta-\gamma))}\}, \qquad \frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\cdot\frac{\alpha-y}{y-\beta} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{1-x}{1+x},$$

$$\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}\cdot\frac{y-\gamma}{y-\delta} = \frac{N+Lx}{N-Lx}\cdot\frac{L+N}{L-N},$$

$$N = \tfrac{1}{2}\{\sqrt[4]{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))} - \sqrt[4]{((\alpha-\delta)(\beta-\gamma))}\}, \qquad \frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\gamma-y}{y-\delta} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{1-x}{1+x},$$

$$\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\cdot\frac{\alpha-y}{\beta-y} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{N+Lx}{N-Lx}.$$

Für den zweiten und vierten Fall:

$$\frac{dy}{\sqrt{\{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}} = \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(L^2-N^2x^2)\}}},$$

worin

$$L = \tfrac{1}{2}\{\sqrt[2]{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}+\sqrt[2]{((\alpha-\beta)(\gamma-\delta))}\}, \quad \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\beta-y}{y-\gamma} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{1-x}{1+x},$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\delta}\cdot\frac{y-\delta}{\alpha-y} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{N+Lx}{L-Lx},$$

$$N = \tfrac{1}{2}\{\sqrt[2]{((\alpha-\gamma)(\beta-\delta))}-\sqrt[2]{((\alpha-\beta)(\gamma-\delta))}\}, \quad \frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\delta}\cdot\frac{\delta-y}{\alpha-y} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{1-x}{1+x},$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\beta-y}{y-\gamma} = \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{N+Lx}{N-Lx}$$

gesetzt ist.

Aus diesen Substitutionen ergeben sich, dadurch, dafs man $-x$ statt $+x$ setzt, vier andere, in welchen, während das Argument y in den 4 Intervallen

$$\alpha\ldots.\beta,\quad \beta\ldots.\gamma,\quad \gamma\ldots.\delta,\quad \delta\mp\infty\,\alpha$$

abnimmt, das Argument x von -1 bis $+1$ wächst.

§. 3.

Über die Umformung des Integrals

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-a)(y-b)((y-\mu)^2+\nu^2)\}}}$$

in Integrale von der Form

$$\frac{1}{M}\int\frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1+k^2x^2)\}}}$$

vermittels einer lineären Substitution.

In dem gegebenen Integral sind die Gröfsen a, b, μ und ν reell, so dafs der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nur für zwei reelle Werthe verschwindet. Man kann wieder annehmen, dafs die Differenz $a-b$ positiv sei, und die Grenzen des gegebenen Integrals so zerlegen, dafs sie die Intervalle

$$a\ldots.b,\quad b\mp\infty\,a$$

einzeln nicht überschreiten. Man bemerkt dann, wie oben, dafs, während das Argument y sich im ersten dieser beiden Intervalle befindet, das obere, und wenn es in den letzten enthalten ist, das untere Zeichen beizubehalten sein wird. Durch Einführung einer reellen, lineären Substitution von der Form

$$y = \frac{p+qx}{r+sx}$$

geht das Differential

$$\frac{dy^2}{(y-a)(y-b)((y-\mu)^2+\nu^2)}$$

in folgendes von derselben Form über:

$$\frac{(rq-ps)^2\,dx^2}{((p-ar)+(q-as)x)((p-br)+(q-bs)x)(\{p-\mu r+(q-\mu s)x\}^2+\nu^2(r+sx)^2)},$$

worin ebenfalls nur die beiden ersten linearen Factoren reell sind. Man kann die 4 Coëfficienten p, q, r, s reell und so bestimmen, daſs die beiden ersten Factoren die Formen

$$1+x, \quad 1-x,$$

mit gehörigen Constanten multiplicirt, annehmen, und der Doppelfactor auf die Form

$$1+k^2x^2$$

führt. Denn man erhält dafür die 3 Gleichungen

$$(p-ar)(q-bs)+(p-br)(q-as) = 0,$$
$$(p-\mu r)(q-\mu s)+\nu^2 rs = 0,$$
$$(q-as)(q-bs)+(p-ar)(p-br) = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen geben für die Ausdrücke

$$\frac{p}{r}\cdot\frac{q}{s}, \quad \frac{p}{r}+\frac{q}{s}$$

reelle Werthe; wodurch klar wird, daſs die Verhältnisse $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{s}$ die Wurzeln einer reellen quadratischen Gleichung sind; und zwar sind die Wurzeln derselben reell. Denn wären sie imaginär, so müſsten sie conjugirt sein, und daher, in den Theil links der zweiten Gleichung substituirt, dieselbe auf die Summe dreier reellen Quadrate reduciren; was, da derselbe verschwinden soll, nur für besondere Werthe von a, b, μ, ν, und namentlich für $\nu = 0$, möglich wäre. Da also die Werthe von $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{s}$ stets reell sind, so ergiebt sich aus der ersten und dritten Gleichung auch $\frac{r}{s}$ reell, nemlich:

$$\frac{r}{s} = \pm\frac{q-bs}{p-br} = \mp\frac{q-as}{p-ar}.$$

Also ist die ganze Substitution, und auch, wie leicht zu sehen, die Gröſse k, reell.

Die Anzahl der verschiedenen Substitutionen obiger Art ist in diesem Falle vier, da man nicht nur jedem der beiden reellen linearen Factoren die eine der beiden Formen $1+x$, $1-x$ geben, sondern auch jedesmal die beiden Argumente zugleich wachsend annehmen kann, oder nicht. Übrigens wird

in jeder dieser 4 Substitutionen, während das Argument y in einem der beiden Intervalle

$$a \dots b, \quad b \mp \infty \dots a$$

liegt, das Argument x ein echter Bruch werden.

Anstatt nun diese Substitution direct zu entwickeln, werde ich ihre Resultate aus den obigen ableiten, indem ich im ersten Fall des vorigen Paragraphen

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma + \delta = 2\mu, \quad \gamma\delta = \mu^2 + \nu^2,$$

und im vierten Falle desselben

$$\delta = b, \quad \alpha = a, \quad \beta + \gamma = 2\mu, \quad \beta\gamma = \mu^2 + \nu^2$$

setze.

Hieraus ergeben sich die Umformungen:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{((a-y)(y-b)\{(y-\mu)^2+\nu^2\})}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(L^2+N^2x^2))}},$$

$$\frac{a-y}{y-b} = \sqrt{\left(\frac{(a-\mu)^2+\nu^2}{(b-\mu)^2+\nu^2}\right)} \cdot \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{Grenzen} \begin{cases} y: & a \text{ bis } b, \\ x: & +1 \text{ bis } -1, \end{cases}$$

$$L^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\{((a-\mu)(b-\mu)+\nu^2)^2+(a-b)^2\nu^2\}}+(a-\mu)(b-\mu)+\nu^2),$$

$$N^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{\{((a-\mu)(b-\mu)+\nu^2)^2+(a-b)^2\nu^2\}}-(a-\mu)(b-\mu)-\nu^2).$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{((y-a)(y-b)\{(y-\mu)^2+\nu^2\})}} = \int \frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(L^2+N^2x^2))}},$$

$$\frac{b-y}{a-y} = \sqrt{\left(\frac{(b-\mu)^2+\nu^2}{(a-\mu)^2+\nu^2}\right)} \cdot \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{Grenzen} \begin{cases} y \text{ von } & b \mp \infty \; a, \\ x \text{ von } & +1 \dots -1, \end{cases}$$

$$L^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(\{(a-\mu)(b-\mu)+\nu^2\}^2+(a-b)^2\nu^2)}-(a-\mu)(b-\mu)-\nu^2),$$

$$N^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{(\{(a-\mu)(b-\mu)+\nu^2\}^2+(a-b)^2\nu^2)}+(a-\mu)(b-\mu)+\nu^2).$$

Aus diesen beiden Umformungen ergeben sich sogleich die beiden übrigen, in denen die Argumente nicht zugleich wachsen, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt.

§. 4.

Über die Umformung des Integrals

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{[(y-m)^2+n^2][(y-\mu)^2+\nu^2]\}}}$$

in Integrale von der Form

$$\frac{1}{M} \int \frac{dx}{\sqrt{((1+x^2)(1+k^2x^2))}},$$

durch eine lineäre, reelle Substitution.

In dem gegebenen Integral sind die 4 Gröfsen m, n, μ, ν reell, so dafs der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen für keinen reellen Werth von y ver-

schwindet. Es giebt hier daher nur ein Intervall für das Argument y, nemlich $-\infty \ldots\ldots +\infty$; d. h. y kann jeden reellen Werth annehmen, ohne dafs der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen sein Zeichen ändert. Durch Einführung einer reellen Substitution von der Form

$$y = \frac{p+qx}{r+sx}$$

geht das Differential

$$\frac{dy}{(y-m)^2+n^2}$$

in folgendes über:

$$\frac{(rq-ps)\,dx}{\{p-mr+(q-ms)x\}^2+n^2(r+sx)^2},$$

und ebenso das Differential

$$\frac{dy}{(y-\mu)+\nu^2}$$

in folgendes:

$$\frac{(rq-ps)\,dx}{\{(p-\mu r)+(q-\mu s)x\}^2+\nu^2(r+sx)^2}.$$

Man kann die 4 Coëfficienten p, q, r, s reell und so bestimmen, dafs der erste der beiden Doppelfactoren im Nenner auf die Form $1+x^2$ und der andere auf die Form $1+k^2x^2$ führt; denn man erhält dafür die 3 Gleichungen

$$(p-mr)(q-ms)+n^2rs = 0,$$
$$(p-\mu r)(q-\mu s)+\nu^2 rs = 0,$$
$$(p-mr)^2+n^2r^2 = (q-ms)^2+n^2s^2.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich, eben so wie in §. 3., dafs die Verhältnisse $\frac{p}{r}$ und $\frac{q}{s}$ stets reell sein müssen, und aus der dritten dann das Verhältnifs $\frac{r}{s}$ durch die Gleichung

$$\frac{\left(\frac{q}{s}-m\right)^2+n^2}{\left(\frac{p}{r}-m\right)^2+n^2} = \frac{r^2}{s^2}$$

reell. Ebenso überzeugt man sich davon, dafs die Gröfse k^2 eine positive Gröfse ist; nemlich es ist:

$$\frac{\left(\frac{p}{r}-\mu\right)^2+\nu^2}{\left(\frac{q}{s}-\mu\right)^2+\nu^2}\cdot\left(\frac{r}{s}\right)^2 = k^2.$$

Wenn man $\pm x$, $\pm\frac{1}{x}$, $\pm\frac{1}{kx}$, $\pm\frac{x}{k}$ statt x setzt, so verändert das Differential

$$\frac{dx}{(1+x^2)(1+k^2x^2)}$$

seine Form nicht. Hieraus ergiebt sich, dafs es 8 Umformungen dieser Art giebt, und vier, in denen $k^2<1$ ist. Jedoch wird das Argument x in diesem Falle, während y jeden beliebigen reellen Werth annimmt, auch die Einheit überschreiten können.

Auch hier werde ich, anstatt die Substitutionen direct zu entwickeln, ihre Resultate aus denen des ersten Paragraphs dadurch ableiten, dafs ich im vierten Falle desselben

$$\delta+\alpha=2m,\quad \delta\alpha=m^2+n^2,\quad \beta+\gamma=2\mu,\quad \beta\gamma=\mu^2+\nu^2$$

und $x\sqrt{-1}$ statt x setze.

Daraus ergeben sich folgende Umformungen, wo n und ν und $m-\mu$ positiv angenommen werden:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{((y-m)^2+n^2)((y-\mu)^2+\nu^2)\}}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\{(1+x^2)(L^2+N^2x^2)\}}},$$

$$L=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{((m-\mu)^2+(n+\nu)^2)}+\sqrt{((m-\mu)^2+(n+\nu)^2)}\},$$

$$N=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{((m-\mu)^2+(n+\nu)^2)}-\sqrt{((m-\mu)^2+(n+\nu)^2)}\},$$

und wenn $P=\sqrt{(n^2-N^2)}$, $Q=\sqrt{(L^2-n^2)}$, $R=\sqrt{(\nu^2-N^2)}$, $S=\sqrt{(L^2-\nu^2)}$ gesetzt wird, entweder:

$$\frac{y-m}{n}=\frac{P+Qx}{Q-Px},\qquad \frac{y-\mu}{\nu}=\frac{1}{LN}\cdot\frac{L^2P+NQ^2x}{Q-Px},$$

oder auch:

$$=\frac{NR+LSx}{LS-NRx},\qquad =\frac{LR+NSx}{LS-NRx};$$

Grenzen y $\quad +\infty \quad m \quad \mu \quad -\infty$

x $\quad \sqrt{\left(\frac{L^2-n^2}{n^2-N^2}\right)} \quad -\sqrt{\left(\frac{n^2-N^2}{L^2-n^2}\right)} \quad -\frac{L^2}{N^2}\sqrt{\left(\frac{n^2-N^2}{L^2-n^2}\right)} \quad \sqrt{\left(\frac{L^2-n^2}{n^2-N^2}\right)},$

oder:

$$\frac{y-m}{n}=\frac{PNx-QL}{QNx+PL},\qquad \frac{y-\mu}{\nu}=\frac{LPx-NQ}{QNx+PL},$$

$$=\frac{1}{LN}\cdot\frac{N^2Rx-L^2S}{Sx+R},\qquad =\frac{Rx-S}{Sx+R};$$

Grenzen y $\quad +\infty \quad m \quad \mu \quad -\infty$

x $\quad -\sqrt{\left(\frac{\nu^2-N^2}{L^2-\nu^2}\right)} \quad \frac{L^2}{N^2}\sqrt{\left(\frac{L^2-\nu^2}{\nu^2-N^2}\right)} \quad \sqrt{\left(\frac{L^2-\nu^2}{\nu^2-N^2}\right)} \quad -\sqrt{\left(\frac{\nu^2-N^2}{L^2-\nu^2}\right)}.$

Aus diesen Formeln ergeben sich sofort, wenn man $-x$ statt $+x$ setzt, zwei Umformungen, in welchen die Argumente nicht zugleich wachsen.

§. 5.

Über die Umformung der Integrale von der Form

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)\}}} \text{ und } \int\frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-\alpha)((y-\mu)^2+\nu^2)\}}}$$

in Integrale von der Form

$$\frac{1}{M}\int\frac{dx}{\sqrt{((1+x^2)(1-k^2x^2))}} \text{ und } \frac{1}{M}\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(1+k^2x^2))}}.$$

Wenn man in den Resultaten von (§. 1.) δ, und in denen von (§. 2.) b in die negative Unendlichkeit wachsen läfst, und die Grenze derselben nimmt, so erhält man folgende Umformungen:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma))}}=\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(L^2-N^2x^2))}},$$

$$L=\tfrac{1}{2}\{\sqrt[2]{(\alpha-\gamma)}+\sqrt[2]{(\beta-\gamma)}\},\quad N=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(\alpha-\gamma)}-\sqrt{(\beta-\gamma)}\},$$

$$\frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{\alpha-y}{y-\beta},\quad \frac{L+N}{L-N}\cdot\frac{N+Lx}{N-Lx}=\frac{y-\gamma}{\beta-\gamma},\ \text{Grenzen}\begin{cases}y: & \alpha\ldots\ldots\beta,\\ x: & +1\ldots\ldots-1,\end{cases}$$

$$=\frac{y-\gamma}{\beta-\gamma},\qquad\qquad =\frac{\alpha-y}{\beta-y},\ \text{Grenzen}\begin{cases}y: & \gamma\ldots\ldots-\infty,\\ x: & +1\ldots\ldots-1,\end{cases}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{((y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma))}}=\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(L^2-N^2x^2))}},$$

$$L=\tfrac{1}{2}\{\sqrt[2]{(\alpha-\gamma)}+\sqrt{(\alpha-\beta)}\},\quad N=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{(\alpha-\gamma)}-\sqrt{(\alpha-\beta)}\},$$

$$\frac{L-N}{L+N}\cdot\frac{1+x}{1-x}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{y-\gamma}{\beta-\gamma},\quad \frac{L-N}{L+N}\cdot\frac{N-Lx}{N+Lx}=\frac{\alpha-y}{\alpha-\gamma},\ \text{Grenzen}\begin{cases}y: & \beta\ldots\ldots\gamma,\\ x: & +1\ldots\ldots-1,\end{cases}$$

$$=\frac{\alpha-y}{\alpha-\gamma},\qquad\qquad =\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{y-\gamma}{\beta-y},\ \text{Grenzen}\begin{cases}y: & \delta\mp\infty\ \alpha,\\ & +1\ldots\ldots-1,\end{cases}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{((a-y)\{(y-\mu)^2+\nu^2\})}}=\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)L^2+N^2x^2))}},$$

$$a-y=(L+N)\cdot\frac{1-x}{1+x},\ \text{Grenzen}\begin{cases}y: & a\ldots\ldots-\infty,\\ x: & +1\ldots\ldots-1,\end{cases}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{((y-a)\{(y-\mu)^2+\nu^2\})}}=\int\frac{dx}{\sqrt{((1-x^2)(N^2+L^2x^2))}},$$

$$y-a=(L+N)\cdot\frac{1+x}{1-x},\ \text{Grenzen}\begin{cases}y: & \infty\ldots\ldots a,\\ x: & +1\ldots\ldots-1,\end{cases}$$

$$L^2=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{((\mu-a)^2+\nu^2)}-(\mu-a)\},\quad N^2=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{((\mu-a)^2+\nu^2)}-(\mu-a)\}.$$

Aus diesen Umformungen erhält man, wenn man $-x$ statt $+x$ schreibt, die analogen, in welchen die Argumente nicht zugleich wachsen. In

allen diesen ist aber x entweder ein echter Bruch, oder die Einheit; und da man die gegebenen Integrale zwischen beliebigen reellen Grenzen auf ein Aggregat solcher zurückführen kann, in welchen das Argument die in den vorstehenden Tafeln stehenden Grenzen nicht überschreitet, so hat man die erstern auf ein Aggregat von Integralen von der andern Form reducirt, in denen die Argumente die Grenzen $0 \ldots\ldots +1$ und $0 \ldots\ldots -1$ nicht überschreiten.

§. 6.

Über die Umformung der obigen Integrale in Integrale von der Form

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(-\sin^2\theta \sin^2\varphi)}}.$$

Nachdem man im Vorigen die Integrale von der vorgeschriebenen Art auf die Formen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2x^2)\}}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1+k^2x^2)\}}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{\{(1+x^2)(1+k^2x^2)\}}}$$

gebracht hat, in deren erster und dritter die Gröfse k^2 ein positiver echter Bruch ist, und in deren erster und zweiter das Argument x die Einheit nicht überschreitet, bringt man durch die Substitutionen

$$x = \sin\varphi, \quad x = \cos\varphi, \quad x = \operatorname{tang}\varphi,$$

die 3 Integrale respective auf die Form

$$\frac{1}{M}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta \sin^2\varphi)}},$$

worin beim ersten und dritten das Argument φ innerhalb der Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt, während es beim zweiten zwischen 0 und π enthalten ist.

Man erhält nemlich für die drei Integrale respective

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= k^2, & M &= 1, \\ \operatorname{tang}^2\theta &= k^2, & M &= \cos\theta, \\ \cos^2\theta &= k^2, & M &= 1. \end{aligned}$$

Wenn man diese 3 Substitutionen in die Resultate von (§. 1., §. 2. und §. 3.) einführt, so erhält man folgende Tafeln von Umformungen der ursprünglich gegebenen Integrale in die trigonometrische Normalform. Die erste und zweite dieser Tafeln folgt auch unmittelbar aus den Tafeln im 9ten Paragraph der „Fundamenta nova", wenn man darin $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ statt φ setzt.

Tafel I.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{\mp(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}} = \frac{2\cos^2(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta)}{\sqrt[2]{\{(\alpha-\gamma)\beta-\delta\}}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta \sin^2\varphi)}}.$$

Für das obere Zeichen:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)=\sqrt[4]{\left(\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}\right)},$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\sqrt[4]{\left(\frac{(\beta-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)}\right)}\sqrt[2]{\left(\frac{\alpha-y}{y-\beta}\right)},\quad \text{Grenzen von } y:\ \alpha\ \ldots\ \beta,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\sqrt[4]{\left(\frac{(\beta-\delta)(\alpha-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}\right)}\sqrt[2]{\left(\frac{\gamma-y}{y-\delta}\right)},\quad \text{Grenzen von } y:\ \gamma\ \ldots\ \delta,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Für das untere Zeichen:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)=\sqrt[4]{\left(\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}\right)},$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\sqrt[4]{\left(\frac{(\alpha-\gamma)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\delta)}\right)}\sqrt{\left(\frac{\beta-y}{y-\gamma}\right)},\quad \text{Grenzen von } y:\ \beta\ \ldots\ \gamma,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\sqrt[4]{\left(\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}{(\gamma-\delta)(\beta-\delta)}\right)}\sqrt{\left(\frac{\delta-y}{\alpha-y}\right)},\quad \text{Grenzen von } y:\ \delta\ \mp\infty\ \alpha,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Tafel 2.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\mp(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)\}}}=\frac{2\cos^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)}{\sqrt[2]{(\alpha-\gamma)}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}.$$

Für das obere Zeichen:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)=\sqrt[4]{\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)},$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\sqrt[4]{\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\right)}\sqrt[2]{\left(\frac{\alpha-y}{y-\beta}\right)},\quad \text{Grenzen von } y:\ \alpha\ \ldots\ \beta,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\frac{\sqrt[2]{(y-\gamma)}}{\sqrt[4]{\{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)\}}},\quad \text{Grenzen von } y:\ \gamma\ \ldots\ -\infty,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Für das untere Zeichen:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)=\sqrt[4]{\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\right)},$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\sqrt[4]{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\right)}\sqrt{\left(\frac{\beta-y}{y-\gamma}\right)},\quad \text{Grenzen von } y:\ \beta\ \ldots\ \gamma,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\frac{\sqrt[4]{\{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\}}}{\sqrt{(y-\alpha)}},\quad \text{Grenzen von } y:\ \infty\ \ldots\ \alpha,\quad \varphi:\ +\tfrac{1}{2}\pi\ \ldots\ -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Tafel 3.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\mp(y-a)(y-b)((y-\mu)^2+\nu^2)\}}}=-\frac{\sqrt[2]{(\pm\cos\theta_1\cos\theta_2)}}{\nu}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)\sin^2\varphi)}},$$

wo ν eine positive Gröfse ist, und $a-b$ ebenfalls.

$$\frac{a-\mu}{\nu}=\operatorname{tang}\theta_1,\quad \frac{b-\mu}{\nu}=\operatorname{tang}\theta_2,\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi=\sqrt[2]{\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\cdot\frac{a-y}{y-b}\right)}.$$

Für das obere Zeichen sind θ_1 und θ_2 so zu nehmen, dafs ihre Quadrate zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi^2$ liegen, und es sind die

Grenzen von y: $a \dots b$,
- - - φ: $0 \dots \pi$.

Für das untere Zeichen wird θ_1^2 zwischen $\frac{1}{4}\pi^2$ und π, und θ_2^2 zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi^2$ genommen, und es sind die

Grenzen von y: $b \mp\infty\ a$,
- - - φ: $0 \dots \pi$.

Tafel 4.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\mp(y-a)[(y-\mu)^2+\nu^2]\}}}=-\sqrt{\left(\frac{\pm\cos\theta_1}{\nu}\right)}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\{1-\sin^2\frac{1}{4}(\pi+2\theta_1)\sin^2\varphi\}}},$$

$$\frac{a-\mu}{\nu}=\operatorname{tang}\theta_1,\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi=\sqrt[2]{\left(\frac{\cos\theta_1}{\nu}(a-y)\right)}.$$

Für das obere Zeichen ist θ_1^2 zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi^2$ zu nehmen, und es sind die

Grenzen von y: $a \dots -\infty$,
- - - φ: $0 \dots \pi$.

Für das untere Zeichen ist θ_1^2 zwischen $\frac{1}{4}\pi^2$ und π^2 zu nehmen, und es sind die

Grenzen von y: $\infty \dots a$,
- - - φ: $0 \dots \pi$.

Tafel 5.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{(y-m)^2+n^2\}\{(y-\mu)^2+\nu^2\}}}=\sqrt[4]{\left(\frac{\cos\eta^2}{n^2\nu^2}\right)}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\eta\sin^2\varphi)}},$$

wo n, ν und $m-\mu$ positive Gröfsen sind.

$$\frac{n+\nu}{m-\mu}=\operatorname{tang}\theta_1,\quad \frac{n-\nu}{m-\mu}=\operatorname{tang}\theta_2,\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta=\sqrt{\left(\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}\right)},$$

wo die Gröfsen θ_1^2, θ_2^2, $\frac{1}{4}\eta^2$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi^2$ anzunehmen sind.

$\frac{y-m}{n}=\operatorname{tang}(\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)+\varphi)$, Grenzen von y: ∞, m, $-\infty$,
- - - φ: $\frac{1}{2}(\pi-\theta_1-\theta\ )$, $-\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$, $\frac{1}{2}(\pi-\theta_1-\theta_2)$,

$\frac{\nu}{\mu-y}=\operatorname{tang}(\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)+\varphi)$, Grenzen von y: $-\infty$, μ, $+\infty$,
- - - φ: $\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$, $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)$, $-(\theta_1-\theta_2)$.

§. 7.

Einige allgemeine Bemerkungen über andere Substitutionen, welche auf die Normalform führen.

Die eben auseinandergesetzten Umformungen wurden dadurch gefunden, dafs man für x^2 in den Integralen von der Form

$$1.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{\{(1 \pm x^2)(1 \pm k^2 x^2)\}}}$$

einen passenden lineären Ausdruck von $\sin^2\varphi$ setzte. Allein dieses sind nicht die einzigen Substitutionen dieser Art, durch welche der Zweck erreicht wird, sondern es giebt für jeden der drei Fälle noch einen andern lineären Ausdruck von $\sin^2\varphi$, welcher, für x^2 substituirt, das Integral (1.) auf die Normalform

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi)}}$$

reducirt. Da nemlich dieses letztere Integral durch die Substitution

$$\operatorname{cotang} \varphi = \cos\theta \operatorname{tang}\psi,$$

welche ebenfalls $\sin^2\varphi$ lineär durch $\sin^2\psi$ ausdrückt, in dieselbe Form

$$-\int \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \sin^2\theta \sin^2\psi)}}$$

umgestaltet wird, so erhält man in den 3 obigen Fällen resp. die Substitutionen

$$x^2 = \frac{\cos^2\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi},\quad x^2 = \frac{\sin^2\varphi}{1 + k^2\cos^2\varphi},\quad x^2 = \frac{1}{k^2}\operatorname{cotang}^2\varphi,$$

von denen jedoch die beiden ersten auf etwas complicirtere Substitutionsformeln führen, als die in den vorigen Paragraphen angewendeten, wenn man φ durch das ursprüngliche Argument y bestimmt; und umgekehrt. Alle diese Ausdrücke für x^2, durch welche das Integral (1.) in die Normalform umgestaltet wird, kann man aus den Formeln von der Form

$$y = \frac{a + b\sin^2\psi}{c + d\sin^2\psi}$$

ableiten, mit Hülfe deren das Integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}}$$

in Integrale von der Form

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\psi)}}$$

verwandelt wird. Es läfst sich leicht direct zeigen, dafs, wenn $k < 1$ und $\sin^2\varphi < 1$ werden soll, wieder die Anzahl dieser Substitutionen 8 ist; und zwar von der Art, dafs für jedes Intervall zwei derselben anwendbar sind. Ich ziehe

es jedoch vor, dieselben aus der Tafel 1 abzuschreiben. Setzt man nemlich

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\varphi)=\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)\operatorname{tang}\psi,$$

so erhält man

$$\cos^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}=-\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\sin^2\eta\sin^2\psi)}},$$

$$\cos\eta=\operatorname{tang}^2(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\theta),$$

Grenzen von φ: $+\frac{1}{2}\pi$, 0, $-\frac{1}{2}\pi$,

- - - ψ: 0, $\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta$, $+\frac{1}{2}\pi$.

Die Substitution dieser Formel in die Tafel 1 giebt folgende:

Tafel 6.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\mp(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}}=-\int\frac{2}{\sqrt{\{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)\}}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Für das obere Zeichen:

$$k^2=\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)},$$

$$\operatorname{tang}\psi=\sqrt[2]{\left(\frac{\beta-\delta}{\alpha-\delta}\cdot\frac{\alpha-y}{y-\beta}\right)},\quad \text{Grenzen von } y\text{: } \alpha\ldots\ldots\beta,\quad - - - \psi\text{: } 0\ldots\ldots\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}\psi=\sqrt[2]{\left(\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\gamma-y}{y-\delta}\right)},\quad \text{Grenzen von } y\text{: } \gamma\ldots\ldots\delta,\quad - - - \psi\text{: } 0\ldots\ldots\tfrac{1}{2}\pi.$$

Für das untere Zeichen:

$$k^2=\frac{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)},$$

$$\operatorname{tang}\psi=\sqrt[2]{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\beta-y}{y-\gamma}\right)},\quad \text{Grenzen von } y\text{: } \beta\ldots\ldots\gamma,\quad - - - \psi\text{: } 0\ldots\ldots\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}\psi=\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\delta}\cdot\frac{\delta-y}{\alpha-y}\right)},\quad \text{Grenzen von } y\text{: } \delta\mp\infty\ \alpha,\quad - - - \psi\text{: } 0\ldots\ldots\tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man $\delta=-\infty$ und nimmt die Grenzen, so erhält man

Tafel 7.

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\mp(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)\}}}=-\frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\psi)}}.$$

Für das obere Zeichen:

$$k^2=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma},$$

$$\operatorname{tang}\psi=\sqrt[2]{\left(\frac{\alpha-y}{y-\beta}\right)},\quad \text{Grenzen von } y\text{: } \alpha\ldots\ldots\beta,\quad - - - \psi\text{: } 0\ldots\ldots\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}\psi=\sqrt[2]{\left(\frac{\gamma-y}{\beta-\gamma}\right)},\quad \text{Grenzen von } y\text{: } \gamma\ldots\ldots-\infty,\quad - - - \psi\text{: } 0\ldots\ldots\tfrac{1}{2}\pi.$$

Für das untere Zeichen:

$$k^2 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma},$$

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\beta-y}{y-\gamma}\right)}, \quad \text{Grenzen von } y:\ \beta \ldots\ldots \gamma, \quad - \ - \ - \ \psi:\ 0 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-y}\right)}, \quad \text{Grenzen von } y:\ \infty \ldots\ldots \alpha, \quad - \ - \ - \ \psi:\ 0 \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\pi.$$

Aus allen diesen Umformungen folgen, dadurch, dafs man $\frac{\operatorname{cotang}\psi}{\sqrt{(1-k^2)}}$ statt $\operatorname{tang}\psi$ setzt, ebenso viele andere; denn hierauf führt die Benutzung der obigen Substitution in den Tafeln (1 und 2), wenn man daselbst $-\varphi$ statt φ gesetzt hat. Die obigen 6 Umformungen des Integrals (1.), welches durch die Substitution $x^2 = y$ in

$$\int \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{\{y(1\pm y)(1\pm k^2 y)\}}}$$

übergeht, sind, wie leicht zu sehen, nur Folgerungen aus der Tafel (7) für die Umformung dieses letzten Integrals in die Normalform.

Wenn man in den Tafeln (1, 2, 3, 4, 5) $\sin\varphi = z$, und in den Tafeln (6 und 7) $\sin\psi = z$ setzt, so sieht man, dafs alle dort benutzten Substitutionen unter die Form

$$z^2 = \frac{A+By+Cy^2}{D+Ey+Fy^2}$$

subsummirt werden können, zu welcher auch die 3 am Anfange dieses Paragraphs aufgestellten gehören. Die Substitutionen der ersten und zweiten Tafel sind jedoch insbesondere von der Form

$$z^2 = \left\{\frac{A+By}{C+Dy}\right\}^2$$

und die der 6ten und 7ten von der Form

$$z^2 = \frac{A+By}{C+Dy}.$$

Die in den Tafeln (1, 2, 3, 4, 5) aufgestellten Formeln haben vor den übrigen den Vorzug, dafs das Argument y in ihnen durch $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, rational, durch Formeln von der Form

$$y = \frac{A+B\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi+C\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}{D+E\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi+F\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi}$$

ausgedrückt wird, welche Form auch auf

$$y = \frac{a+b\sin\varphi+c\cos\varphi}{d+e\sin\varphi+f\cos\varphi}$$

zurückkommt. Es giebt jedoch noch andere Substitutionen, welche in *dieser* Beziehung einfacher sind. Man erhält dieselben aus den obigen auf folgende Art. Man setze in den Integralen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1 \mp x^2)(1 \mp k^2 x^2)\}}},$$

in welchen das Argument, wenn nicht beide untere Zeichen gelten, zwischen den Grenzen -1 und $+1$, und wenn beide untere Zeichen gelten, zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen werde, $x^2 = v$, und forme das dann entstehende

$$\int \frac{\frac{1}{2} dv}{\sqrt{\{v(1 \mp v)(1 \mp k^2 v)\}}},$$

dessen Argumente respective zwischen 0 und 1 oder 0 und ∞ genommen werden, mit Hülfe der Tafel (2) in die Normalform um. Hiedurch erhält man die Umformungen

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1-k^2 x^2)\}}} = \pm \frac{1}{1+k_1} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}\right)^2 \sin^2 \varphi\right)}},$$

$$\tan(\tfrac{1}{4}\pi \pm \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{k_1} \sqrt[2]{\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)},$$

Grenzen von x: 0, 1,

- - - φ: $\mp \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{1}{2}\pi$;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1-x^2)(1+k^2 x^2)\}}} = \pm \frac{\cos\alpha}{2\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\{1-\tan^2 \frac{1}{2}\alpha \sin^2 \varphi\}}},$$

$$k = \tan\alpha, \qquad \tan(\tfrac{1}{4}\pi \pm \tfrac{1}{2}\varphi) = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)} \sqrt{\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)},$$

Grenzen von x: 0, 1,

- - - φ: $\mp \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{1}{2}\pi$;

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\{(1+x^2)(1+k^2 x^2)\}}} = \pm \frac{1}{1+k} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \sin^2 \varphi\right)}},$$

$$\tan(\tfrac{1}{4}\pi \pm \tfrac{1}{2}\varphi) = x\sqrt{k},$$

Grenzen von x: 0, ∞,

- - - φ: $\mp \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{1}{2}\pi$.

Führt man diese Substitutionen in die Resultate der Paragraphen (2. bis 6) ein, so erhält man Substitutionen von folgender Form:

$$\sin\varphi = \frac{A+By+Cy^2}{D+Ey+Fy^2}, \text{ oder auch}$$

$$\tan^2(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{a+by+cy^2}{d+ey+fy^2}.$$

Unter ihnen zeichnet sich durch besondere Einfachheit diejenige aus, welche sich auf den dritten Fall bezieht; denn sie ist von der Form

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi \pm \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{a+by}{c+dy}.$$

Es wird nicht überflüssig sein, diese letztere hier noch hinzuzufügen: sie ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{((y-m)^2+n^2)((y-\mu)^2+\nu^2)}} = \frac{\cos\theta_1}{m-\mu}\int\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)},$$

falls

$$\frac{n+\nu}{m-\mu} = \operatorname{tang}\theta_1, \quad \frac{n-\nu}{m-\mu} = \operatorname{tang}\theta_2, \quad k = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

gesetzt wird, wo n, ν, $m-\mu$ positive Gröfsen und die Argumente y und φ durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}\eta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi-\theta_1-\theta_2) = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\varphi), \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{y-m}{n},$$

verbunden sind.

Es ist übrigens leicht zu sehen, dafs die Verbindung zwischen den Argumenten φ und ψ, wenn man

$$y = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\psi$$

setzt, durch Formeln von der Form

$$\sin\psi = \frac{a_1+b_1\sin\varphi+c_1\cos\varphi}{a+b\sin\varphi+c\cos\varphi},$$

$$\cos\psi = \frac{a_2+b_2\sin\varphi+c_2\cos\varphi}{a+b\sin\varphi+c\cos\varphi}$$

ausgedrückt werden kann, welche der berühmten Umformung der Integrale von der Form

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(A+B\cos\psi+2C\sin\psi+D\cos2\psi+E\sin2\psi)}}$$

in der Abhandlung „De transformatione integralis duplicis etc.", im 8ten Bande dieses Journals, zu Grunde gelegt und mit den Wurzeln einer cubischen Gleichung in Verbindung gesetzt ist, mit deren Hülfe die Gröfse unter dem Wurzelzeichen in ihre Factoren zerlegt wird.

Auf dieselbe Form führt auch ein besonderer Fall der Tafel (4). Ist nemlich daselbst $a=0$, und setzt man $y=v^2$, $\mu=\varrho\cos\alpha$, $\nu=\varrho\sin\alpha$, so erhält man die bekannte Umformung

$$\int\frac{dv}{\sqrt{(v^4-2\varrho v^2\cos\alpha+\varrho^2)}} = \frac{1}{2\sqrt{\varrho}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\varphi)}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{v}{\sqrt{\varrho}}, \quad \text{Grenzen von } v\colon 0 \ldots\ldots \pm\infty, \quad \text{- - - } \varphi\colon 0 \ldots\ldots \pm\pi.$$

Endlich bemerke ich, dafs man die Integrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

auf welche man in (§. 2.) durch eine lineäre Substitution die Integrale von der Form

$$\int\frac{dy}{\sqrt{\{\pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\}}}$$

zurückgeführt hat, durch die bekannte Gaufsische Transformation zweiter Ordnung:

$$x=\frac{(1+k^0)z}{1+k^0zz},$$

oder auch umgekehrt:

$$z=\frac{(1+k^1)x}{1+k^1xx},$$

wo $k^0=\frac{1-k_1}{1+k_1}$, $k_1^1=\frac{1-k}{1+k}$ gesetzt ist, auf die Normalformen

$$\frac{1}{M}\int\frac{dz}{\sqrt{\{(1-z^2)(1-k^0k^0z^2)\}}}\quad\text{und}$$

$$\frac{1}{M^1}\int\frac{dz}{\sqrt{\{(1-z^2)(1-k^1k^1z^2)\}}}$$

zurückführen kann. Die dann entstehenden Substitutionsformeln haben respective die Formen

$$y=\frac{a+bz+cz^2}{d+ez+fz^2},\qquad z=\frac{a+by+cy^2}{d+ey+fy^2},$$

und die auf obige Weise aus den Tafeln (1 und 2) geradezu abzuschreibenden, damit zusammenhangenden Umformungen sind in den „Fundamentis novis" §. 8., und in der Abhandlung des Herrn *Luchterhand,* im 17ten Bande dieses Journals, direct entwickelt.

§. 8.

Über die Reduction der Integrale von der Form

$$\int\frac{fy\,dy}{\sqrt{\{((y-m)^2-N)((y-\mu)^2-N)\}}}$$

auf die Normalformen der elliptischen Integrale von den drei Gattungen.

Wenn man die in (§. 6.) benutzten Substitutionen, welche in den drei verschiedenen Fällen von den Formen

$$y=\frac{a+b\sin\varphi}{c+d\sin\varphi},\quad y=\frac{a+b\cos\varphi}{c+d\cos\varphi},\quad y=\frac{a+b\operatorname{tang}\varphi}{c+d\operatorname{tang}\varphi}$$

sind, in dem jetzt zu behandelnden allgemeinern Integral anwendet, so geht

dasselbe in Integrale folgender Art über:

$$\int \frac{F \cdot d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta \sin^2\varphi)}},$$

wo F der Kürze wegen statt einer rationalen Function von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ oder $\tan\varphi$ geschrieben ist, deren Zähler und Nenner in Bezug auf eine dieser Gröfsen höchstens von demselben Grade ist, wie der höchste Grad von y im Zähler und Nenner von fy. Es kommt also darauf an, diese Integrale, deren Argument nach dem Vorigen stets zwischen die Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ gebracht werden kann, auf ihre einfachsten Formen zurückzuführen. Die Function F läfst sich aber stets als ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$(a+\sin\varphi)^\alpha \quad \text{oder} \quad (a+\cos\varphi)^\alpha \quad \text{oder} \quad (a+\tan\varphi)^\alpha$$

darstellen: also hat man die 3 Integrale von der Form

$$\int \frac{(a_1+\sin\varphi)^\alpha}{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}d\varphi, \quad \int \frac{(a_2+\cos\varphi)^\alpha}{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}d\varphi, \quad \int \frac{(a_3+\tan\varphi)^\alpha}{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}d\varphi$$

zu reduciren, wo a eine reelle oder imaginäre Gröfse und α eine positive oder negative beliebige ganze Zahl ist.

Zu dem Ende bezeichne ich diese 3 Integrale respective durch

$$X_\alpha, \quad Y_\alpha, \quad Z_\alpha$$

und stelle folgende drei Reductionsgleichungen auf, welche sich sofort durch Differentiation ergeben:

$$(a_1 \sin\varphi)^h \cos\varphi \sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}$$
$$= h(1-a_1^2)(1-a_1^2\sin^2\theta)X_{h-1} + (2h+1)a_1\{1+\sin^2\theta - 2a_1^2\sin^2\theta\}X_h$$
$$-(h+1)\{1+\sin^2\theta - 6a_1^2\sin^2\theta\}X_{h+1} - 2(2h+3)a_1\sin^2\theta X_{h+2} + (h+2)\sin^2\theta X_{h+3};$$
$$(a_2+\cos\varphi)^h \sin\varphi\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}$$
$$= h(1-a_2^2)(1+a_2^2\tan^2\theta)Y_{h-1} + (2h+1)a_2(1-\tan^2\theta+2a_2^2\tan^2\theta)Y_h$$
$$-(h+1)(1-\tan^2\theta+6a_2^2\tan^2\theta)Y_{h+1} + 2(2h+3)a_2\tan^2\theta Y_{h+2} - (h+2)\tan^2\theta Y_{h+3};$$
$$(a_3+\tan\varphi)^h \frac{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}{\cos^2\varphi}$$
$$= h(1+a_3^2)(1+a_3^2\cos^2\theta)Z_{h-1} - (2h+1)a_3(1+\cos^2\theta+2a_3^2\cos^2\theta)Z_h$$
$$+(h+1)\{1+\cos^2\theta+6a_3^2\cos^2\theta\}Z_{h+1} - 2(2h+3)a_3\cos^2\theta Z_{h+2} + (h+2)\cos^2\theta Z_{h+3}.$$

Vermittels dieser Gleichungen reducirt man alle obigen Integrale auf diejenigen, in welchen der Index α

$$-1, \; 0, \; 1, \text{ oder } 2$$

ist.

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)} = \Delta\varphi,$$

so ist leicht zu sehen, dafs folgende Gleichungen Statt finden:

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$X_1 = a_1 \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$Y_1 = a_2 \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$Z_1 = a_3 \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int \frac{\mathrm{tang}\,\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi};$$

$$X_2 = -\frac{1}{\sin^2\theta}\int \Delta\varphi\, d\varphi + \frac{1+a_1^2\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2a_1 \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$Y_2 = +\frac{1}{\sin^2\theta}\int \Delta\varphi\, d\varphi + \frac{\cos^2\theta - a_2^2\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2a_2 \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$Z_2 = -\frac{1}{\cos^2\theta}\int \Delta\varphi\, d\varphi + a_3^3 \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + 2a_3 \int \frac{\mathrm{tang}\,\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{\mathrm{tang}\,\varphi\, \Delta\varphi}{\cos^2\theta};$$

$$X_{-1} = + \frac{1}{a_1}\int \frac{\sin^2\varphi}{(a_1^2 - \sin^2\varphi)} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{a_1}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(a_1^2 - \sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

$$Y_{-1} = -\frac{a_2}{1-a_2^2}\int \frac{\sin^2\varphi}{(1-a_2^2) - \sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{a_2}{1-a_2^2}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(a_2^2 - \cos^2\varphi)\Delta\varphi},$$

$$Z_{-1} = + \frac{1}{a_3}\int \frac{\sin^2\varphi}{a_3^2 - (a_3^2+1)\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{a_3}\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(a_3^2 - (a_3^2+1)\sin^2\varphi)\Delta\varphi}.$$

Um die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichungen auf die in den „Fundamentis novis etc." eingeführten elliptischen Functionen und Transcendenten zurückzuführen, setze ich:

$$\sin^2\theta = k^2, \quad \cos^2\theta = k_1^2,$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K, \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k_1^2\sin^2\varphi)}} = K_1,$$

$$\varphi = \mathrm{am}\, u, k, \quad \int_0^{\varphi} \Delta\varphi\, d\varphi = \int_0^{u} \Delta^2 \mathrm{am}\, u, k \cdot du = E(u, k),$$

$$\mathrm{am}\, K - u = \mathrm{coam}\, u, k,$$

$$a_1^2 = \sin^2 \mathrm{am}(a + iK_1, k), \quad a_2^2 = \cos^2 \mathrm{am}(a + iK_1, k), \quad a_3^2 = \mathrm{tang}^2 \mathrm{am}(a + iK_1, k),$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a \sin^2\varphi)\Delta\varphi} = \int_0^{a} \frac{k_2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, u\, du}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, u}$$

$$= \Pi(u, a)$$

und erhalte dann aus den vorigen Gleichungen, nach leichten Reductionen und Integrationen, folgende:

$$X_0 = u + C,$$

$$Y_0 = u + C,$$

$$Z_0 = u + C;$$

$$X_1 = a_1 u + \frac{1}{2k}\log\left(\frac{1-k\sin\operatorname{coam} u}{1+k\sin\operatorname{coam} u}\right) + C,$$

$$Y_1 = a_2 u + \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k_1}\cos\operatorname{coam} u\right) + C,$$

$$Z_1 = a_3 u + \frac{1}{2k}\log\frac{1+\varDelta\operatorname{coam} u}{1-\varDelta\operatorname{coam} u} + C;$$

$$X_2 = -\frac{1}{k^2}Eu + \frac{1+a_1^2 k_2}{k^2}u + \frac{a_1}{k}\log\left(\frac{1-k\sin\operatorname{coam} u}{1+k\sin\operatorname{coam} u}\right) + C,$$

$$Y_2 = +\frac{1}{k^2}Eu + \frac{k_1^2 - a_2^2 k^2}{k^2}u + \frac{2a_2}{k}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k_1}\cos\operatorname{coam} u\right) + C,$$

$$Z_2 = -\frac{1}{k_1^2}Eu + a_3^2 u + \frac{a_3}{k_1}\log\frac{1+\varDelta\operatorname{coam} u}{1-\varDelta\operatorname{coam} u} + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am} u\,\varDelta\operatorname{am} u}{k_1^2} + C;$$

$$X_{-1} = +\frac{k\sin\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a\,\varDelta\operatorname{am} a}\Pi u, a + (k\sin\operatorname{am} a)u$$
$$+\frac{k\sin^2\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a\,\varDelta\operatorname{am} a}\log\left(\frac{1+k\sin\operatorname{coam} a\sin\operatorname{coam} u}{1-k\sin\operatorname{coam} a\sin\operatorname{coam} u}\right) + C,$$

$$Y_{-1} = -\frac{ik\sin^2\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a}\Pi u, a - i(k\sin\operatorname{am} a\,\varDelta\operatorname{am} a)u$$
$$+\frac{k\sin^2\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k}{k_1}\cos\operatorname{am} a\cos\operatorname{coam} u\right) + C,$$

$$Z_{-1} = -\frac{i\varDelta^2\operatorname{am} a}{k^2\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a}\Pi u, a + i(\varDelta\operatorname{am} a)u$$
$$-\frac{\varDelta^2\operatorname{am} a}{k_2\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a}\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\operatorname{am} a\,\varDelta\operatorname{am} u) + C.$$

In dem besondern Fall, wo die Function F, welche in dem obigen Integral

$$\int\frac{F.d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\theta\sin^2\varphi)}}$$

vorkommt, eine gerade rationale Function von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tang}\varphi$ ist, kann man die weit einfachern bekannten Reductionsgleichungen anwenden, welche, für die verschiedenen 3 Formen ausgeführt, hier noch hinzugesetzt worden sind.

Da sich in diesen Formen die Function F respective als ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$(m+\sin^2\varphi)^\mu,$$
$$(m+\cos^2\varphi)^\mu,$$
$$(m+\operatorname{tang}^2\varphi)^\mu$$

darstellen läfst, wo m eine beliebige reelle oder imaginäre Gröfse und μ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so kommt es nur auf die Reduction der Integrale

$$\int\frac{(m+\sin^2\varphi)^\mu d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \int\frac{(m+\cos^2\varphi)^\mu d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \int\frac{(m+\operatorname{tang}^2\varphi)^\mu d\varphi}{\Delta\varphi}$$

an, welche ich respective durch:

$$U_\mu,\quad V_\mu,\quad W_\mu$$

bezeichne. Dieselbe ergiebt sich aus folgenden, durch Differentiation leicht zu beweisenden Reductionsgleichungen:

$$(m+\sin^2\varphi)^\mu \sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi$$
$$=\left\{\begin{matrix}-2\mu m(1+m)(1+k^2m)U_{\mu-1} & +(2\mu+1)\{1+2m(1+k^2)+3k^2m^2\}U_\mu \\ -(2\mu+2)(1+k^2+3mk^2)U_{\mu+1} & +(2\mu+3)k^2U_{\mu+2}\end{matrix}\right\};$$

$$(m+\cos^2\varphi)^\mu\sin\varphi\Delta\varphi$$
$$=\left\{\begin{matrix}+2\mu m(1-m)(k_1^2-k^2m)V_{\mu-1} & -(2\mu+1)\{k_1^2+2m(k_1^2-k^2)-3k^2m^2\}V_\mu \\ +(2\mu+2)(k_1^2-k^2-3mk^2)V_{\mu+1} & +(2\mu+3)k^2V_{\mu+2}\end{matrix}\right\};$$

$$\frac{(m+\operatorname{tang}^2\varphi)^\mu\operatorname{tang}\varphi\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}$$
$$=\left\{\begin{matrix}-2\mu m(1-m)(1-k_1^2m)W_{\mu-1} & -(2\mu+1)\{1-2m(1+k_1^2)+3m^2k_1^2\}W_\mu \\ +(2\mu+2)(1+k_1^2-3mk_1^2)W_{\mu+1} & -(2\mu+3)k_1^2W_{\mu+2}\end{matrix}\right\}.$$

Mit Hülfe derselben reducirt man die Gröfsen U_μ, V_μ und W_μ auf solche, in welchen der Index μ, -1, 0, oder $+1$ ist. In dem besondern Falle $m=0$ kommt man sogar nur auf die Indices 0 und 1.

Man kann aber endlich diese 9 noch übrigen Gröfsen, wenn man die obigen Bezeichnungen benutzt, auf folgende Weise auf die in den „Fundamentis novis etc." gebräuchlichen drei Hauptgattungen zurückführen:

$$U_0=u+C,\quad V_0=u+C,\quad W_0=u+C;$$

$$U_1=-\frac{1}{k^2}Eu+\frac{1+mk^2}{k^2}u+C,$$

$$V_1=+\frac{1}{k^2}Eu+\frac{k_1^2-mk^2}{k^2}u+C,$$

$$W_1=-\frac{1}{k_1^2}Eu+mu+\frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}u\Delta\operatorname{am}u}{k_1^2};$$

$$U_{-1}=+\frac{k^2\sin^2\operatorname{am}a}{\cos\operatorname{am}a\Delta\operatorname{am}a}\cdot\Pi u,a\ -(k^2\sin^2\operatorname{am}a)u+C,$$

$$V_{-1}=+\frac{k^2\sin^2\operatorname{am}a}{\cos\operatorname{am}a\Delta\operatorname{am}a}\cdot\Pi u,a\ +(k^2\sin^2\operatorname{am}a)u+C,$$

$$W_{-1}=-\frac{\Delta^2\operatorname{am}a}{k^2\sin\operatorname{am}a\cos\operatorname{am}a}\cdot\Pi u,a\ +\Delta^2\operatorname{am}a\cdot u+C;$$

wo $k^2\sin^2\operatorname{am}a$ respective statt $-\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m+1}$ und $\frac{m-1}{m}$ gesetzt ist.

Man kann übrigens, da sich jede rationale Function F als die Summe von einer geraden und einer ungeraden rationalen Function desselben Arguments darstellen läſst, welche Functionen ich durch F_1 und F_2 bezeichnen will, das allgemeinere Integral

$$\int \frac{F \cdot d\varphi}{\Delta\varphi} = \int \frac{F_1\, d\varphi}{\Delta\varphi} + \int \frac{F_2\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

setzen. Da letztere aber auf logarithmische Kreisfunctionen und algebraische Functionen von $\sin\varphi$ zurückgeführt werden können, so pflegt man auch nur die erstern vermittels der eben auseinandergesetzten Gleichungen auf elliptische Functionen von den drei Hauptgattungen zu reduciren.

Königsberg, den 3ten Juni 1846.

2.

Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes.

(Par Mr. *A. Cayley* de Cambridge.)

En désignant par $U, V, W, \ldots$ des fonctions homogènes des ordres m, n, p, etc. et d'un nombre égal de variables respectivement, et en supposant que ces fonctions soient les plus générales possibles, c'est-à-dire que le coefficient de chaque terme soit une lettre indéterminée: on sait que les équations $U=0$, $V=0$, $W=0$, ... offrent une relation $\Theta=0$, dans laquelle les variables n'entrent plus, et où la fonction Θ, que l'on peut nommer *„Résultant complet des équations,"* est homogène et de l'ordre $np\ldots$ par rapport aux coefficients de U, de l'ordre $mp\ldots$ par rapport à ceux de V, et ainsi de suite, tandis qu'elle n'est pas décomposable en facteurs. Cela posé, supposons que les coefficients de $U, V, \ldots$, au lieu d'être tous indéterminés, soient des fonctions quelconques d'un certain nombre de quantités arbitraires. Substituant ces valeurs dans la fonctions Θ, cette fonction sera toujours le *„Résultant complet"* des équations. Mais Θ peut quelquefois être décomposable en facteurs, dont quelques uns doivent être éliminés. En effet les coefficients de $U, V, \ldots$ peuvent contenir des quantités $\xi, \eta, \ldots$ censées comme variables, et d'autres quantités $\alpha, \beta, \ldots.$ qui sont constantes, et il peut s'agir de la relation entre $\xi, \eta, \ldots$ qui est nécessaire pour que les équations $U=0$, $V=0$ etc. puissent subsister conjointement. Dans ce cas tout facteur $\varLambda$ du résultant complet Θ, qui ne contient pas les coefficients variables $\xi, \eta, \ldots$, doit être rejeté. En supprimant ces facteurs, et exprimant par Φ le facteur qui reste, cette fonction est alors ce que nous nommerons *„Résultant réduit."* Cependant les facteurs $\varLambda$, proprement dits, ne sont jamais des facteurs étrangers, et ce n'est qu'à cause du point de vue particulier, auquel on a envisagé la question, qu'ils ont été rejetés; d'un autre point de vue ces facteurs auraient pû devenir le *Résultant réduit.* Nous les nommerons donc, à l'exemple de M. *Sylvestre*, *„Facteurs spéciaux."*

Pour faire voir tout cela avec plus de clarté, prenons pour exemple le problème suivant de Géométrie analytique.

„Trouver les équations du système des lignes tirées par un point donné aux points d'intersection de deux courbes données."

Soient $U=0$, $V=0$ les équations des deux courbes, U, V étant des fonctions homogènes des variables x, y, z, des ordres m et n respectivement, ce qui revient à prendre $x:z$ et $y:z$ pour coordonnés d'un point. De même il faut exprimer par (α, β, γ) le point dont les coordonnés sont $\alpha:\gamma$ et $\beta:\gamma$; et ainsi pour tous cas semblables. Il s'entend, qu'on suppose partout que les coefficients de U, V, ou de U, restent absolument indéterminés. Représentons par (α, β, γ) le point donné, et par (ξ, η, ζ) un point quelconque d'une des lignes dont il s'agit. En éliminant x, y, z entre les équations

$$1.\quad U=0,\quad V=0\quad \text{et}\quad x(\beta\zeta-\gamma\eta)+y(\gamma\xi-\alpha\zeta)+z(\alpha\eta-\beta\xi)=0,$$

on obtient l'équation cherchée $\Theta=0$. Ici Θ est une fonction homogène de l'ordre mn par rapport à $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$; de l'ordre n par rapport aux coefficients de U, et de l'ordre n par rapport à ceux de V; de plus cette fonction est décomposable en mn facteurs linéaires par rapport à ξ, η, ζ, dont les coefficients sont des fonctions irrationnelles de α, β, γ et des coefficients de U et V (en effet toute fonction homogène de $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$, $\alpha\eta-\beta\xi$ est douée de cette propriété, qui subsiste encore en changeant entre eux ξ, η, ζ et α, β, γ). Chaque facteur lineaire, égalé à zéro, appartient à une des lignes en question. Voilà pourquoi $\Theta=0$ est considérée comme équation du système des lignes.

Soit maintenant proposé le problème:

„Trouver l'équation du système des tangentes tirées d'un point fixe à une courbe donnée."

Il y a ici à éliminer x, y, z entre les équations

$$2.\quad \begin{cases} U=0, \\ \alpha.\dfrac{dU}{dx}+\beta\cdot\dfrac{dU}{dy}+\gamma\cdot\dfrac{dU}{dz}=0 \quad\text{et} \\ x(\beta\zeta-\gamma\eta)+y(\gamma\xi-\alpha\zeta)+z(\alpha\eta-\beta\xi)=0. \end{cases}$$

Le résultant complet est une fonction homogène de l'ordre $n(n-1)$ par rapport à $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$ [n représente ici l'ordre de la fonction U], de l'ordre n par rapport à α, β, γ, et de l'ordre $2n-1$ par rapport aux coefficients de U. Mais il existe dans ce cas un facteur spécial U_0 qui est ce que devient U en écrivant α, β, γ à la place de x, y, z. En le mettant de côté, le résultant réduit Φ est fonction de l'ordre $n(n-1)$ par rapport à

$\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$ et de l'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de U, et l'équation $\Phi=0$ correspond au système de tangentes.

En mettant x, y, z à la place de $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$, $\alpha\eta-\beta\xi$, Φ devient une fonction de l'ordre $n(n-1)$ par rapport à x, y, z, et de l'ordre $2(n-1)$, comme elle l'était ci-dessus par rapport aux coefficients de U. Nous désignerons cette nouvelle valeur de Φ par $\mathsf{F}U$; c'est-à-dire nous représenterons par $\mathsf{F}U$ le résultant réduit des équations

$$3.\quad \begin{cases} U=0, \\ \alpha\cdot\frac{dU}{dx}+\beta\cdot\frac{dU}{dy}+\gamma\cdot\frac{dU}{dz}=0 \quad \text{et} \\ x\mathrm{x}+y\mathrm{y}+z\mathrm{z}=0, \end{cases}$$

$\mathsf{F}U$ étant une fonction des ordres $n(n-1)$ et $2(n-1)$ par rapport à x, y, z et aux coefficients de U. On sait que l'équation $\mathsf{F}U=0$ est celle de la polaire réciproqué de la courbe, par rapport à la conique auxiliaire $x^2+y^2+z^2=0$.

Or les équations (2.) peuvent être écrites aussi sous la forme

$$4.\quad \begin{cases} U=0, \\ \alpha\cdot\frac{dU}{dx}+\beta\cdot\frac{dU}{dy}+\gamma\cdot\frac{dU}{dz}=0, \\ \xi\cdot\frac{dU}{dx}+\eta\cdot\frac{dU}{dy}+\zeta\cdot\frac{dU}{dz}=0. \end{cases}$$

Ici le résultant complet est de l'ordre $n(n-1)$ par rapport à α, β, γ, ou à ξ, η, ζ (car ce résultant complet doit être comme ci-dessus fonction de ce même ordre de $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$) et de l'ordre $(n-1)(3n-1)$ par rapport aux coefficients de U. Le facteur spécial dans ce cas est donc une fonction de l'ordre $3(n-1)^2$ des coefficients de U, et il est facile de trouver sa forme; car on satisferait aux équations (4.) en posant

$$\frac{dU}{dx}=0,\quad \frac{dU}{dy}=0,\quad \frac{dU}{dz}=0.$$

Le résultant de ces équations, que nous désignerons toujours par $K.U$, doit donc se présenter comme facteur spécial du résultant complet du système. Mais $K.U$ étant une fonction des coefficients de l'ordre $3(n-1)^2$, elle est précisément le facteur spécial dont il s'agit. (Il est clair que l'équation $K.U=0$ serait la condition nécessaire, pour que la courbe pût avoir un point multiple.)

Reprenons le premier système. On satisfait à la dernière équation en écrivant

$$6.\quad x=\alpha l+\xi m,\quad y=\beta l+\eta m \quad \text{et} \quad z=\gamma l+\zeta m.$$

Soient $[U]$, $[V]$ ce que deviennent U, V par cette substitution. En élimi-

nant l, m entre les deux équations

$$[U]=0, \quad [V]=0,$$

on obtiendra le même résultant Θ que ci-dessus. En effet, le résultant de ces deux équations est des ordres n et m par rapport aux coefficients de U et V, et de l'ordre $2mn$ par rapport à α, β, γ, ξ, η et ζ: donc il faut qu'il soit égal à Θ, à un facteur numérique près. On a donc le théorème suivant:

Théorème I. L'équation du système des droites menées par un point donné (α, β, γ) aux points d'intersection des deux courbes $U=0$, $V=0$, se trouve en éliminant les nouvelles variables l, m entre les deux équations $[U]=0$ et $[V]=0$, où $[U]$, $[V]$ sont ce que deviennent U et V par les substitutions $x=\alpha l+\xi m$, $y=\beta l+\eta m$ et $z=\gamma l+\zeta m$.

En opérant également sur le second système d'équations, on obtient directement le résultant réduit, sans que l'opération fût embarrassée par aucun facteur spécial. En effet, on peut remplacer le système par

$$8. \quad \begin{cases} \alpha\cdot\frac{dU}{dx}+\beta\cdot\frac{dU}{dy}+\gamma\cdot\frac{dU}{dz}=0, \\ \xi\cdot\frac{dU}{dx}+\eta\cdot\frac{dU}{dy}+\zeta\cdot\frac{dU}{dz}=0 \quad \text{et} \\ x(\beta\zeta-\gamma\eta)+y(\gamma\xi-\alpha\zeta)+z(\alpha\eta-\beta\xi)=0, \end{cases}$$

et en fesant les substitutions (6.) dans la dernière équation, les deux autres équations se changent en

$$\frac{d[U]}{dl}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d[U]}{dm}=0,$$

où $[U]$ est ce que devient U par cette substitution. Le résultant de ces équations est de l'ordre $2n(n-1)$ par rapport à α, β, γ, ξ, η et ζ (c'est-à-dire à une fonction de $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$, de l'ordre $n(n-1)$), et de l'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de U; donc il n'y a plus de facteur spécial. Delà suit:

Théorème II. L'équation du système de tangentes menées du point donné (α, β, γ) à la courbe $U=0$, se trouve en éliminant l, m entre les équations $\frac{d[U]}{dl}=0$, $\frac{d[V]}{dl}=0$, $[U]$ étant ce que devient U par les substitutions $x=\alpha l+\xi m$, $y=\beta l+\eta m$ et $z=\gamma l+\zeta m$. En représentant l'équation par $\Phi=0$, Φ est une fonction de $\beta\zeta-\gamma\eta$, $\gamma\xi-\alpha\zeta$ et $\alpha\eta-\beta\xi$, et en remplaçant ces fonctions par x, y, z, on obtient l'équation de la polaire réciproque (par rapport à $x^2+y^2+z^2=0$) de la courbe donnée.

Ce beau théorème est dû à M. *Joachimsthal*, qui me l'a communiqué l'été passé pendant mon séjours à Berlin, avec démonstration.

On déduit delà, comme cas très-particulier, une forme du résultant des deux équations $ax^2+2bxy+cy^2=0$ et $a'x^2+2b'xy+c'y^2=0$, citée dans mon mémoire sur les hyperdéterminants (tome 30 de ce journal). En effet, soit $x^2=\mathrm{z}$, $xy=-\mathrm{y}$, $y^2=\mathrm{x}$ et $U=\mathrm{xz}-\mathrm{y}^2$, on aura évidemment $U=0$, $a\cdot\frac{dU}{d\mathrm{x}}+b\cdot\frac{dU}{d\mathrm{y}}+c\cdot\frac{dU}{d\mathrm{z}}=0$ et $a'\cdot\frac{dU}{d\mathrm{x}}+b'\cdot\frac{dU}{d\mathrm{y}}+c'\cdot\frac{dU}{d\mathrm{z}}=0$, donc en cherchant le résultant de ces équations de la manière indiquée dans le théorème, on obtient la formule en question $4(ac-b^2)(a'c'-b'^2)-(ac'+a'c-2bb')^2=0$. Cependant la véritable généralisation de cette formule, à ce que je crois, reste encore à trouver.

Il suit des principes développés dans le mémoire cité, que le résultant des deux équations $L=0$, $M=0$ (où L, M sont des fonctions homogènes des deux variables l, m) peut toujours être présenté sous la forme $\Theta=\nabla LL..MM..$, où ∇ est une composition d'expressions symboliques, telles que $(12)^\alpha(13)^\beta\ldots$, dans lesquelles $(12)=\partial_{l_1}\partial_{m_2}-\partial_{m_1}\partial_{l_2}$ etc. Par exemple pour $L=al^2+2blm+cm^2$, $M=a'l^2+2b'lm+c'm^2$, on a $\Theta=((12)^2\cdot(34)^2-(13)^2\cdot(24)^2)\cdot LL\cdot MM$ (c'est-à-dire, comme ci-dessus, $\Theta=4(ac-b^2)(a'c'-b'^2)-(ac'+a'c-2bb')^2$). En appliquant cette théorie à l'élimination des inconnues entre les équations $[U]=0$, $[V]=0$, on obtient

$$\partial_l = \alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z \quad \text{et} \quad \partial_m = \xi\partial_x+\eta\partial_y+\zeta\partial_z,$$

et en fésant

$$\beta\zeta-\gamma\eta=\mathrm{x},\quad \gamma\xi-\alpha\zeta=\mathrm{y},\quad \alpha\eta-\beta\xi=\mathrm{z} \quad \text{et}$$
$$\partial_{y_1}\partial_{z_2}-\partial_{z_1}\partial_{y_2}=(12)',\quad \partial_{z_1}\partial_{x_2}-\partial_{x_1}\partial_{z_2}=(12)'',\quad \partial_{x_1}\partial_{y_2}-\partial_{x_2}\partial_{y_1}=(12)''';$$

et cela donne

$$(12) = \mathrm{x}(12)'+\mathrm{y}(12)''+\mathrm{z}(12)''':$$

équations qui peuvent être présentées sous la forme abrégée

$$(12) = (P12).$$

On obtient le résultant cherché en fésant cette substitution dans tous les symboles que contient ∇, et en introduisant U, V au lieu de $[U]$, $[V]$.

Les mêmes remarques peuvent être appliquées au cas d'une élimination entre les deux équations $\frac{dL}{dl}=0$, $\frac{dL}{dm}=0$, car le résultant sera exprimé ici sous la même forme $\Theta=\nabla LL\ldots$ Cherchons par exemple l'équation de la polaire réciproque d'une courbe du second ordre. En observant que le ré-

sultant des équations $\frac{dL}{dl}=0$, $\frac{dL}{dm}=0$ (où L est une fonction du second degré) sera exprimé sous la forme $\Theta=(12)^2\cdot LL$, on obtient immédiatement pour la réciproque de la courbe du second ordre $U=0$, l'équation

$$\mathsf{F}U=(P12)^2\cdot U\cdot U=0,$$

laquelle se réduit en effet à la forme connue.

Passons au cas d'une courbe du *troisième ordre*. Comme pour une fonction de deux variables, le résultant des équations $\frac{dL}{dl}=0$, $\frac{dL}{dm}=0$ aura la forme $\Theta=(12)^2\cdot(34)^2\cdot(13)\cdot(42)\cdot LLLL$, on a pour la polaire de $U=0$:

$$-2\mathsf{F}U=(P12)^2.(P34)^2\cdot(P13)\cdot(P42)\cdot UUUU=0,$$

et il serait facile de calculer par là le coefficient d'une puissance ou d'un produit quelconque des variables. Par exemple le coefficient de z^6 se réduit à $(12)^{2'''}\cdot(34)^{2'''}\cdot(13)^{2'''}\cdot(42)'''\cdot UUUU$, ou, toute réduction faite, et en supposant

$$6U=ax^3+by^3+cz^3+3iy^2z+3jz^2x+3kx^2y+3i_1yz^2+3j_1zx^2+3k_1xy^2$$
$$+6lxyz$$

à: $2(6bcii_1-4i^3c-4i_1^3b+3i^2i_1^2-b^2c^2)$. L'équation complètement développée, que j'ai donnée pour cette polaire dans le Cambridge et Dublin Mathematical Journal t. I. p. 97, et que j'ai obtenue par une élimination directe, pourra ainsi être vérifiée.

Nous allons passer maintenant à la théorie des *points d'inflexion* et des *tangentes doubles* de la courbe $U=0$. Ces singularités peuvent être traitées par une analyse semblable, en remarquant que parmi les $n(n-1)$ tangentes, menées à la courbe d'un point P situé sur la courbe, la tangente en ce point se présente généralement deux fois, et *trois fois*, si le point P est un point d'inflexion, ou un point de contact d'une tangente double.

Désignons comme ci-dessus par (U) ce que devient U en écrivant $lx+m\xi$, $ly+m\eta$ et $lz+m\zeta$ à la place de x, y et z. En mettant $\xi\partial_x+\eta\partial_y+\zeta\partial_z=\partial$, on a évidemment

$$[U]=l^n\cdot U+l^{n-1}m\cdot\partial U+\frac{1}{1\cdot2}l^{n-2}m^2\cdot\partial^2U+\dots;$$

et en éliminant l, m entre $\frac{d[U]}{dl}=0$, $\frac{d[U]}{dm}=0$, on obtient un résultant $\Theta=0$, où Θ est une fonction de U, ∂U, ∂^2U, ... ∂^nU, et qui a, comme le remarque M. *Joachimsthal*, la propriété dont il s'agit. En écrivant $U=0$, Θ contient le facteur $(\partial U)^2$, et en mettant de côté ce facteur et écrivant $\partial U=0$, Θ contient le facteur $(\partial^2U)^2$; et ainsi de suite. Nous avons supposé que le

point P, auquel appartiennent les coordonnées x, y et z, est un point de la courbe; de manière, que l'on a actuellement $U=0$. En fésant donc cette supposition et en éliminant le facteur $(\partial U)^2$, l'équation $\Theta=0$ prend la forme $X\partial U+Y(\partial^2 U)^2=0$ (puisqu'en mettant $\partial U=0$, l'équation contiendra à gauche le facteur $(\partial^2 U)^2$). Dans le cas où P est un point d'inflexion, ou un point de contact d'une tangente double, cette équation contiendra ∂U comme facteur: donc il faut que $Y(\partial^2 U)^2$ contienne ce facteur, c'est-à-dire: ou $\partial^2 U$, ou Y, contiendra le facteur ∂U. Dans le premier cas il s'agit d'un point d'inflexion, dans le second cas d'un point de contact d'une tangente double.

Considérons d'abord les points d'inflexion. Comme $\partial^2 U$ contient ∂U comme facteur, il faut que cette fonction devienne zéro pour toutes les valeurs de ξ, η, ζ qui font évanouir ∂U. Désignons par L, M, N les coefficients différentiels du premier ordre de U, de manière que $\partial U=L\xi+M\eta+N\zeta$. Cette quantité s'évanouit identiquement en fésant $\xi=\beta N-\gamma M$, $\eta=\gamma L-\alpha N$, $\zeta=\alpha M-\beta L$: donc il faut que $\partial^2 U$ s'évanouisse par la substitution de ces valeurs, quelles que soient les quantités α, β, γ. En désignant par D ce que devient le symbole D par cette substitution, c'est-à-dire en fésant

$$D=\alpha(M\partial_x-N\partial_y)+\beta(N\partial_x-L\partial_z)+\gamma(L\partial_y-M\partial_x),$$

la condition d'un point d'inflexion se réduit tout simplement à

$$D^2 U=0:$$

équation dans laquelle les symboles ∂_x, ∂_y, ∂_z ne doivent pas contenir L, M, N. Nous reviendrons sur cette équation dans une note; pour le moment il suffit de remarquer, qu'en vertu de relations qui existent entre L, M, N et les dérivées a, b, c, f, g, h au second ordre, on a identiquement

$$(n-1)^2\cdot D^2 U=n(n-1)\cdot\Psi\cdot U-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2(\nabla U),$$

où Ψ est une fonction de α, β, γ et des dérivées a, b, c, f, g, h, dont la forme sera donnée dans la suite, et

$$\nabla U=abc-af^2-bg^2-ch^2+2fgh.$$

Donc à cause de $U=0$, la seule condition pour déterminer les points d'inflexion est l'équation

$$\nabla U=0,$$

qui est de l'ordre $3(n-2)$ par rapport aux variables, et de l'ordre 3 par rapport aux coefficients de U. Cela est déjà connu par les recherches de M. *Hesse*. J'ai donné ici cette équation pour faire voir la liaison qui existe entre cette question et celle de trouver les tangentes doubles, à laquelle je vais passer maintenant.

On obtient l'équation, qui détermine les points de contact de ces tangentes, en fésant les mêmes substitutions $\xi = \beta N - \gamma M$ etc. dans la fonction Y, et en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances ou produits de α, β, γ. Remarquons que cette fonction Y s'obtient par une fonction de l'ordre $n^2 - n$ par rapport à x, y, z, ou à ξ, η, ζ, et de l'ordre $2(n-1)$ par rapport aux coefficients, en éliminant les facteurs $(\partial U)^2$ et $(\partial^2 U)^2$, qui ensemble montent au degré $4n-6$ par rapport à x, y, z, à 6 par rapport à ξ, η, ζ, et à 4 par rapport aux coefficients. Donc Y est des degrés n^2-n-6, n^2-5n-6 et $2n-6$ par rapport à x, y, z, ξ, η, ζ et aux coefficients de U respectivement. En substituant donc ξ, η, ζ, cette fonction devient des ordres n^2-n-6 par rapport à α, β, γ, à $n^3-2n^2-10n+12$ par rapport à x, y, z [savoir $(n^2-5n+6)+(n-1)(n^2-n-6)$], et de l'ordre n^2+n-12 par rapport aux coefficients [savoir $(2n-6)+(n^2-n-6)$]. Mais on sait que les conditions de l'évanouissement de Y doivent se réduire à une seule équation; et cela ne peut arriver que de la même manière dont la réduction analogue a eu lieu pour les points d'inflexion. En écrivant donc $[Y]$ à la place de ce que devient Y après la substitution, il faut que l'on ait identiquement:

$$[Y] = A \cdot U + N(\Pi U).$$

N étant fonction de α, β, γ du degré n^2-n-6. Il parait de plus probable que cette fonction aura la même forme que celle pour les points d'inflexion, savoir $N = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^{n^2-n-6}$. ($\Pi U$, comme ci-dessus ∇U, est censé exprimer non pas un produit, mais une derivée de U: de même plus bas PU et QU.) Cela étant, ΠU sera du degré $(n-2)(n^2-9)$ par rapport à x, y et z [c'est-à-dire $n^3-2n^2-10n+12-(n^2-n-6)$], et du degré n^2+n-12 par rapport aux coefficients. On a donc le théorème suivant:

Théorème. On trouve les points de contact des tangentes doubles, en combinant avec l'équation de la courbe une équation $\Pi U = 0$ de l'ordre $(n-2)(n^2-9)$ par rapport aux variables, et de l'ordre n^2+n-12 par rapport aux coefficients; c'est-à-dire: puisqu'il correspond deux points de contact à une tangente double, le nombre de ces tangentes est égal à $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$: théorème démontré indirectement par M. *Plücker*.

Cherchons maintenant les équations du système des tangentes aux points d'inflexion et du système des tangentes doubles.

Pour trouver la première équation, il faut éliminer x, y, z entre les trois équations

$$U = 0, \quad \nabla U = 0, \quad x \cdot \frac{dU}{dx} + y \cdot \frac{dU}{dy} + z \cdot \frac{dU}{dz} = 0.$$

Le résultant complet sera du degré $3n(n-2)$ par rapport à x, y et z, et de l'ordre $9n^2-18n+6$ [savoir $3(n-2)(n-1)+3n(n-1)+3n(n-2)$] par rapport aux coefficients; mais il existe ici le facteur spécial $(KU)^2$, et ce facteur étant éliminé, on obtient un résultant réduit $QU=0$, du degré $3n(n-2)$ par rapport aux variables, et du même degré $3n(n-2)$ par rapport aux coefficients.

De même on aura l'équation du système des tangentes doubles, en éliminant x, y et z entre les trois équations

$$U=0,\quad \Pi U=0 \quad \text{et} \quad x\cdot\frac{dU}{dx}+y\cdot\frac{dU}{dy}+z\cdot\frac{dU}{dz}=0.$$

Le résultant complet est ici du degré $n(n-2)(n^2-9)$ par rapport à x, y, z, et du degré $3n^4-5n^3-29n^2+57n-18$ [savoir $(n-1)(n-2)(n^2-9)+n(n-2)(n^2-9)+n(n-1)(n^2+n-12)$] par rapport aux coefficients. Mais il existe de même dans ce cas un facteur spécial $(KU)^{n^2-n-6}$ [du degré $3(n-1)^2\cdot(n^2-n-6)=3n^4-9n^3-9n^2+33n-18$], et en l'éliminant, le résultant réduit sera du degré $4n(n-2)(n-3)$ par rapport aux coefficients. Mais le terme de cette équation à gauche sera évidemment un *carré*; on aura donc pour l'équation du système des tangentes doubles, la relation $PU=0$, où PU est une fonction du degré $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ par rapport aux variables, et du degré $2n(n-2)(n-3)$ par rapport aux coefficients. Donc on pourra former le tableau suivant des degrés des différentes équations obtenues:

	Degrés par rapport aux variables,	Degrés par rapport aux coefficients
Equation de la courbe $U=0$,	n	1
Condition d'un point multiple $KU=0$,	0	$3(n-1)^2$
Polaire réciproque $FU=0$,	$n(n-1)$	$2(n-1)$
Courbe des inflexions $\nabla U=0$,	$3n(n-2)$	3
Courbes des contacts des tangentes doubles $\Pi U=0$,	$(n-2)(n^2-9)$	$(n+4)(n-3)$
Systèmes des tangentes aux points d'inflexion, $QU=0$,	$3n(n-2)$	$3n(n-2)$
Système des tangentes doubles $PU=0$,	$\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$	$2n(n-2)(n-3)$.

La polaire de la polaire réciproque FFU sera évidemment du degré $(n^2-n)(n^2-n-1)$ par rapport aux variables, et du degré $4(n-1)(n^2-n-1)$ par rapport aux coefficients. Cette polaire de la polaire contiendra, comme on le sait par la théorie géométrique développée par M. *Plücker*, les facteurs

U, $(PU)^2$ et $(QU)^3$; il faut y ajouter encore le facteur constant KU, et l'on aura definitivement l'équation

$$FFU = (KU)(PU)^2(QU)^3\cdot U,$$

dans laquelle il sera facile à vérifier que les deux côtés sont des mêmes degrés par rapport aux variables et aux constantes. En effet on a

$$4(n-1)(n^2-n-1) = 3(n-1)^2+4n(n-2)(n-3)+9n(n-2)+1 \text{ et}$$
$$n(n-1)(n^2-n-1) = n(n-2)(n^2-9)+9n(n-2)+9.$$

Mon but a été ici de donner une idée précise des theorèmes à démontrer, pour former une théorie toute analytique des polaires réciproques; je n'ai fait qu'avancer ces theorèmes (sans chercher à les démontrer), pour faire voir leur liaison avec la théorie de l'élimination et avec celle des hyperdéterminants; c'est à cette dernière en particulier qu'il faut, je crois, recourir pour démontrer la formule donnée ci-dessus $[Y] = \varDelta\cdot U + (\alpha x+\beta y+\gamma z)^{n^2-n-6}(\varPi U)$, et pour trouver définitivement la forme de la dérivée $\varPi U$, au moyen de laquelle on déterminera les points de contact des tangentes doubles. Je serais bien aise que ces recherches puissent de quelque manière faciliter la solution du problème des réciproques des *surfaces*: objet, qui est resté encore dans une complète obscurité.

Note sur les points d'inflexion.

Je vais d'abord rassembler plusieurs formules qui se rapportent au système des coefficients dans le développement de D^2U. On a

$$D^2U = \mathfrak{a}\alpha^2+\mathfrak{b}\beta^2+\mathfrak{c}\gamma^2+2\mathfrak{f}\beta\gamma+2\mathfrak{g}\gamma\alpha+2\mathfrak{h}\alpha\beta,$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= M^2c-2MNf+N^2b,\\
\mathfrak{b} &= N^2a-2NLg+L^2c,\\
\mathfrak{c} &= L^2b-2LMh+M^2a,\\
\mathfrak{f} &= -MNa+NLh+LMg-L^2f,\\
\mathfrak{g} &= +MNh-NLb+LMf-M^2g,\\
\mathfrak{h} &= +MNg+NLf-LMc-N^2h.
\end{aligned}$$

Nous écrirons de plus, pour abréger,

$$\begin{aligned}
&bc-f^2 = \mathfrak{A}, \quad gh-af = \mathfrak{F}, \quad \nabla = abc-af^2-bg^2-ch^2+2fgh,\\
&ca-g^2 = \mathfrak{B}, \quad hf-bg = \mathfrak{G},\\
&ab-h^2 = \mathfrak{C}, \quad fg-ch = \mathfrak{H},\\
&\mathfrak{bc}-\mathfrak{f}^2 = (\mathfrak{A}), \qquad \text{etc.}\\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

et enfin

$$\Phi = \mathfrak{A}L^2 + \mathfrak{B}M^2 + \mathfrak{C}N^2 + 2\mathfrak{F}MN + 2\mathfrak{G}NL + 2\mathfrak{H}MN.$$

On obtient identiquement

$$\begin{aligned} L\mathrm{a} + M\mathrm{h} + N\mathrm{g} &= 0, \\ L\mathrm{h} + M\mathrm{b} + N\mathrm{f} &= 0, \\ L\mathrm{g} + M\mathrm{f} + N\mathrm{c} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}) &= L^2\Phi, & (\mathfrak{B}) &= M^2\Phi, & (\mathfrak{C}) &= N^2\Phi, \\ (\mathfrak{F}) &= MN\Phi, & (\mathfrak{G}) &= NL\Phi, & (\mathfrak{H}) &= LM\Phi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\mathrm{f} - MN\mathfrak{F} &= (Nh - Lf)(Lf - Mg), \\ g\mathrm{g} - NL\mathfrak{G} &= (Lf - Mg)(Mg - Nh), \\ h\mathrm{h} - LM\mathfrak{H} &= (Mg - Nh)(Nh - Lf); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4L^2MN\mathfrak{F} + \mathrm{b}(L^2b + M^2a) + \mathrm{c}(N^2a + L^2c) - \mathrm{bc} - 2L^2a\mathrm{a} &= (L^2b - M^2a)(N^2a + L^2c), \\ 4M^2NL\mathfrak{G} + \mathrm{c}(M^2c + N^2b) + \mathrm{a}(L^2b + M^2a) - \mathrm{ca} - 2M^2b\mathrm{b} &= (M^2c - N^2b)(L^2b + M^2a), \\ 4N^2LM\mathfrak{H} + \mathrm{a}(N^2a + L^2c) + \mathrm{b}(M^2c + N^2b) - \mathrm{ab} - 2N^2c\mathrm{c} &= (N^2a - L^2c)(M^2c - N^2b); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4L^2MN\mathfrak{A} - \mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a}(M^2c + N^2b) &= -(M^2c - N^2b)^2, \\ 4M^2NL\mathfrak{B} - \mathrm{b}^2 + 2\mathrm{b}(N^2a + L^2c) &= -(N^2a - L^2c)^2, \\ 4N^2LM\mathfrak{C} - \mathrm{c}^2 + 2\mathrm{c}(L^2b + M^2a) &= -(L^2b - M^2a)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^2MN\mathfrak{A} + N\mathrm{g}(+Lf + Mg - Nh) + M\mathrm{h}(Lf - Mg + Nh) - \mathrm{gh} &= -MN(Nh - Mg)^2, \\ M^2NL\mathfrak{B} + L\mathrm{h}(-Lf + Mg + Nh) + N\mathrm{f}(Lf + Mg - Nh) - \mathrm{bf} &= -NL(Lf - Nh)^2, \\ N^2LM\mathfrak{C} + M\mathrm{f}(+Lf - Mg + Nh) + L\mathrm{g}(Lf + Mg + Nh) - \mathrm{fg} &= -LM(Mg - Lf)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla L^2 &= -a^2\mathrm{a} + (ab - 2h^2)\mathrm{b} + (ca - 2g^2)\mathrm{c} + 2(af - 2gh)\mathrm{f} - 2ag\cdot\mathrm{g} - 2ah\cdot\mathrm{h}, \\ 2\nabla M^2 &= +(ab - 2h^2)\mathrm{a} - b^2\mathrm{b} + (bc - 2f^2)\mathrm{c} - 2bf\cdot\mathrm{f} + 2(bg - 2hf)\mathrm{g} - 2bh\cdot\mathrm{h}, \\ 2\nabla N^2 &= +(ca - 2g^2)\mathrm{a} + bc - 2f^2)\mathrm{b} - c^2\mathrm{c} - 2cf\cdot\mathrm{f} - 2cg\mathrm{g} + 2(ch - 2fg)\mathrm{h}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla MN &= +(af - 2gh)\mathrm{a} - bf\mathrm{b} - cf\mathrm{c} - 2bc\mathrm{f} - 2ch\mathrm{g} - 2bg\mathrm{h}, \\ 2\nabla NL &= -ag\mathrm{a} + (bg - 2hf)\mathrm{b} - cg\mathrm{c} - 2ch\mathrm{f} - 2ca\mathrm{g} - 2af\mathrm{h}, \\ 2\nabla LM &= -ah\mathrm{a} - bh\mathrm{b} + (ch - 2fg)\mathrm{c} - 2bg\mathrm{f} - 2af\mathrm{g} - 2ab\mathrm{h}. \end{aligned}$$

Dans toutes ces équations, si $Lx + My + Nz$ était facteur de $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$, on aurait évidemment $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = 0$, $\mathrm{c} = 0$, $\mathrm{f} = 0$, $\mathrm{g} = 0$, $\mathrm{h} = 0$, et de là $\nabla = 0$, Φ, ce qui donnerait des formules plus simples, et auxquelles on pourrait encore donner plusieurs autres formes. Par exemple on tire d'un de ces systèmes, $-1 \div MN\mathfrak{F} = Mg - Nh \div \Theta$ etc., où $\Theta = (Mg - Nh)(Nh - Lf)(Lf - Mg)$, et delà les expressions

$$\frac{L}{\mathfrak{F}} + \frac{M}{\mathfrak{G}} + \frac{N}{\mathfrak{H}} = 0,$$

$$\frac{L^2 f}{\mathfrak{F}} + \frac{M^2 g}{\mathfrak{G}} + \frac{N^2 h}{\mathfrak{H}} = 0,$$

$$\frac{L^3 f^2}{\mathfrak{F}} + \frac{M^3 g^2}{\mathfrak{G}} + \frac{N^3 h^3}{\mathfrak{H}} = LMN,$$

auxquelles on pourrait ajouter encore plusieurs systèmes analogues, ce qui se ferait sans la moindre difficulté.

Jusqu'ici L, M, N, a, b, c, f, g, h ont été des quantités quelconques. En supposant qu'elles soient les dérivées du premier et du second ordre d'une fonction U, on a

$$(n-1)L = ax + hy + gz,$$
$$(n-1)M = hx + by + fz,$$
$$(n-1)N = gx + fy + cz,$$
$$n\cdot(n-1)\,U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy,$$

et la substitution de ces valeurs donne la formule du texte:

$$(n-1)^2\cdot D^2U = n\cdot(n-1)\cdot\Psi\cdot U - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2(\nabla U),$$

(∇U) étant ici $= \nabla$, et Ψ étant donnée par l'équation

$$\Psi = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2 + 2\mathfrak{F}\beta\gamma + 2\mathfrak{G}\gamma\alpha + 2\mathfrak{H}\alpha\beta.$$

Cela peut être vérifié facilement par la substitution actuelle. Mais nous allons le démontrer par la théorie des hyperdéterminants. En effet, soit (123) le déterminant symbolique formé avec $\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{z_1} : \partial_{x_2}, \partial_{y_2}, \partial_{z_2} : \partial_{x_3}, \partial_{y_3}, \partial_{z_3}$, $(A23)$ le déterminant symbolique formé avec $\alpha, \beta, \gamma : \partial_{x_2}, \partial_{y_2}, \partial_{z_2} : \partial_{x_3}, \partial_{y_3}, \partial_{z_3}$, et ainsi de suite; puis soient T_1, T_2 ... les fonctions $x\partial_{x_1} + y\partial_{y_1} + z\partial_{z_1}$, $x\partial_{x_2} + y\partial_{y_2} + z\partial_{z_2}$ etc. et $\rho = \alpha x + \beta y + \gamma z$, on aura identiquement:

$$\rho\cdot(123) = -T_1\cdot(A23) - T_2\cdot(A31) - T_3(A12),$$

et en élévant au carré les deux membres de cette équation, ajoutant le facteur $U_1 U_2 U_3$, et réduisant les variables après avoir différentié suivant x, y, z, puis en tenant compte des équations

$$(123)^2\, U_1 U_2 U_3 = 6\nabla U,$$
$$T_1^2\cdot A(23)^2\, U_1 U_2 U_3 = 2n(n-1)U\cdot\Psi \text{ et}$$
$$T_1 T_2 A(23) A(31) U_1 U_2 U_3 = -(n-1)^2 D^2 U,$$

on obtiendra le résultat dont il s'agit.

Il sera aussi facile de déduire de cette formule quelques propriétés de la courbe $\nabla U = 0$, dans les cas d'un point double ou d'un point de rebroussement de la courbe $U = 0$. En effet, pour un point double, les dérivées

L, M, N de U, et par suite D^2U, et ses dérivées du premier ordre, s'évanouissent. De plus, pour un point de rebroussement on a $\Psi = 0$. Donc, pour un point double on a $\nabla U = 0$, où la courbe exprimée par cette équation passe par chaque point double (y compris les points de rebroussement) de la courbe $U = 0$. Prenons la dérivée de l'équation en question, en affectant du symbole $\partial = \xi\partial_x + \eta\partial_y + \zeta\partial_z$ ses deux membres. Supprimant les termes, qui se réduisent à zéro aux points doubles, cela donne

$$0 = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \cdot \partial\nabla U;$$

c'est-à-dire qu'il y aura aussi à chacun de ces points un point double de la courbe $\nabla U = 0$. Passant aux dérivées du second ordre, on aura

$$(n-1)^2 \cdot \partial^2 D^2 U = n(n-1)\Psi\partial^2 U - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \cdot \partial^2 \nabla U.$$

Or ici

$$\partial^2 D^2 U = \alpha^2 \cdot \partial^2 \mathfrak{a} + \beta^2 \partial^2 \mathfrak{b} + \gamma^2 \cdot \partial^2 \mathfrak{c} + 2\beta\gamma\partial^2 \mathfrak{f} + 2\gamma\alpha\partial^2 \mathfrak{g} + 2\alpha\beta\partial^2 \mathfrak{h}$$

et $\partial^2 \mathfrak{a}$ etc. se réduisent à

$$2(\partial M^2 \cdot c - 2\partial M \cdot \partial N f + \partial N^2 \cdot b) \text{ etc.},$$

savoir en mettant $a\xi + h\eta + g\zeta$, $h\xi + b\eta + f\zeta$, $g\xi + f\eta + c\zeta$ à la place de ∂L, ∂M, ∂N, et en ayant égard à la condition $\nabla U = 0$, à $2\partial^2 U \cdot \mathfrak{A}$, etc., on aura $\partial^2 Du = 2\partial^2 U \cdot \Psi$ ou enfin

$$(n-1)(n-2)\partial^2 U \cdot \Psi = -(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \cdot \partial^2 \nabla U,$$

c'est-à-dire: les deux courbes $U = 0$, $\nabla U = 0$, se toucheront dans les points doubles. Enfin pour un point de rebroussement $\partial^2 \nabla U$ s'évanouit, c'est-à-dire, il existe un point triple dans la courbe $\nabla U = 0$. Mais il peut être démontré que deux branches de la courbe se touchent en ce point, et qu'elles touchent aussi la courbe $U = 0$; c'est-à-dire qu'il y aura dans la courbe $\nabla U = 0$ un point de rebroussement, et une autre branche de la courbe qui passe par ce point. Pour cela il faudra passer aux dérivées du troisième ordre. Cela donne, en supprimant les termes qui s'évanouissent:

$$(n-1)^2 \cdot \partial^3 \cdot D^2 U = 3n(n-1)\partial\Psi \cdot \partial^2 U - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \cdot \partial^3 \nabla U.$$

Ici on a

$$\partial^3 D^2 U = \alpha^2 \partial^3 \mathfrak{a} + \text{etc.},$$

$$\begin{aligned} \partial^3 \mathfrak{a} = \; & 6(\partial M^2 \cdot \partial c - 2\partial M \partial N \partial f + \partial N^2 \cdot \partial b) \\ & + 6(\partial M \partial^2 M c - (\partial M \partial^2 N + \partial N \partial^2 M) f + \partial N \cdot \partial^2 N b) \text{ etc.}, \end{aligned}$$

et les deux lignes de cette expression se réduisent à $6\partial^2 U \cdot \partial \mathfrak{A}$ et à zéro respectivement. En effet, en remplaçant ∂M, ∂N par leurs valeurs, le coefficient de ξ^2 dans la première ligne devient $6(h^2 \partial c - 2gh\partial f + g^2 \partial b) = 6a(b\partial c + c\partial b - 2f\partial f)$ (et à cause de $\mathfrak{H} = 0$, $\mathfrak{G} = 0$, $\mathfrak{f} = 0$) $= 6a\partial\mathfrak{A}$;

et également pour les autres termes. De même, le coefficient de ξ^2 dans la seconde ligne devient $6(h\partial h.c-(g\partial h+h\partial g)f+g\partial g.b)$. En y ajoutant $3(h^2\partial c-2gh\partial f+g^2\partial b)$, savoir $3a\partial\mathfrak{A}$, la somme se réduit à $3\partial(ch^2-2fgh+bg^2)$ $=3\partial(a\mathfrak{A}-\nabla)=3a\partial\mathfrak{A}$; donc le coefficient en question s'évanouit. En cherchant de la même manière les autres coefficients, on trouvera les valeurs dont il s'agit, et ainsi $\partial^3 a=6\partial^2 U\cdot\partial\mathfrak{A}$ etc. et delà $\partial^3 D^2 U=6\partial^2 U\partial\Psi$; donc enfin

$$3(n-1)(n-2)\cdot\partial^2 U\partial\Psi=-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\cdot\partial^3\nabla U;$$

ce qui suffit pour démontrer le théorème, qui peut être énoncé comme suit:

Théorème. „Il existe un point double de la courbe $\nabla U=0$, pour chaque point double de la courbe $U=0$, et les deux courbes ont des tangentes communes dans ces points. De plus, il existe un point triple de la courbe $\nabla U=0$, pour chaque point de rebroussement de la courbe $U=0$, savoir un point de rebroussement dont les deux branches touchent la tangente de la courbe $U=0$, et encore une troisième branche, qui passe par le point de rebroussement."

Il suit de là que dans le cas d'un point double, ce point doit être considéré comme la réunion de six points d'intersection, et dans celui d'un point de rebroussement, de huit points d'intersection. C'est de cette manière que l'on se rend compte du théorème de M. *Plücker* qui dit que l'effet de ces deux singularités est, de faire disparaître respectivement six ou huit points d'inflexion de la courbe donnée.

Examinons, en finissant, la théorie des points *d'osculation*. Il est facile de voir que la condition d'un tel point (savoir d'un point dans lequel la tangente coupe la courbe en quatre points consécutifs) consiste en ce que $\partial^3 U$ contient ∂U comme facteur, ou, autrement dit, que l'équation $D^3 U=0$ est *identiquement* vraie. On obtient ainsi *dix* conditions, qui se réduisent assez facilement *à six*; mais pour les réduire à *une seule* condition, il faut prendre la dérivée, avec le symbole D de la valeur donnée ci-dessus de $D^2 U$. On doit cependant ne pas oublier que $D\cdot D^2 U$, outre le terme $D^3 U$, contient aussi des termes que l'on obtient en fésant opérer les symboles ∂_x, ∂_y, ∂_z sur les quantités L, M, N qui entrent dans $D^2 U$. Car il est convenu que les symboles ∂_x, ∂_y, ∂_z dans $D^3 U$, ne doivent pas affecter les lettres L, M, N. Cependant il est remarquable que dans le cas actuel, ces termes se détruisent entièrement. En effet, en les désignant par Ω, on obtient

$$\Omega=2D\cdot[(M\gamma-N\beta)(a\partial_L+h\partial_M+g\partial_N)+(N\alpha-L\beta)(h\partial_L+b\partial_M+f\partial_N) \\ +(L\beta-M\gamma)(g\partial_L+f\partial_M+c\partial_N)]D\cdot U,$$

ou il faut d'abord effectuer les opérations ∂_L, ∂_M, ∂_N qui se rapportent à D, et ensuite rapporter les ∂_x, ∂_y, ∂_z à la fonction U. Cela donne

$$\Omega = 2\cdot[\alpha(N\partial_y - M\partial_z) + \beta(L\partial_z - N\partial_y) + \gamma(M\partial_x - L\partial_y)] \times$$
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^2[N(f\partial_y - b\partial_z) - M(c\partial_y - f\partial_z)] \\ +\beta^2[L(g\partial_z - c\partial_x) - N(a\partial_z - g\partial_x)] \\ +\gamma^2[M(h\partial_x - a\partial_y) - L(b\partial_x - h\partial_y)] \\ +\beta\gamma[-L(h\partial_z + g\partial_y - 2f\partial_x) + M(a\partial_z - g\partial_x) + N(a\partial_y - h\partial_x)] \\ +\gamma\alpha[-M(f\partial_x + h\partial_z - 2g\partial_y) + N(b\partial_x - h\partial_y) + L(b\partial_z - f\partial_y)] \\ +\alpha\beta[-N(g\partial_y + f\partial_x - 2h\partial_z) + L(c\partial_y - f\partial_z) + M(c\partial_x - g\partial_z)] \end{array}\right\} U,$$

où ∂_x, ∂_y, ∂_z se rapportent seulement à U. Or tous les termes de cette expression *s'évanouissent*. Par exemple le coefficient de α^3 devient

$$(N\partial_y - M\partial_z)[N(f\partial_y - b\partial_z) - M(c\partial_y - f\partial_z)]U$$
$$= [N^2(f\partial_y^2 - b\partial_z\partial_y) + M^2(c\partial_y\partial_z - f\partial_z^2) - MN(c\partial_y^2 - f\partial_y\partial_z + f\partial_y\partial_z - b\partial_z^2)U = 0,$$

et ainsi des autres termes; donc on a $\Omega = 0$.

Donc, en transportant à l'autre côté de l'équation les termes qui contiennent U, DU ou ∇U, on obtient cette formule très simple:

$$(n-1)^2 D^3 U = -(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 D\nabla U,$$

où la seule condition d'un point d'osculation (en ayant égard à l'équation $\nabla U = 0$) se réduit à $D\nabla U = 0$. Savoir les dérivées $\partial_x\nabla U$, $\partial_y\nabla U$, $\partial_z\nabla U$ doivent être proportionnelles à $\partial_x U$, $\partial_y U$, $\partial_z U$ (ce qui équivaut à une seule condition, en vertu de $U = 0$, $\nabla U = 0$; comme on le voit facilement). Cela donne le théorème suivant.

Théorème. „Dans le cas d'un point *d'osculation*, les deux courbes $U = 0$, $\nabla U = 0$ se touchent."

Il n'y a presque pas de doute que la derivée $\nabla\nabla U$ ne se réduise *toujours* à la forme $R\cdot U + S\cdot\nabla U$. En effet, M. *Hesse* l'à démontré pour les fonctions de trois variables et du troisième degré, et moi, je l'ai vérifié pour les fonctions de deux variables d'un dégré quelconque. Cela étant, les points d'inflexion de la courbe $\nabla U = 0$ sont situés aux points d'intersection avec $U = 0$, et au cas ou les deux courbes se touchent, ce point de contact doit être considéré comme la réunion de trois points d'intersection: donc

„Tout point *d'osculation* peut être envisagé comme point de réunion de *trois* points *d'inflexion*."

Nous démontrerons encore d'une manière conforme à celle dont nous avons trouvé l'expression de D^2U, l'expression qui vient d'être donnée pour D^3U

de la formule

$$\varrho^2(123)^2 = (T_1(A23)+T_2(A31)+T_3(A12))^2.$$

En multipliant les deux membres par $(A14)+(A24)+(A34)$, le terme à gauche peut être présenté sous la forme $\varrho^2\cdot(A\theta 4)\cdot(123)^2$, où ∂_{x_θ}, ∂_{y_θ}, ∂_{z_θ} se rapportent à tous les systèmes de variables. En y appliquant le produit $U_1 U_2 U_3 U_4$ (les variables identiques après les différentiations), on obtiendra $6\varrho^2(A\theta 4)\,U_4\cdot\nabla U = -6\cdot D\nabla U\cdot\varrho^2$. Pour la droite de l'équation on a d'abord trois termes comme $T_1^2\cdot(A14)(A23)^2\cdot U_1 U_2 U_3 U_4$, lesquels se détruisent évidemment, à cause de $(A14)\cdot U_1 U_4 = 0$; puis six termes de la forme $(A14)(A23)(A31)\,U_1 U_2 U_3 U_4$, qui se détruisent aussi, puisqu'en changeant 1,3 et 2,4, le terme change de signe; puis trois termes comme $T_1^2\cdot((A24)+(A34))(A23)^2\cdot U_1 U_2 U_3 U_4$ etc. savoir $T_1^2\cdot U_1((A24)+(A34))(A23)^2\cdot U_2 U_3 U_4 = -2n(n-1)\,U\cdot D\Psi$; c'est-à-dire tous ces termes sont $6n(n-1)\,U\cdot D\Psi$; enfin trois termes de la forme $2T_1 T_2(A23)(A31)(A34)\,U_1 U_2 U_3 U_4 = 2(n-1)^2\cdot D^3 U$, ou, tous pris ensemble, $6(n-1)^2 D^3 U$. Donc, en supprimant le terme $-6n(n-1)\,U\cdot D\Psi$, à cause de $U=0$, on obtient la même équation que ci-dessus, savoir:

$$(n-1)^2 D^3 U = -(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 D\nabla U.$$

On pourrait croire qu'il y a une équation analogue $(n-1)^2 D^4 U = -(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 D^2\nabla U$ pour les derrivées du *quatrième* degré, mais cela n'est pas. En effet, il est facile de voir que pour un point d'osculation, $D^2\nabla U$ se réduit à $\nabla\nabla U$, à un facteur près, c'est-à-dire de $D^2\nabla U = 0$, puisque $\nabla\nabla U$ s'évanouit aux points d'osculation: donc on aurait généralement pour un point d'osculation $D^4 U = 0$; mais cela est seulement le caractère des points d'osculation d'un plus haut degré, savoir de ceux où la tangente rencontre la courbe en cinq points consécutifs. Pour le quatrième degré le problème devient trop compliqué pour être traité de cette manière.

Cambridge 9ième mai 1846.

3.

In solutionem Aequationum Algebraicarum Disquisitio.

(Auctore *C. J. Malmsten*, prof. math. Upsaliens.)

Inde jam a saeculo XVI aequationes algebraicas tertii quartique gradus solvi potuisse constat, quamquam primae methodi tam speciales fuerunt, ut quae radices aequationum tertii gradus praebuerunt, eaedem nullo modo ad quartam extendi possent. Qui igitur diversam sibique peculiarem methodum postulavit. Quod ut perspiciatur in memoriam tantum revocare sufficiat, quales fuerint primae illae methodi: comparatione enim facta facile videbis, singulas methodos, quas pro quarti gradus aequationibus *Ferrari* et *Cartesius* proposuerunt, nihil commune cum methodo habere, quam pro solvenda tertii gradus aequatione a *Tartalea* inventum, *Cardanus* ille in vulgus edidit. Primo, quantum nos sciamus, *Tschirnaus* [1]) generalem et ad utriusque gradus aequationes aptam methodum debemus; quem deinceps *Euler* et *Bezout* secuti sunt, quorum ille in *Novis Commentariis Petrop.* *Vol. IX*, hic in *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris* anno 1765 methodum aeque generalem et convenientem exposuit.

Ex vero ipsa, qua hae posteriores methodi gaudebant, uniformitate, optimum etiam pro solvendis superiorum graduum aequationibus sperare licuit. Nec in hac re defuere conatus; quamquam et calculi prolixitate et exortis novis difficultatibus ne pro quinto quidem gradu ad exspectatum exitum perventum est. Sic in methodo Tschirnausensi ad hunc gradum adplicanda, quatuor aequationes inter quatuor incognitas solvantur necesse est, unde eliminatione facta aequatio finalis 24ti gradus resultat. Reductam etiam ejusdem gradus, praebet methodus *Euleri*, atque si viam, quam *Bezout* aperuit, secutus fueris, ad aequationem 120ti gradus, quae tamen modo aequationis 24ti gradus solvi potest, pervenies. Quae quamquam ita sunt, tamen ex eo quod pro solvendis tertii quartique gradus aequationibus reducta secundae tantum tertiaeque dimensionis, ultimo loco est solvenda, Analystae speraverunt, solutionem aequationis 5ti gradus ultimo etiam per reductam quarti gradus dari posse. Quod quidem *Bezout* etiam argumentis quibusdam quodammodo firmare conatus est.

---

[1]) Acta Erud. Lips. anno 1683.

Haec fere fuit hujus theoriae ratio, cum *Lagrangius* in Commentariis novis Berolinensibus explicatiorem suscepit eorum dijudicationem, quae ad illud usque tempus de algebraicis solvendis aequationibus fuerant proposita. Singulis igitur ad certa principia revocatis methodis, in promtu ibi ponit, universalem cujuslibet aequationis solutionem a particulari quadam superioris cujusdam dimensionis evolutione pendere; veramque insuper aperit causam, cur felicior pro inferioribus dimensionibus fuerit eventus, minus vero prosper pro superioribus. Quod ad supra memoratum Celⁱ. *Bezout* argumentationem adtinet, qua probare conatus erat, solutionem aequationis 5^{ti} gradus per reductam quartae dimensionis dari posse, quem dubitandi locum relinquat, quamque parum probabilem, nedum certam, rem reddat, facile demonstrat; atque insuper de conatibus in generalem aequationum algebraicarum solutionem omnino dubitae videtur.

Quamquam vero a spe sua ita quodammodo dejecti, Geometrae post *Lagrangium* in ejusmodi generalem solutionem eruendam minus incubuerunt, tamen res tota in suspenso erat, usque dum inclytissimus ille Normannus *Abel* novam omnino rei faciem induit. Qui sagacitate sua omnia penetrante et vincente debito cum rigore mathematico demonstravit, radices aequationis generalis 5^{ti} gradus non posse explicito modo algebraice et finite in coëfficientibus exprimi [2]). Cujus quidem ante cum *Ruffini* fecerat periculum [3]); argumentatio vero ejus minus probans erat, tantaque obscuritate involuta, ut nihil fere inde pro cito haberes.

Quod si quoad rigorem nihil quidem commentationi, quam citavimus, *Abelianae* objectari potest, tamen ipsa demonstratio non aeque gaudet simplicitate et perspicuitate; quo factum est ut multo minus, quam pro rei dignitate, cognita videatur. Hoc etiam Auctor celebratissimus ipse intellexisse videtur, ita judicans: *„Je crois, que la démonstration, que j'ai donné, ne laisse rien „à désirer du côté de la rigueur; mais elle n'a pas toute la simplicité, dont „elle est susceptible* [4]). Novam igitur de resolutione aequationum algebraicarum disquisitionem suscepit, generaliorem quidem eam, sed, ut ipse dicit, revera simpliciorem; quam tamen quod absolvere ei non licuit, non possumus quin tamquam damnum paene irreparabile doleamus. Fragmenta quidem aliqua

---

[2]) *Beweis der Unmöglichkeit, algebr. Gleichungen von höheren Gleichungen als dem vierten aufzulösen.* Journ. von *Crelle* Bd. I. p. 65.

[3]) *Memoria della insolub. delle equazione algebraiche generali di grado superiore al quarto.* Mem. d. societ. Italian. Tom. IX. p. 444.

[4]) *Oeuvres compl. d. N. H. Abel. Tom. II. p. 186.*

hujus commentationis [5]) in eximia magni Analystae operum collectione, quam *B. Holmboe,* professor Christianiensis, in vulgus edidit, invenimus; ex quibus patet, problema generale, quod sibi proposuisset Auctor solvendum, hoc fuisse:

Invenire omnes aequationes determinati cujuslibet gradus, quae algebraice possunt resolvi; atque inde de data aequatione judicare, utrum resolubilis sit illa, nec ne.

Cujus quamquam ipse fatetur se ad completam solutionem non pervenisse, tamen in exordio commentationis, ubi de institutione operis prolixius loquitur, theoremata quaedam maxime notanda commemorat, quae de ardua re elicere ipsi contigerit, nimirum:

1°. Si aequatio irreductibilis μ^{ti} gradus, exsistente μ numero primo integro, algebraice sit resolubilis, radices hanc habebunt formam

$$y = A + \sqrt[\mu]{(R_1)} + \sqrt[\mu]{(R_2)} + \sqrt[\mu]{(R_3)} + \ldots + \sqrt[\mu]{(R_{\mu-1})},$$

ubi A quantitas rationalis est et $R_1, R_2, \ldots R_{\mu-1}$ radices aequationis $(\mu-1)^{ti}$ gradus [6]).

2°. Si aequatio irreductibilis, cujus gradus est numeri primi dignitas μ^α, algebraice sit resolubilis, aut aequatio in $\mu^{\alpha-\beta}$ aequationes, unamquamque $\mu^{\beta ti}$ gradus, decomponi potest, quarum coëfficientes ex aequationibus $\mu^{\alpha-\beta ti}$ gradus pendent, aut unaquaeque radicum hanc formam habebit:

$$y = A + \sqrt[\mu]{(R_1)} + \sqrt[\mu]{(R_2)} + \sqrt[\mu]{(R_3)} + \ldots + \sqrt[\mu]{(R_\nu)},$$

ubi A quantitas rationalis est, et $R_1, R_2, \ldots R_\nu$ radices aequationis ν^{ti} gradus, exsistente ν ad summum $\mu^\alpha - 1$ aequali [6]).

3°. Si aequatio irreductibilis μ^{ti} gradus, exsistente μ per numeros primos inter se diversos divisibili, algebraice sit resolubilis, numerus μ semper ita in duos factores μ_1 et μ_2 dissolvi potest, ut data aequatio in μ_1 aequationes μ_2^{ti} gradus decomponi possit, quarum coëfficientes ex aequationibus μ_1^{ti} gradus pendent.

4°. Si aequatio irreductibilis $\mu^{\alpha ti}$ gradus, exsistente μ numero primo, algebraice sit resolubilis, unaquaeque radicum ita potest exprimi

$$y = f(\sqrt[\mu]{(R_1)}, \sqrt[\mu]{(R_2)}, \sqrt[\mu]{(R_3)}, \ldots \sqrt[\mu]{(R_\nu)}),$$

ubi f functionem rationalem et quoad radices intra ( ) symmetricam designat, et $R_1, R_2, \ldots R_\nu$, aequationis radices sunt, cujus gradus ad summum est $\mu^\alpha - 1$ [6]).

---

[5]) *Sur la résolution algébrique des équations.* Oeuvr. compl. Tom. II. pag. 185.

[6]) Addendum sine dubio est: *cujus coëfficientes ex datae aequationis coëfficientibus rationaliter sunt formatae.*

Haec fuere praecipua theoremata, quae *Abel* se demonstrasse commemorat, quamquam ex ipsa demonstratione nonnisi fragmenta quaedam reliqua sunt, eaque ex parte inenodabilia. Nam in commentatione citata, prooemio una cum duabus primis paragraphis excepto, ubi continentur definitiones propositionesque praemissae, quae cetera restant, ex nudis fere formulis conficiuntur. Quarum quamquam inter se nexum veramque sententiam Editori aliquatenus enucleare contigit, tamen ad demonstrationem ipsorum theorematum quomodo ducant, non potest perspici.

Inter quatuor theoremata, quae supra attulimus, primum nobis in eo maximi momenti visum est, quod ex hoc demonstrato facile concludi licet, aequationem generalem 5^{ti} gradus (ideoque superiorum dimensionum) non posse algebraice resolvi. Qua igitur re nos in eo maxime enisi sumus, ut ex formulis illis fragmentariis *Abelianis* ejus saltem demonstrationem elicere possemus. Quamquam quidem in reficienda demonstratione *Abeliana* nobis quidem adeo non successisse est confitendum, ut ipse cardo demonstrationis, quam daturi sumus, omnino noster sit, tamen ex definitionibus *Abelianis* propositionisque, quas ille statuit, auxiliaribus procedentes, vestigia magni Analystae, quantum potuimus, in demonstrando premere conati sumus.

---

§. 1.

Definitio I. Quantitas v functio dicitur Algebraica ipsarum m quantitatum $x_{,}$, $x_{,,}$, ... x_{m}, si per finitam nescio quam simplicium operationum algebraicarum complexionem quantitas v in $x_{,}$, $x_{,,}$, ... x_{m} exprimi potest.

Operationes algebraicae, quas simplices vocavimus, hae sunt:

1° *Additio*, 2° *Subtractio*, 3° *Multiplicatio*, 4° *Divisio*,

5° *Extractio radicum cum exponentibus primis*.

Quibus igitur operationibus neque *Elevatio ad dignitates integras*, neque *Extractio radicum cum exponentibus compositis*, seorsim adscribuntur, quippe quarum *illa* multiplicatione contineatur, *haec* vero numquam non in duas pluresve radicum cum exponentibus primis extractiones dissolvi possit; ex gr.

$$\sqrt[m.n]{a} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})} = \sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})}.$$

Definitio II. Quantitas v functio dicitur Rationalis ipsarum m quantitatum $x_{,}$, $x_{,,}$, ... x_{m}, si per finitam nescio quam operationum

Additionis, Subtractionis, Multiplicationis et Divisionis complexionem quantitas v in $x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m$ exprimi potest.

Definitio III. *Quantitas v functio dicitur Integra ipsarum m quantitatum $x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m$, si per finitam nescio quam operationum Additionis, Subtractionis et Multiplicationis complexionem quantitas v in $x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m$ exprimi potest.*

§. 2.

His ita definitis facile perspicitur:

1°. *Unamquamque integram ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m$ functionem per finitam summam terminorum hujusce formae*

$$A x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots . x_m^{n_m}$$

exprimi posse, existente et quantitate aliqua ab $x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m$ independente, et $n_1, n_2, \ldots .$ numeris integris positivis, zero incluso;

2°. *Unamquamque rationalem ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m$ functionem in formam*

$$\frac{f(x_{,}. x_{,,}, \ldots . x_m)}{F(x_{,}. x_{,,}, \ldots . x_m)}$$

semper redigi posse, designantibus f et F functiones nescio quas integras, quae communi divisore gaudent.

§. 3.

Radices quae in expressione algebraica occurrere possunt, aut *necessariae* sunt ad ipsam expressionis formationem, *aut non necessariae.* Sic quamquam est

$$a + \sqrt{(b \cdot c)} = a + \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$$

tamen ad hanc expressionem formandam duae illae radices $\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ non necessariae sunt, sed unica tantum radix $\sqrt{(bc)}$. Facile vero patet, salva generalitate semper supponere licere:

Expressionem algebraicam nullas radices non necessarias involvere, sed ita esse comparatam, ut radicibus numero paucioribus non posse exprimi.

§. 4.

Servato quod in paragr. antec. dictum est, functiones algebraicas in diversos ordines distinguimus secundum numerum diversarum quantitatum radicalium, quae in illa occurrunt. Sic dicitur functio algebraica

0^{ti} *ordinis*, quae nullam omnino radicalem involvit i. e. quae rationalis est;

1^{mi} ***ordinis,*** quae unicam tantum radicalem involvit;

2^{di} ***ordinis,*** in qua duae (non plures) diversae radicales occurrunt;
atque in genere

n^{ti} ***ordinis,*** in qua n diversae (non plures) radicales occurrunt.
Sic expressiones

$$\sqrt{c}+\sqrt[3]{(a+b\sqrt{c})}, \quad \sqrt{c}+\sqrt[3]{d}, \quad \sqrt{(d(a+\sqrt{c}))}$$

omnes secundi ordinis sunt; expressio

$$(A.) \quad \sqrt{(c\sqrt[3]{a})}+\sqrt{(h\sqrt{(c\sqrt{d})})}$$

quinti ordinis, sed

$$(B.) \quad \sqrt{(c\sqrt{a})}+\sqrt[3]{(h\sqrt{(c\sqrt{a})})}$$

tertii tantum ordinis est [7]). De cetero, in determinando expressionis ordine, maximopere est observandum

1° Quod in §. 1ma statuimus, radices cum exponentibus compositis in duas pluresve radices cum exponentibus primis dissolvi debere. Sic est expressio $\sqrt[6]{a}$ revera secundi ordinis, siquidem est

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{(\sqrt{a})};$$

2° Nullas quantitates numero radicalium esse adnumerandas, quae quamvis per se irrationales sint, tamen tamquam cognitae sunt considerandae, ex. gr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$, etc.

§. 5.

Progrediamur jam ad definiendam formam generalem functionis algebraicae ipsarum m quantitatum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_{m}$, seu (quod idem est) formam functionis n^{ti} ordinis harum quantitatum. Denotent semper in sequentibus:

f et F functiones nescio quas *integras,*

φ generalem formam functionis rationalis,

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ generalem formam functionis 1^{mi}, 2^{di}, ... n^{ti} ordinis.

Initium vero a simplicioribus faciamus, primumque in functionem $\varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_{m})$ inquiramus, in qua (ex ipsa functionis 1^{mi} ordinis notione)

7) Posito enim

$$\sqrt{a}=\gamma; \quad \sqrt{(c\gamma)}=\delta; \quad \sqrt{d}=\sigma; \quad \sqrt{(c\sigma)}=v$$

immediate patet, expressionem (*A.*) has quinque diversas radicales

$$\gamma, \ \delta, \ \sigma, \ v, \ \sqrt[3]{(hv)}$$

et expressionem (*B.*) has tres diversas radicales

$$\gamma, \ \delta, \ \sqrt[3]{(h\delta)}$$

involvere; unde fit ut illa *quinti,* haec vero tertii tantum ordinis est.

unica tantum radicalis occurrit. Sit haec radicalis $R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, exsistente R_1 functione rationali ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m$ et μ_1 numero primo; habemus igitur

$$\varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m) = \varphi\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)$$

atque ex §. 2da

$$1. \quad \varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m) = \frac{f\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)}{F\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)}.$$

Ut vero e denominatore hujus formulae omnis irrationalitas tollatur, sit w radix quaelibet imaginaria aequationis

$$z^{\mu_1} - 1 = 0,$$

cujus igitur ceteras radices esse

$$w^2, \quad w^3, \quad w^4, \quad \ldots \quad w^{\mu_1 - 1}, \quad 1,$$

cognitum est. Jam si multiplicemus numeratorem et denominatorem formulae (1.) per productum

$$Z = F\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, wR_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right).F\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, w^2R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)\ldots$$
$$\ldots F\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, w^{\mu_1-1}R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)$$

habebimus

$$2. \quad \varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m) = \frac{f\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right).Z}{F\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right).Z}.$$

Cum autem sint

$$R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad wR_1^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad w^2R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad \ldots \quad w^{\mu_1-1}R_1^{\frac{1}{\mu_1}},$$

μ_1 diversae radices aequationis

$$z^{\mu_1} - R_1 = 0,$$

facile patet, denominatorem formulae (2.) integram functionem symmetricam harum radicum esse, igiturque integram ipsius R_1 functionem i. e. rationalem ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m$ functionem. Brevitatis causa hanc functionem per u designemus, ita ut sit

$$u = F\left(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right).Z$$

rationalis ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m$ functio.

Quod ad numeratorem formulae (2.) adtinet, ipsum Z integra functio est ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$ et

$$3. \quad w, \; w^2, \; w^3, \; \ldots \; w^{\mu_1-1}$$

atque insuper respectu harum quantitatum (3.) symmetrica; unde facile sequitur, ut Z atque igitur totus formulae (2.) numerator revera sit functio integra ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$ quae w non continet.

Potest igitur, si ad ea respectum habemus, quae in §. 2da proposita sunt, formula (2.) sub hac forma praesentari:

$$4. \quad \varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m) = \frac{A_0 + A_1 R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + A_2 R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \ldots + A_\nu R_1^{\frac{\nu}{\mu_1}}}{u}$$

exsistentibus $A_0, A_1, \ldots A_\nu$ integras, atque u et R_1 rationalibus ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m$ functionibus; unde positis

$$\frac{A_0}{u} = B_0, \quad \frac{A_1}{u} = B_1, \quad \ldots \quad \frac{A_p}{u} = B_p,$$

fit

$$5. \quad \varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m) = B_0 + B_1 R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + B_2 R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \ldots + B_p R_1^{\frac{p}{\mu_1}},$$

exsistentibus $B_0, B_1, \ldots B_p$ rationalibus ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m$ functionibus.

Facillimo vero negotio apparet, salva omni generalitate, semper in (5.) supponere licere maximum ipsius $R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$ exponentem $< \mu_1$ esse, id est, formulam (5.) cum hac posse commutari:

$$6. \quad \varphi_1(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m) = B_0 + B_1 R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + B_2 R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \ldots + B_{\mu-1} R_1^{\frac{\mu_1-1}{\mu_1}}.$$

Nam, exsistente k (numero quolibet integro) exponente nescio qua ipsius $R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, possumus semper ponere

$$k = a\mu_1 + \alpha$$

(a et α numeri integri et $\alpha < \mu_1$); unde

$$R_1^{\frac{k}{\mu_1}} = R_1^{\frac{a\mu_1+\alpha}{\mu_1}} = R_1^a R^{\frac{\alpha}{\mu_1}};$$

quod si in (5.) substituitur, expressionem ipsius φ_1, qualis (6.) est, dabit. Quam igitur tamquam generalem functionis 1^mi^ ordinis formam considerare possumus.

Eodem fere modo, quo functionem φ_1 invenimus, possumus etiam mutatis mutandis generalem functionis algebraicae formam, id est formam functionis

$$\varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \ldots x_m)$$

definire. Ex ipsa enim ejusmodi functionis notione sequitur, ut in illa n diversae radicales (non plures) occurrant, quae sint

$$7.\quad R_1^{\frac{1}{\mu_1}},\ R_2^{\frac{1}{\mu_2}},\ R_3^{\frac{1}{\mu_3}},\ \dots\ R_n^{\frac{1}{\mu_n}},$$

exsistentibus $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ numeris integris primis et $R_1, R_2, \dots R_n$ functionibus ipsorum $x_{,}, x_{,,}, \dots x_m$, quae radicales quidem in se se continere possunt, nullas vero alias, quam quae inter radicales (7.) inveniuntur [*]. Functio igitur $\varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m)$ non potest non rationaliter in $x_{,}, x_{,,}, \dots x_m$ et radicalibus (7.) exprimi, unde

$$\varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m) = \varphi\left(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right)$$

seu

$$8.\quad \varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m) = \frac{f\left(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right)}{F\left(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right)}.$$

Inter radices (7.) unam saltem esse necesse est, quae sub nullam aliam radicem sit subjuncta. Sit haec radix $R_n^{\frac{1}{\mu_n}}$, quae, ut prae ceteris distinguatur, brevitatis causa scribamus

$$f\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \quad \text{pro} \quad f\left(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right),$$

$$F\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \quad \text{pro} \quad F\left(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right),$$

unde formula (8.) ita erit praesentata:

$$9.\quad \varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m) = \frac{f\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right)}{F\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right)}.$$

E denominatore vero omnis quoad $R_n^{\frac{1}{\mu_n}}$ irrationalitas tolli potest, ita ut, restantibus tantum ceteris $n-1$ radicibus, ipse $(n-1)^{\text{ti}}$ ordinis fiat. Nam sint

$$1,\ w_1,\ w_1^2,\ w_1^3,\ \dots\ w_1^{\mu_n-1}$$

diversae aequationis

$$z_1^{\mu_n} - 1 = 0$$

---

[*]) Si in $R_1, R_2, \dots R_n$ vel unica tantum radicalis occurreret, quae in (7.) non invenitur, manifestum est fore ut functio φ_n plures quam n diversas radicales contineret, id quod ipsi hujus functionis notioni omnino esset contrarium.

radices, et multiplicemus denominatorem et numeratorem formulae (9.) per productum

$$Z_1 = F\left(w_1 \cdot R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \cdot F\left(w_1^2 \cdot R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \dots F\left(w_1^{\mu_n - 1} \cdot R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right),$$

habemus

$$10. \quad \varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m) = \frac{f\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \cdot Z_1}{F\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \cdot Z_1}.$$

Cum autem sunt

$$R_n^{\frac{1}{\mu_n}}, \quad w_1 \cdot R_n^{\frac{1}{\mu_n}}, \quad w_1^2 \cdot R_n^{\frac{1}{\mu_n}}, \quad \dots \quad w_1^{\mu_n - 1} \cdot R_n^{\frac{1}{\mu_n}},$$

μ diversae radices aequationis

$$z_1^{\mu_n} - R_n = 0,$$

evidens omnino est, denominatorem $F\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \cdot Z_1$ (quippe qui integra functio symmetrica harum radicum sit) integram functionem respectu R_n esse, igiturque, restantibus tantum ceteris $n-1$ radicibus $R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, ... $R_{n-1}^{\frac{1}{\mu_{n-1}}}$, functionem $(n-1)^{ti}$ ordinis ipsorum $x_{,}$, $x_{,,}$, ... x_m. Brevitatis causa hanc functionem per u_1 designemus, ita ut sit

$$11. \quad u_1 = F\left(R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right) \cdot Z_1.$$

Jam si ad numeratorem formulae (10.) nos convertimus, cum in Z_1 quantitates w_1, w_1^2, ... $w_1^{\mu_n - 1}$ non nisi symmetrico modo occurrunt, sequitur ut Z_1, igiturque totus formulae (10.) numerator integra fiat functio ipsorum

$$x_{,}, \; x_{,,}, \; \dots \; x_m, \quad R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, \; R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \; \dots \; R_n^{\frac{1}{\mu_n}},$$

w non continens. Quam si functionem per f_1 designamus, habebimus

$$\varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m) = \frac{f_1\left(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m, R_1^{\frac{1}{\mu_1}}, R_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \dots R_n^{\frac{1}{\mu_n}}\right)}{u_1},$$

seu, ex natura functionum integrarum:

$$12. \quad \varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \dots x_m) = \frac{C_0 + C_1 R_n^{\frac{1}{\mu_n}} + C_2 R_n^{\frac{2}{\mu_n}} + \dots + C_p R_n^{\frac{p}{\mu_n}}}{u_1}$$

exsistentibus (cum ab initio supposuimus $R_n^{\frac{1}{\mu_n}}$ sub nullam aliam radicem esse subjunctum) u_1 R_n et omnibus C functionibus ordinis $(n-1)^{ti}$ ipsorum $x_{,}$, $x_{,,}$, ... x_m. Hinc vero, positis

$$\frac{C_0}{u_1} = M_0, \quad \frac{C_1}{u_1} = M_1, \quad \ldots . \quad \frac{C_p}{u_1} = M_p;$$

fit

$$\varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m) = M_0 + M_1 R_n^{\frac{1}{\mu_n}} + M_2 R_n^{\frac{2}{\mu_n}} + \ldots + M_p R_n^{\frac{p}{\mu_n}},$$

ubi tamen (sicuti ad formulam (5.) demonstravimus), salva generalitate, nullis ipsius $R_n^{\frac{1}{\mu_n}}$ exponentibus $> \mu_n - 1$ opus est; igiturque hujusmodi fit generalis functionis n^{ti} ordinis forma:

$$13. \quad \varphi_n(x_{,}, x_{,,}, \ldots . x_m) = M_0 + M_1 R_n^{\frac{1}{\mu_n}} + M_2 R_n^{\frac{2}{\mu_n}} + \ldots + M_{\mu_n - 1} R_n^{\frac{\mu_n - 1}{\mu_n}},$$

exsistentibus M_0, M_1, ... $M_{\mu_n - 1}$ functionibus $(n-1)^{ti}$ ordinis ipsorum $x_{,}$, $x_{,,}$, ... x_m.

§. 6.

Quod in §. 4to de functionibus algebraicis in genere diximus, si id ad aequationes refertur, eas etiam in diversos ordines divisas habebimus. Sic *aequatio n^{ti} ordinis dicitur, ubi diversae radicales necessariae, quae in coëfficientibus occurrunt, numero n sunt.* Ut et *ordo* et *gradus* aequationis cujusdam facilius in oculos cadat, *aequationem n^{ti} ordinis et r^{ti} gradus per*

$$14. \quad \varphi(x^r, n) = 0$$

signabimus [9]).

In sequentibus maximi omnino erit momenti, recte perspicere, quid per aequationes *reductibiles* et *irreductibiles* intelligatur. Maximopere igitur hanc definitionem bene intelligendam recommendamus.

Definitio IV. *Aequatio algebraica* ***reductibilis*** *dicitur, si radicem aliquam communem habet cum aequatione quadam inferioris gradus, cujus coëfficientes nullas alias radicales continent, quam quae in ipsa illa aequatione occurrunt; aequatio vero, quae reductibilis non est,* ***irreductibilis*** *vocatur* [10]).

---

[9]) Supposuimus semper coëfficientem ipsius x^r in $\varphi(x^r, n) = 0$ esse $+1$. De cetero est observandum:

1° Quod in §. 3^{tia} dictum est, expressionem algebraicam ita esse formatam debere, ut radicibus numero paucioribus non possit exprimi. Quo fit ut in aequationum coëfficientibus, de quibus in sequentibus quaestio erit, nulla radix non necessaria occurrere ponatur;

2° Quod in pag. 51 dicitur, „*nullas quantitates numero radicalium esse adnumerandas,*" etc. Sic ex. gr. exsistente α radice imaginaria aequationis $x^3 - 1 = 0$, quantitas $A + \alpha\sqrt[3]{B}$ non alio modo irrationalis est habenda, quam $A + \sqrt[3]{B}$.

[10]) In memoriam semper sunt revocandae observationes, quas in notula antecedente proposuimus.

Sic ex. gr. aequatio

$$x^4 + 2\sqrt{h}\cdot x^3 + hx^2 - h = 0$$

reductibilis est, quia duas habet radices communes cum aequatione

$$x^2 + \sqrt{h}\cdot x - \sqrt{h} = 0,$$

ubi nulla alia radicalis quam $\sqrt{h}$ occurrit. Contra vero aequatio

$$x^4 + 2\sqrt{h}\cdot x^3 + hx^2 - g = 0$$

irreductibilis est; habet quidem duas radices communes cum

$$x^2 + \sqrt{h}\cdot x - \sqrt{g} = 0,$$

ubi tamen radicalis $\sqrt{g}$ occurrit, quam aequatio illa 4^{ti} gradus non continet.

Ex definitione IV. immediate sequitur, ut omnis aequatio primi gradus (ubi nullae radicales non necessariae occurrunt) irreductibilis est.

§. 7.

Inter omnes radicales, quae in aequatione

$$\varphi(x^r, n) = 0$$

occurrunt, una ad minimum est, quae sub nullam aliam radicem est subjuncta; quamque in sequentibus *exteriorem* appellabimus. Sit haec radicalis $\sqrt[\mu]{}$; sitque w radix quaedam imaginaria aequationis $z^\mu - 1 = 0$. Si in $\varphi(x^r, n)$ loco $\sqrt[\mu]{}$ successive substituuntur

$$w\sqrt[\mu]{}, \quad w^2\sqrt[\mu]{}, \quad w^3\sqrt[\mu]{}, \quad \dots\dots \quad w^{\mu-1}\sqrt[\mu]{},$$

atque inde fluunt hae expressiones

$$\varphi^1(x^r, n), \quad \varphi^{(2)}(x^r, n), \quad \varphi^{(3)}(x^r, n), \quad \dots\dots \quad \varphi^{(\mu-1)}(x^r, n).$$

Productum

$$\varphi(x^r, n)\cdot\varphi^1(x^r, n)\cdot\varphi^{(2)}(x^r, n)\cdot\varphi^{(3)}(x^r, n)\dots\dots\varphi^{(\mu-1)}(x^r, n)$$

per

$$\mathfrak{P}\cdot\varphi(x^r, n)$$

signabimus.

§. 8.

His jam propositis, theoremata sequentia licet demonstrare:

Theor. I. Sit expressio quaedam

$$15. \quad t_0 + t_1 y_1^{\frac{1}{\mu}} + t_2 y_1^{\frac{2}{\mu}} + \dots + t_{\mu-1} y_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

ad simplicissimam suam formam redacta [11]) *(ubi igitur t_0, t_1, t_2, etc.*

[11]) i. e. ita, ut radicibus numero paucioribus non exprimi possit, igiturque $y_1^{\frac{1}{\mu}}$ nullo modo rationaliter in y_1, t_0, t_1, t_2 etc.

eadem permanent, si $w^r y_1^{\frac{1}{\mu}}$ loco $y_1^{\frac{1}{\mu}}$ substituuntur, exsistente w radice imaginaria aequationis $z^\mu - 1 = 0$): non potest expressio illa nihilo aequalis esse, nisi singulae coëfficientes per se evanescunt; i. e. aequatio hujus formae

$$t_0 + t_1 y_1^{\frac{1}{\mu}} + t_2 y_1^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + t_{\mu-1} y_1^{\frac{\mu-1}{\mu}} = 0$$

separatim praebet necessario:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad \ldots \quad t_{\mu-1} = 0.$$

Demonstr. 1) Posito non omnes coëfficientes t_0, t_1, t_2, ... $t_{\mu-1}$ evanescere. Sit $y_1^{\frac{1}{\mu}} = z$; tunc erit ab ipso z his duabus aequationibus satisficiendum:

$$16. \quad z^\mu - y_1 = 0 \quad \text{et} \quad t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + t_3 z^3 + \ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} = 0,$$

quas igitur divisorem communem habere necesse est. Sit hic factor

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots + z^n = 0,$$

exsistentibus s_0, s_1, s_2 etc. ipsorum y_1, t_0, t_1, t_2 etc. functionibus rationalibus; qui si reductibilis est, habet tamen factorem quendam irreductibilem

$$17. \quad s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \ldots + z^k = 0,$$

ubi $k < \mu$ et coëfficientes s'_0, s'_1, s'_2 etc. nullas alias radicales involvunt, quam quae in y_1, t_0, t_1, t_2, etc. occurrunt. Necesse igitur est omnes aequationis (17.) radices utrique aequationum (16.) satisfacere.

2) Est vero in (17.) k necessario > 1; quia si $k = 1$ esset, haberemus

$$z = y_1^{\frac{1}{\mu}} = -s'_0;$$

igiturque $y_1^{\frac{1}{\mu}}$ nullas alias radicales contineret, quam quae in y_1, t_0, t_1, etc. occurrunt; quod tamen suppositioni omnino repugnat, expressionem (15.) ad simplicissimam suam formam esse redactam.

3) Exsistente igitur $k > 1$, sunt quidem ad minimum duae aequationis $z^\mu - y_1 = 0$, quae (17.) satisfaciant, quaeque e natura harum radicum supponi possint esse z et $w^r z$, exsistente $r < \mu$. Debet igitur z aequationibus

$$s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \ldots + z^k = 0 \quad \text{et} \quad s'_0 + s'_1 w^r z + s'_2 w^{2r} z^2 + \ldots + w^{kr} z^k = 0$$

satisfacere, igiturque utrique harum

$$s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \ldots + z^k = 0,$$

$$(w^r - 1) s'_1 + (w^{2r} - 1) s'_2 z + (w^{3r} - 1) s'_3 z^2 + \ldots + (w^{kr} - 1) z^{k-1} = 0,$$

quod tamen impossibile est, supposita priore irreductibili, nisi posterioris sinistrum membrum identice sit nihilo aequale. Hoc vero fieri non potest, siquidem certe factor $w^{kr} - 1$ (exsistente μ numero primo, $k < \mu$ et $r < \mu$) non evanescit.

Necesse igitur est omnes t_0, t_1, t_2, ... $t_{\mu-1}$ separatim evanescere.

Q. E. D.

Theor. II. *Si aequationi cuidam irreductibili*

$$18. \quad \varphi(x^r, m) = 0$$

expressio algebraica a_n satisfaciat, quae ad simplicissimam suam formam redacta, radicalem quandam $h^{\frac{1}{\mu_1}}$ continet, quae non in aequatione (18.) occurrit: erit eidem aequationi per a'_n satisfactum, ubi per a'_n designamus quod ex a_n resultat, si pro $h^{\frac{1}{\mu_1}}$ substituitur $w^k h^{\frac{1}{\mu_1}}$ (exsistente w radice imaginaria aequationis $z^{\mu_1} - 1 = 0$, atque k numero quolibet integro).

Demonstr. Quandoquidem $\varphi(x^r, m)$ exacte per $x - a_n$ dividi potest, facile patet, exsistere revera functionem quandam $f(x)$, respectu x integram, talem ut sit identice

$$19. \quad (x - a_n) f(x) = \varphi(x^r, m).$$

Substituatur jam in (19.) $w^k h^{\frac{1}{\mu_1}}$ pro $h^{\frac{1}{\mu_1}}$; qua substitutione $f(x)$ in $f_1(x)$ abeat. Cum autem in $\varphi(x^r, m)$ radicalis $h^{\frac{1}{\mu_1}}$ non occurrat, (quod nihil aliud sibi vult, quam h ibi rationaliter contineri) sequitur ut, $\varphi(x^r, m)$ immutato manente, habeamus

$$(x - a'_n) f_1(x) = \varphi(x^r, n);$$

unde patet aequationi (18.) $x = a'_n$ etiam satisfacere.

Q. E. D.

Corollar. *Si aequationi irreductibili* 0^{ti} *ordinis*

$$x^\mu + p x^{\mu-1} + q x^{\mu-2} + \ldots + t x + u = 0,$$

$x = a_n$ satisfacit; satisfaciet ei etiam quod ex a_n resultat, si singulis quotlibet radicalibus valores, qui earum sunt, quoslibet tribuuntur.

Theor. III. *Sit*

$$20. \quad \varphi(x^r, m) = 0$$

aequatio quaedam irreductibilis r^{ti} gradus et m^{ti} ordinis, et

$$\varphi(x^s, n) = 0$$

aequatio quaedam s^{ti} gradus et n^{ti} ordinis, cujus coëfficientes nullas alias radicales involvunt, quam quae in coëfficientibus ipsius $\varphi(x^r, m)$ occurrunt (id quod postulat ut sit $n = < m$): si aequationes

$$\varphi(x^r, m) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x^s, n) = 0$$

vel unam tantum radicem communem habent, non potest fieri quin $\varphi(x^s, n)$ exacte per $\varphi(x^r, m)$ divisibilis sit.

Demonstr. 1) Cum sit aequatio (20.) irreductibilis, et $m = > n$, necesse est ut s non minor sit quam r. Nam si esset $s < r$, aequatio

$\varphi(x^s, n) = 0$ nullam omnino radicem communem habere posset cum aequatione $\varphi(x^r, m) = 0$, quippe cum haec irreductibilis sit. 2) Est igitur $s =\!> r$; tunc vero, facta divisione, habebimus

$$\varphi(x^s, n) = f(x) \cdot \varphi(x^r, m) + \varphi(x^\varrho, m'),$$

ubi $\varrho < r$ et $m' =\!< m$. Cum vero pro valore quodam ipsius x habemus simul

$$\varphi(x^s, n) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x^r, m) = 0,$$

non potest fieri, quin pro eodem valore habeamus

$$\varphi(x^r, m) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x^\varrho, m') = 0,$$

quod tamen (exsistente $\varphi(x^r, m) = 0$ irreductibili. et $\varrho < r$, $m' =\!< m$) impossibile est, nisi $\varphi(x^\varrho, m')$ identica modo evanescat. Habebimus igitur

$$\varphi(x^s, n) = f(x) \cdot \varphi(x^r, m).$$

Q. E. D.

Corollar. *Si $s = r$, fit $f(x) = 1$* [12]*, et $\varphi(x^r, n) = \varphi(x^r, m)$. Si igitur aequatio quaedam $\varphi(x^r, n) = 0$, cujus coëfficientes nullas alias radicales involvunt, quam quae in coëfficientibus aequationis cujusdam irreductibilis ejusdem gradus $\varphi(x^r, m) = 0$ occurrunt, radicem aliquam cum hac aequatione communem habet, hae duae aequationes non possunt non omnino identicae esse.*

Theor. IV. *Sit $\sqrt[\mu]{}$ radix quaedam exterior in aequatione $\varphi(x^r, m) = 0$, designeturque per $\varphi'(x^r, m)$ quod ex $\varphi(x^r, m)$ fit, si pro $\sqrt[\mu]{}$ substituitur $w^k \sqrt[\mu]{}$, exsistente w radice imaginaria aequationis $z^\mu - 1 = 0$; si $\varphi(x^r, m) = 0$ irreductibilis est, est etiam aequatio $\varphi'(x^r, m) = 0$ irreductibilis.*

Demonstr. Supponatur $\varphi'(x^r, m) = 0$ reductibilis; tunc factorem quendam necessario habet $\varphi'(x^\varrho, m')$, ubi $\varrho < r$ et $m' =\!< m$, ita ut sit identice

$$\varphi'(x^r, m) = f(x) \cdot \varphi'(x^\varrho, m').$$

Designetur jam per

$$f_1(x) \quad \text{et} \quad \varphi'_1(x^\varrho, m')$$

quod ex $f(x)$ et $\varphi'(x^r, m')$ fit, si pro $\sqrt[\mu]{}$ substituitur $w^{-k} \sqrt[\mu]{}$, qua substitutione nullae novae radicales coëfficientibus inseruntur, igiturque coëfficientes ipsorum $f_1(x)$ et $\varphi'_1(x^\varrho, m')$ non alio modo irrationales sunt quam coëfficientes ipsorum $f(x)$ et $\varphi'(x^\varrho, m')$ [13]. Cum vero hac substitutione $\varphi'(x^r, m)$ in $\varphi(x^r, m)$

---

[12]) Observandum quod in notula (9) de coëfficiente primi termini in $\varphi(x^r, n) = 0$ dictum est.

[13]) Vide quod in notula (9) dictum est.

redeat, esset utique

$$\varphi(x^r, m) = f_1(x)\cdot\varphi'_1(x^r, m'),$$

quod tamen impossibile est, exsistente $\varphi(x^r, m)$ irreductibili. Sunt igitur $\varphi(x^r, m) = 0$ et $\varphi'(x^r, m) = 0$ uno irreductibiles.

Q. E. D.

Theor. V. Sit in aequationibus

$$\varphi(x^s, n) = 0, \quad \varphi(x^r, m) = 0,$$

$m > n$, exsistentibus de cetero his aequationibus omnino ejusmodi, quales in theoremate III. supponuntur; sit porro $\sqrt[\mu]{}$ radix quaedam exterior in $\varphi(x^r, m)$, quae in $\varphi(x^s, n)$ non occurrit; si $\varphi(x^s, n)$ per $\varphi(x^r, m)$ est divisibilis, potest etiam $\varphi(x^s, n)$ per $\mathfrak{P}.\,\varphi(x^r, m)$ exacte dividi (pertinente signo $\mathfrak{P}.$ ad radicem illam $\sqrt[\mu]{}$); i. e. si

$$21. \quad \varphi(x^s, n) = f(x)\cdot\varphi(x^r, m),$$

est etiam

$$\varphi(x^s, n) = \psi(x)\cdot\mathfrak{P}.\,\varphi(x^r, m).$$

Demonstr. 1) Si in formula (21) pro $\sqrt[\mu]{}$ successive substituitur [14])

$$w\sqrt[\mu]{}, \quad w^2\sqrt[\mu]{}, \quad w^3\sqrt[\mu]{}, \quad \ldots\ldots \quad w^{\mu-1}\sqrt[\mu]{}$$

et quod his substitutionibus ex $\varphi(x^r, m)$ resultat per

$$22. \quad \varphi^1(x^r, m), \quad \varphi^{(2)}(x^r, m), \quad \varphi^{(3)}(x^r, m), \quad \ldots\ldots \quad \varphi^{(\mu-1)}(x^r, m)$$

designatur, facile patet, cum his substitutionibus sinistrum aequationis (21.) membrum immutatum maneat, hoc etiam divisibile esse per unamquamque ex expressionibus (22.).

2) Inde vero sequitur, ut $\varphi(x^s, n)$ etiam per productum $\mathfrak{P}.\,\varphi(x^r, m)$ divisibile sit, nisi forte ex $\varphi(x^r, m)$, $\varphi^1(x^r, m)$, $\varphi^{(2)}(x^r, m)$ etc. duo quaedam factore communi gaudeant. Hoc tamen fieri non potest, cum singulae expressiones (22.) irreductibiles sunt (theor. IV.) [15]), nisi (ex coroll. theor. III.) duae illae expressiones omnino sint identicae, quod tamen impossibile est. Est igitur

$$\varphi(x^s, n) = \psi(x)\cdot\mathfrak{P}.\,\varphi(x^r, m).$$

Q. E. D.

---

[14]) Exsistente w radice imaginaria aequationis $x^\mu - 1 = 0$.

[15]) Brevitatis causa expressionem $\varphi(x^r, m)$ irreductibilem, cum aequatio

$$\varphi(x^r, m) = 0$$

irreductibilis est.

Theor. VI. Si aequatio

$$23. \quad \varphi(x^r, m) = 0$$

irreductibilis est, est etiam

$$\mathfrak{p}.\, \varphi(x^r, m) = \varphi(x^{\mu r}, m') = 0$$

irreductibilis, exsistente in (23.) $\sqrt[\mu]{}$ *radice exteriore.*

Demonstr. Si $\varphi(x^{\mu r}, m') = 0$ reductibilis est, sit

$$24. \quad \varphi(x^n, m'') = 0, \quad [n < \mu r,\ m'' = < m']$$

aequatio irreductibilis, quae radicem quandam communem $\varphi(x^r, m) = 0$ habet. Tunc vero (ex Theor. III. et V.) aequationem (24.) divisibilem esse necesse est per $\mathfrak{p}.\, \varphi(x^r; m)$, ita ut sit

$$\varphi(x^n, m'') = f(x) \cdot \mathfrak{p}.\, \varphi(x^r, m) = f(x) \cdot \varphi(x^{\mu r}, m'),$$

quod tamen impossibile est, exsistente $n < \mu r$. Fit igitur $\mathfrak{p}.\, \varphi(x^r, m) = \varphi(x^{\mu r}, m') = 0$ irreductibilis.

Q. E. D.

Theor. VII. In expressione algebraica (nullas radicales non necessarias involvente), quae aequationi cuidam irreductibili satisfaciat, exponens radicalis exterioris divisor numeri est, qui ipsius aequationis gradum designat.

Demonstr. Sit aequatio irreductibilis, de qua agitur,

$$F(x) = x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots + tx + u = 0,$$

cui satisfaciat expressio m^{ti} ordinis

$$f\left(y_1^{\frac{1}{\mu_1}}, y_2^{\frac{1}{\mu_2}}, \ldots\, y_m^{\frac{1}{\mu_m}}\right) = a_m.$$

Sit in hac expressione $y_1^{\frac{1}{\mu_1}}$ radicalis exterior; tunc $F(x)$ divisibile est non solum per $x - a_m$, sed etiam per [16])

$$25. \quad \mathfrak{p}.\,(x - a_m) = \varphi(x^{\mu_1}, m_1),$$

pertinente signo $\mathfrak{p}$ ad radicalem $y_1^{\mu_1}$. Facile vero patet, $\varphi(x_1^{\mu_1}, m_1)$ unam saltem radicalem minus quam a_m continere, nimirum $y_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, igiturque esse $m_1 < m$. Sit jam inter radicales, quae in (25.) restant, $y_n^{\frac{1}{\mu_n}}$ exterior. Cum $\varphi(x^{\mu_1}, m_1)$ irreductibilis est, sequitur ut $F(x)$ non tantum per $\varphi(x^{\mu_1}, m_1)$ sit divisibilis,

---

[16]) Vide Theor. V.

sed etiam per

$$26.\qquad \mathfrak{p}.\,\varphi(x^{\mu_1}, m_{,}) = \varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n}, m_{,,}),$$

pertinente signo $\mathfrak{p}$ ad radicem $y_n^{\frac{1}{\mu_n}}$. Jam vero de $\varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n}, m_{,,})$ pro certo habemus, unam saltem minus ibi occurrere radicalem, quam in $\varphi(x^{\mu_1}, m_{,})$ (radicalis certe $y_n^{\frac{1}{\mu_n}}$ deest), igiturque esse

$$m_{,,} < m_{,} < m.$$

Ponatur jam porro inter radicales quae in (26.) restant, $y_r^{\frac{1}{\mu_r}}$ exterior; ex irreductibilitate ipsius $\varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n}, m_{,,})$ concludi licet, $F(x)$ non tantum per $\varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n}, m_{,,})$ esse divisibilem, sed etiam per expressionem

$$27.\qquad \mathfrak{p}.\,\varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n}, m_{,,}) = \varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n \cdot \mu_r}, m_{,,,}),$$

quae unam saltem radicalem minus quam (26.) continet; unde fit

$$m_{,,,} < m_{,,} < m_{,} < m.$$

Si vero tali modo identidem continuatur, non potest fieri quin postremo ad expressionem nexio quam rationalem et irreductibilem

$$\varphi(x^{\mu_1 \cdot \mu_n \cdot \mu_r \cdots \mu_s}, 0)$$

sit perveniendum, quae exacte dividit $F(x)$, cujusque igitur gradus non potest superare gradum ipsius $F(x)$. Habemus igitur

$$\mu_1 . \mu_n . \mu_r \ldots . \mu_s \leqq n.$$

Si autem

$$\mu_1 . \mu_n . \mu_r \ldots . \mu_s < n$$

esset, $F(x)$ factorem quendam rationalem inferioris gradus haberet, id quod irreductibilitati ipsius $F(x)$ omnino repugnat. Necessarium igitur est

$$n = \mu_1 . \mu_n . \mu_r \ldots . \mu_s,$$

igiturque n per μ_1 divisibilis.

Q. E. D.

Corollar. ***Si aequatio algebraica est μ^{ti} gradus, exsistente μ numero primo, facile patet, in expressione algebraica, quae huic aequationi satisfaciat, nullas alias radicales exteriores occurrere posse, quam quae exponentem μ habent.***

§. 9.

His omnibus demonstratis, proposita jam sit aequatio irreductibilis μ^{ti} gradus

$$28.\qquad x^{\mu} + px^{\mu-1} + qx^{\mu-2} + \ldots . + tx + u = 0,$$

exsistente μ numero primo. Si haec aequatio algebraice resolubilis sit, satis-

faciat ei necesse est expressio quaedam, quae sub forma generali expressionum algebraicarum, i. e. sub forma generali expressionis algebraicae n^{ti} ordinis, subsummari potest. Ex vero theoremate VII. sequitur, ut in hac expressione $\sqrt[\mu]{}$ unica sit radix exterior; igitur si aequatio (28.) algebraice resolubilis sit, necesse est, valorem ipsius x hanc formam habere:

$$29. \quad x = a_0 + a_1 \cdot s^{\frac{1}{\mu}} + a_2 \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + a_{\mu-1} \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

(ubi nullas radicales non necessarias occurrere supponimus), exsistentibus a_0, a_1, a_2, ... $a_{\mu-1}$ et s algebraicis coëfficientium p, q, ... t, u functionibus.

Jam vero primum demonstrabimus, *esse omnes a_0, a_1, a_2, ... $a_{\mu-1}$ functiones rationales ipsius s et coëfficientium p, q, ... t, u.* Nam ponatur contrarium; tunc in a_0, a_1, a_2, ... $a_{\mu-1}$ exsistat necesse est radicalis quaedam, quae in s non occurrit, cujus vero exponens non potest fieri quin sit μ (ex coroll. Th. VII.). Posita hac radicali $h^{\frac{1}{\mu}}$, sit

$$a_0 = c_0^{(0)} + c_1^{(0)} h^{\frac{1}{\mu}} + c_2^{(0)} h^{\frac{2}{\mu}} + \dots + c_{\mu-1}^{(0)} h^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$a_1 = c_0^{(1)} + c_1^{(1)} h^{\frac{1}{\mu}} + c_2^{(1)} h^{\frac{2}{\mu}} + \dots + c_{\mu-1}^{(1)} h^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

$$a_2 = c_0^{(2)} + c_1^{(2)} h^{\frac{1}{\mu}} + c_2^{(2)} h^{\frac{2}{\mu}} + \dots + c_{\mu-1}^{(2)} h^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

. . . .

seu in genere

$$30. \quad a_k = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} h^{\frac{1}{\mu}} + c_2^{(k)} h^{\frac{2}{\mu}} + \dots + c_{\mu-1}^{(k)} h^{\frac{\mu-1}{\mu}} = \overset{i=\mu-1}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}} c_i^{(k)} h^{\frac{i}{\mu}}.$$

Si porro per $a_k(w)$ designemus quod ex a_k fit, si $w h^{\frac{1}{\mu}}$ [17]) loco $h^{\frac{1}{\mu}}$ ibi substituimus i. e.

$$31. \quad a_k(w) = \overset{i=\mu-1}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}} c_i^{(k)} w^i h^{\frac{i}{\mu}},$$

sequitur ex theoremate II. ut

$$32. \quad a_0(w) + a_1(w) \cdot s^{\frac{1}{\mu}} + a_2(w) \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + a_{\mu-1}(w) \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

radix quaedam sit aequationis (28.). Ex eodem vero theoremate habemus has diversas aequationis (28.) radices

---

17) Exsistente w radice imaginaria aequationis $w^\mu - 1 = 0$.

$$33.\quad\begin{cases} x_1 = a_0 + a_1\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + a_2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + a_{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\ x_2 = a_0 + a_1 w\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + a_2 w^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + a_{\mu-1} w^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\ x_3 = a_0 + a_1 w^2\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + a_2 w^4\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + a_{\mu-1} w^{2(\mu-1)}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_\mu = a_0 + a_1 w^{\mu-1}\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + a_2 w^{2(\mu-1)}\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + a_{\mu-1} w^{(\mu-1)(\mu-1)}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \end{cases}$$

quae radices, cum non plures quam μ esse possint, sequitur ut radix illa (32.) inter has μ radices sit quaerenda. Exsistat igitur necesse est talis $r<\mu$, ut sit

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{k=\mu-1} a_k w^{kr}\cdot s^{\frac{k}{\mu}} = \mathop{\mathrm{S}}_{k=0}^{k=\mu-1} a_k(w)\cdot s^{\frac{k}{\mu}},$$

unde ex theoremate I.

$$w^{kr} a_k = a_k(w)$$

seu ex formulis (30.) et (31.)

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=0}^{i=\mu-1} c_i^{(k)} w^{kr}\cdot h^{\frac{i}{\mu}} = \mathop{\mathrm{S}}_{i=0}^{i=\mu-1} c_i^{(k)} w^i\cdot h^{\frac{i}{\mu}},$$

atque inde (theor. I.)

$$c_i^{(k)}(w^{kr}-w^i) = 0,$$

quod necessario postulat ut sint omnes $c_i^k = 0$, praeter illud unicum, quod per $C^{(k)}$ signabimus, ubi i talis est, ut $kr - i \equiv 0$ (mod. μ). Hinc vero sequitur ut sit

$$a_k = C^{(k)}\cdot h^{\frac{i}{\mu}}\ (kr - i \equiv 0,\ \text{mod.}\ \mu),$$

$$\text{i. e.}\quad a_k = A_k(h^r)^{\frac{k}{\mu}}$$

(ubi in A_k non nisi integrae dignitates ipsius h occurrunt); quod vero in (29.) ductum praeberet

$$34.\quad x = A_0 + A_1(h^r)^{\frac{1}{\mu}}\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + A_2(h^r)^{\frac{2}{\mu}}\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + A_{\mu-1}(h^r)^{\frac{\mu-1}{\mu}}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

quod tamen suppositioni illi omnino repugnat esse in (29.) $s^{\frac{1}{\mu}}$ radicalem necessariam [18]). Non potest igitur in a_0, a_1, a_2, ... $a_{\mu-1}$ ulla radicalis occurrere, quae non in s occurrit, seu, quod idem valet, non potest fieri quin in expressione (29.) (igiturque etiam in expressionibus (33.)) omnes a_0, a_1, a_2, ... $a_{\mu-1}$ functiones rationales sint ipsius s et coëfficientium $p, q, \dots t, u$.

[18]) In memoriam est revocandum, quamquam

$$a+\sqrt{(bc)} = a+\sqrt{b}\cdot\sqrt{c},$$

tamen neque $\sqrt{b}$ neque $\sqrt{c}$ radicalem necessariam esse, sed unicam illam radicalem $\sqrt{(bc)}$ esse necessariam.

Cujus rei jam facta demonstratione, cum praeterea ex (33.) addendo eruitur

$$35.\qquad \mu a_0 = x_1+x_2+x_3+\dots+x_\mu = -p$$

hoc proponere possumus

Theor. VIII. ***Si aequatio irreductibilis μ^{ti} gradus***

$$36.\qquad x^\mu+px^{\mu-1}+qx^{\mu-2}+\dots+tx+u = 0,$$

exsistente μ numero primo integro, algebraice sit resolubilis, radices hujus aequationis erunt

$$37.\begin{cases} x_1 = -\frac{p}{\mu}+\varphi_1(s)\cdot s^{\frac{1}{\mu}}+\varphi_2(s)\cdot s^{\frac{2}{\mu}}+\dots+\varphi_{\mu-1}(s)\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ x_2 = -\frac{p}{\mu}+\varphi_1(s)w\cdot s^{\frac{1}{\mu}}+\varphi_2(s)w^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}}+\dots+\varphi_{\mu-1}(s)w^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ x_3 = -\frac{p}{\mu}+\varphi_1(s)w^2\cdot s^{\frac{1}{\mu}}+\varphi_2(s)w^4\cdot s^{\frac{2}{\mu}}+\dots+\varphi_{\mu-1}(s)w^{2(\mu-1)}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_\mu = -\frac{p}{\mu}+\varphi_1(s)w^{\mu-1}\cdot s^{\frac{1}{\mu}}+\varphi_2(s)w^{2(\mu-1)}\cdot s^{\frac{2}{\mu}}+\dots+\varphi_{\mu-1}w^{(\mu-1)(\mu-1)}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \end{cases}$$

ubi s functio quaedam algebraica est coëfficientium $p, q, \dots t, u$, atque $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ... $\varphi_{\mu-1}(s)$ functiones rationales ipsius s et harum coëfficientium.

§. 10.

Jam propius examinemus expressiones (37.), quae quidem tunc etiam aequationi (36.) satisfacient (Theor. II.), si radicalibus quotlibet in s valores, qui earum sunt, quoslibet tribuimus. Cum autem huic aequationi non plures quam μ radices sint, non potest fieri ut novas hujus aequationis radices ita habeamus, quae non inter (37.) inveniuntur. Quare si per s' designamus quod ex s fit, si radicalibus quotlibet ibi occurrentibus alios quosdam, qui earum sunt, valores tribuimus, exsistat necesse est talis aequationis $2^\mu-1=0$ radix imaginaria w_ν, ut sit

$$38.\qquad -\frac{p}{\mu}+\varphi_1(s')w^\nu s'^{\frac{1}{\mu}}+\varphi_2(s')w^{2\nu}\cdot s'^{\frac{2}{\mu}}+\dots+\varphi_{\mu-1}(s')w^{(\mu-1)\nu}\cdot s'^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$
$$= -\frac{p}{\mu}+\varphi_1(s)w_\nu\cdot s^{\frac{1}{\mu}}+\varphi_2(s)w_\nu^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}}+\dots+\varphi_{\mu-1}(s)w_\nu^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

unde, ponendo successive

$$\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ \mu-1,$$

habebimus, sublato termino $-\frac{p}{\mu}$:

$$39. \quad \begin{cases} \varphi_1(s')\cdot s'^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s')\cdot s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s')\cdot s'^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = \varphi_1(s)w_0\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s)w_0^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s)w_0^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \varphi_1(s')w\cdot s'^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s')w^2\cdot s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s')w^{\mu-1}\cdot s'^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = \varphi_1(s)w_1\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s)w_1^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s)w_1^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \varphi_1(s')w^2\cdot s'^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s')w^4\cdot s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s')w^{2(\mu-1)}\cdot s'^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = \varphi_1(s)w_2\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s)w_2^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s)w_2^{\mu-1}\, s^{\frac{\mu-1}{\mu}}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_1(s')w^{\mu-1}\cdot s'^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s')w^{2(\mu-1)}\cdot s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s')w^{(\mu-1)(\mu-2)}\cdot s'^{\frac{\mu-1}{\mu}} \\ = \varphi_1(s)w_{\mu-1}\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s)w_{\mu-1}^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s)w_{\mu-1}^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}. \end{cases}$$

Quod ad s' adtinet facile patet, non plures (quamquam fortasse alias) ibi contineri posse radicales quam s.

Jam vero ex (39.) valorem ipsius $\mu\varphi_r(s')s'^{\frac{r}{\mu}}$ quaeramus. Quem in finem multiplicemus formulam secundam per w^{-r}, tertiam per w^{-2r}, quartam per w^{-3r}, et sic porro. Additione instituta obtinebimus

$$40. \quad \mu\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}} = \varphi_1(s)\cdot s^{\frac{1}{\mu}}\{w_0 + w_1\cdot w^{-r} + w_2\cdot w^{-2r} + \ldots + w_{\mu-1}\cdot w^{-(\mu-1)r}\}$$
$$+ \varphi_2(s)\cdot s^{\frac{2}{\mu}}\{w_0^2 + w_1^2\cdot w^{-r} + w_2^2\cdot w^{-2r} + \ldots + w_{\mu-1}^2\cdot w^{-(\mu-1)r}\}$$
$$+ \varphi_3(s)\cdot s^{\frac{3}{\mu}}\{w_0^3 + w_1^3\cdot w^{-r} + w_2^3\cdot w^{-2r} + \ldots + w_{\mu-1}^3\cdot w^{-(\mu-1)r}\}$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ \varphi_{\mu-1}(s)\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\{w_0^{\mu-1} + w_1^{\mu-1}\cdot w^{-r} + w_2^{\mu-1}\cdot w^{-2r} + \ldots + w_{\mu-1}^{\mu-1}\cdot w^{-(\mu-1)r}\}$$

seu, brevitatis causa posito

$$41. \quad N(k,r) = w_0^k + w_1^k\cdot w^{-r} + w_2^k\cdot w^{-2r} + \ldots + w_{\mu-1}^k\cdot w^{-(\mu-1)r},$$

$$\mu\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}}$$
$$= N(1,r)\cdot\varphi_1(s)\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + N(2,r)\cdot\varphi_2(s)\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + N(\mu-1,r)\cdot\varphi_{\mu-1}(s)\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

id est

$$42. \quad \mu\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}} = \sum_{i=1}^{i=\mu-1} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot s^{\frac{i}{\mu}},$$

exsistente $\varphi_i(s)$ functione quadam rationali ipsius s et coëfficientium aequationis (36.).

Elevemus utrumque formulae (42.) membrum ad μ; unde fit

$$43.\quad (\mu\varphi_r(s'))^\mu \cdot s'^r = b_0 + b_1 s^{\frac{1}{\mu}} + b_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + b_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}} = M,$$

ubi vero, si M ad simplicissimam suam formam est redacta, facile patet omnes $b_1, b_2, \dots b_{\mu-1}$ nihilo aequales esse. Nam si ponatur contrarium, expressio

$$b_0 + b_1 s^{\frac{1}{\mu}} + b_2 s^{\frac{1}{\mu}} + \dots + b_{\mu-1} s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

quippe quae aequalis sit $(\mu\varphi_r(s'))^\mu s'^r$ (ubi non plures radicales quam in s occurrere potest), radicalibus numero paucioribus exprimi posset, igiturque ad simplicissimam suam formam non esset redacta. Exsistentibus igitur in M:

$$b_1 = b_2 = b_3 = \dots = b_{\mu-1} = 0,$$

si aequationem

$$44.\quad z^\mu - M = 0$$

consideramus, quae factorem habet

$$45.\quad z - \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\varphi_i(s)\cdot s^{\frac{i}{\mu}},$$

manifestum est, in (45.) occurrere radicalem $s^{\frac{1}{\mu}}$, quae non in aequatione (44.) occurrit; unde ex theoremate V. sequitur, ut $z^{\mu'} - M$ etiam per

$$\mathfrak{p}.(z - \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\varphi_i(s)\cdot s^{\frac{i}{\mu}})$$

exacte dividi possit, quod tamen fieri non potest, nisi aequatio

$$46.\quad \mathfrak{p}.(z - \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\varphi_i(s)\cdot s^{\frac{i}{\mu}}) = 0$$

(pertinente signo $\mathfrak{p}.$ ad $s^{\frac{1}{\mu}}$) cum (44.) omnino est identica. Sunt autem radices aequationis (44.):

$$47.\quad \mu\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}},\ \mu\cdot w\cdot\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}},\ \mu\cdot w^2\cdot\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}},\ \dots\ \mu\cdot w^{\mu-1}\cdot\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}},$$

atque radices aequationis (46.):

$$48.\quad \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot s^{\frac{i}{\mu}},\ \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot w^i\cdot s^{\frac{i}{\mu}},\ \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot w^{2i}\cdot s^{\frac{i}{\mu}},$$
$$\dots\ \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot w^{(\mu-1)i}\cdot s^{\frac{i}{\mu}}.$$

Quae cum ita sint, ex identitate aequationum (44.) et (46.) sequitur, ut unaquaeque ex μ quantitatibus (47.) correspondentem et secum identicam inter μ quantitates (48.) habeat. Exsistat igitur necesse est talis $\nu_r < \mu$, ut sit

$$49.\quad w^{\nu_r}\mu\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}} = \overset{i=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot w^i\cdot s^{\frac{i}{\mu}},$$

quod cum (42.) comparatum praebet

$$w^{\nu_r}\,\underset{i=1}{\overset{i=\mu-1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot s^{\frac{i}{\mu}} = \underset{i=1}{\overset{i=\mu-1}{\mathrm{S}}} N(i,r)\cdot\varphi_i(s)\cdot w^i\cdot s^{\frac{i}{\mu}},$$

unde ex theoremate I.

$$N(1,r)\cdot w^{\nu_r}\cdot\varphi_1(s) = N(1,r)\cdot w\cdot\varphi_1(s),$$
$$N(2,r)\cdot w^{\nu_r}\cdot\varphi_2(s) = N(2,r)\cdot w^2\cdot\varphi_2(s),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$N(\nu_r-1,r)\cdot w^{\nu_r}\cdot\varphi_{\nu_r-1}(s) = N(\nu_r-1,r)\cdot w^{\nu_r-1}\cdot\varphi_{\nu_r-1}(s),$$
$$N(\nu_r,r)\cdot w^{\nu_r}\cdot\varphi_{\nu_r}(s) = N(\nu_r,r)\cdot w^{\nu_r}\cdot\varphi_{\nu_r}(s),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$N(\mu-1,r)\cdot w^{\nu_r}\cdot\varphi_{\mu-1}(s) = N(\mu-1,r)\cdot w^{\mu-1}\cdot\varphi_{\mu-1}(s),$$

atque igitur

$$\varphi_1(s)\cdot N(1,r)=0,\quad \varphi_2(s)\cdot N(2,r)=0,\quad \dots\quad \varphi_{\nu_r-1}(s)\cdot N(\nu_r-1,r)=0,$$
$$\varphi_{\nu_r+1}(s)\cdot N(\nu_r+1,r)=0,\quad \dots\dots\dots\quad \varphi_{\mu-1}(s)\cdot N(\mu-1,r)=0.$$

Quod vero in (42.) ductum praebet

$$50.\qquad \mu\varphi_r(s')\cdot s'^{\frac{r}{\mu}} = N(\nu_r,r)\cdot\varphi_{\nu_r}(s)\cdot s^{\frac{\nu_r}{\mu}}.$$

Hinc vero, si successive

$$r = 1,2,3,\dots\mu-1$$

facimus, obtinebimus

$$51.\quad\begin{cases} \mu\varphi_1(s')\cdot s'^{\frac{1}{\mu}} = N(\nu_1,1)\cdot\varphi_{\nu_1}(s)\cdot s^{\frac{\nu_1}{\mu}}, \\ \mu\varphi_2(s')\cdot s'^{\frac{2}{\mu}} = N(\nu_2,2)\cdot\varphi_{\nu_2}(s)\cdot s^{\frac{\nu_2}{\mu}}, \\ \mu\varphi_3(s')\cdot s'^{\frac{3}{\mu}} = N(\nu_3,3)\cdot\varphi_{\nu_3}(s)\cdot s^{\frac{\nu_3}{\mu}}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu\varphi_{\mu-1}(s')\cdot s'^{\frac{\mu-1}{\mu}} = N(\nu_{\mu-1},\mu-1)\cdot\varphi_{\nu_{\mu-1}}(s)\cdot s^{\frac{\nu_{\mu-1}}{\mu}}, \end{cases}$$

unde addendo, adjuvante prima formularum (39.):

$$52.\quad \mu\Big\{\varphi_1(s)\cdot w_0\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s)\cdot w_0^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + \varphi_{\nu_p}(s)\cdot w_0^{\nu_p}\cdot s^{\frac{\nu_p}{\mu}} + \dots$$
$$\dots + \varphi_{\mu-1}(s)\cdot w_0^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\Big\}$$
$$= N(\nu_1,1)\cdot\varphi_{\nu_1}(s)\cdot s^{\frac{\nu_1}{\mu}} + \dots + N(\nu_p,p)\cdot\varphi_{\nu_p}(s)\cdot s^{\frac{\nu_p}{\mu}} + \dots$$
$$\dots + N(\nu_{\mu-1},\mu-1)\cdot\varphi_{\nu_{\mu-1}}(s)\cdot s^{\frac{\nu_{\mu-1}}{\mu}}.$$

In hac vero formula facile perspicitur, non exsistere duos terminos

$$53.\quad N(\nu_k, k)\cdot\varphi_{\nu_k}(s)\cdot s^{\frac{\nu_k}{\mu}}\quad\text{et}\quad N(\nu_{k'}, k')\cdot\varphi_{\nu_{k'}}(s)\cdot s^{\frac{\nu_{k'}}{\mu}},$$

ubi $\nu_k = \nu_{k'}$, exsistentibus k et k' diversis; quia tunc ex (51.) sequeretur, ut esset

$$\mu\varphi_k(s')\cdot s'^{\frac{k}{\mu}} - \mu\varphi_{k'}(s')\cdot s'^{\frac{k'}{\mu}} = 0,$$

igiturque ex theoremate I.

$$54.\quad \varphi_k(s') = 0\quad\text{et}\quad \varphi_{k'}(s') = 0,$$

quod beneficio (51.) praeberet

$$N(\nu_k k)\cdot\varphi_{\nu_k}(s)\cdot s^{\frac{\nu_k}{\mu}} = 0\quad\text{et}\quad N(\nu_{k'}, k')\cdot\varphi_{\nu_{k'}}(s)\cdot s^{\frac{\nu_{k'}}{\mu}} = 0,$$

unde patet revera non in (52.) exsistere duos illos terminos (53.). Cum igitur in omnibus terminis, qui in dextero aequationis (52.) membro revera exsistunt, diversi omnes sunt numeri

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \dots\ \nu_p,\ \dots\ \nu_{\mu-1},$$

sequitur ex theoremate I., ut in genere sit

$$N(\nu_p, p) = \mu\cdot w_0^{\,p},$$

atque inde

$$55.\quad [N(\nu_p, p)]^\mu = \mu^\mu$$

pro omnibus ipsius p valoribus, pro quibus

$$N(\nu_p, p)\cdot\varphi_{\nu_p}(s)\cdot s^{\frac{\nu_p}{\mu}}$$

seu (quod ex relationibus (51.) idem valet) $\varphi_p(s')$ non evanescit.

Jam vero si formula (50) ad μ elevatur, mutato n in p, obtinebitur beneficio formulae (55.)

$$[\varphi_p(s')]^\mu\cdot s'^p = [\varphi_{\nu_p}(s)]^\mu s^{\nu_p},$$

atque inde, exsistente m numero quolibet integro:

$$56.\quad [(\varphi_p(s'))^\mu\cdot s'^p]^m = [(\varphi_{\nu_p}(s))^\mu\cdot s^{\nu_p}]^m,$$

pro omnibus ipsius p valoribus, pro quibus $\varphi_p(s')$ non evanescit. Paullo vero supra jam in promtu positum est, pro ejusmodi ipsius p valoribus non posse fieri quin ν_p diversos valores $< \mu$ praebeat, si ipsi p diversi tribuantur valores; unde igitur, si per

$$57.\quad k,\ k_{,},\ k_{,,},\ \dots\ k_n$$

omnes ipsius p valores $< \mu$ designemus, pro quibus $\varphi_p(s')$ non evanescit, ex formula (56.) concludi licet, cum $\varphi_p(s')$ et $\varphi_p(s)$ non nisi simul evanescant, omnes

$$\nu_k,\ \nu_{k_,},\ \nu_{k_{,,}},\ \dots\ \nu_{k_n}$$

seriem valorum (57.), quamquam alio ordine, reddere. Quae cum ita sint, necessario, habemus

$$[(\varphi_{\nu_k}(s))^\mu\cdot s^{\nu_k}]^m+[(\varphi_{\nu_{k_{\prime}}}(s))^\mu\cdot s^{\nu_{k_\prime}}]^m+[(\varphi_{\nu_{k_{\prime\prime}}}(s))^\mu\cdot s^{\nu_{k_{\prime\prime}}}]^m+\dots+[(\varphi_{\nu_{k_n}}(s))^\mu\cdot s^{\nu_{k_n}}]^m$$
$$=[(\varphi_k(s))^\mu\cdot s^k]^m+[(\varphi_{k_\prime}(s))^\mu\cdot s^{k_\prime}]^m+\dots+[(\varphi_{k_n}(s))^\mu\cdot s^{k_n}]^m,$$

atque adjuvante formula (56.):

$$[(\varphi_k(s'))^\mu\cdot s'^k]^m+[(\varphi_{k_\prime}(s'))^\mu\cdot s'^{k_\prime}]^m+[(\varphi_{k_{\prime\prime}}(s'))^\mu\cdot s'^{k_{\prime\prime}}]^m+\dots+[(\varphi_{k_n}(s'))^\mu\cdot s'^{k_n}]^m$$
$$=[(\varphi_k(s))^\mu\cdot s^k]^m+[(\varphi_{k_\prime}(s))^\mu\cdot s^{k_\prime}]^m+\dots+[(\varphi_{k_n}(s))^\mu\cdot s^{k_n}]^m,$$

atque denique in genere, evanescentibus $\varphi_p(s)$ et $\varphi_p(s')$ pro ceteris ipsius p valoribus:

$$\overset{p=\mu-1}{\underset{p=1}{\mathrm{S}}}[(\varphi_p(s'))^\mu\cdot s'^p]^m=\overset{p=\mu-1}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}[(\varphi_p(s))^\mu\cdot s^p]^m,$$

seu positis brevitatis causa

$$58.\qquad (\varphi_p(s))^\mu\cdot s^p=R_p \quad\text{et}\quad (\varphi_p(s'))^\mu\cdot s'^p=R'_p:$$

$$59.\qquad \overset{p=\mu-1}{\underset{p=1}{\mathrm{S}}}R'^m_p=\overset{p=\mu-1}{\underset{p=1}{\mathrm{S}}}R^m_p.$$

Jam vero observare licet, respectu ad (58.) habito, radices aequationis (36.) in hac generali formula contineri

$$60.\qquad x=-\frac{p}{\mu}+\sqrt[\mu]{R_1}+\sqrt[\mu]{R_2}+\sqrt[\mu]{R_3}+\dots+\sqrt[\mu]{R_{\mu-1}},$$

ubi de quantitatibus

$$61.\qquad R_1,\ R_2,\ R_3,\ \dots\ R_{\mu-1}$$

demonstravimus esse

$$R_1^m+R_2^m+R_3^m+\dots+R_{\mu-1}^m=R_1'^m+R_2'^m+R_3'^m+\dots+R_{\mu-1}'^m,$$

exsistente μ numero quolibet integro [19]). Est vero in memoriam revocandum esse

$$R'_1,\ R'_2,\ R'_3,\ \dots\ R'_{\mu-1}$$

nihil aliud quam quod ex (61.) resultat, si quibuslibet radicalibus ibi occurrentibus alios quoslibet, qui earum sunt, valores tribuimus. Demonstravimus igitur esse quantitates (61.) ejusmodi et summa ipsarum m^{tarum} dignitatum immutatu maneat, si quaslibet ibi occurrentes radicales supradicto modo mutamus. Hoc vero nihil aliud sibi vult, quam ut coëfficientes aequationis (36.), quarum functio

---

[19]) Hoc tamen non ita est interpretandum, quasi omnino perinde esset, quosnam inter omnes ipsius $\sqrt[\mu]{\ }$ valores in (60.) eligamus. Minime vero: cum diximus radices aequationis (36.) in formula (60.) contineri, nihil aliud dictum voluimus, quam has radices inter valores expressionis (60.) esse quaerendas.

summa illa est, non nisi rationaliter ibi contineantur, i. e. ut summa illa

$$R_1^m + R_2^m + R_3^m + \ldots + R_{\mu-1}^m = S_m$$

rationalis sit functio coëfficientium aequationis (36.).

Ponamus jam

$$R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_{\mu-1} = -A,$$
$$R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + \ldots + R_{\mu-2} \cdot R_{\mu-1} = B,$$
$$R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + \ldots + R_{\mu-3} \cdot R_{\mu-2} \cdot R_{\mu-1} = -C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdots R_{\mu-2} \cdot R_{\mu-1} = T;$$

tunc constat, omnes A, B, C, ... T rationaliter in S_1, S_2, S_3 etc. exprimi posse, igiturque esse functiones rationales coëfficientium aequationis (36.). Cum vero insuper quantitates (61.) (i. e. quantitates sub radice $\sqrt[\mu]{}$ in (60.)) radices diversae sunt aequationis

$$z^{\mu-1} + Az^{\mu-2} + Bz^{\mu-3} + \ldots + T = 0,$$

hoc jam proponere possumus demonstratum

Theor. IX. *Si aequatio irreductibilis μ^{ti} gradus*

$$x^\mu + px^{\mu-1} + qx^{\mu-2} + \ldots + tx + u = 0,$$

exsistente μ numero primo integro, algebraice sit resolubilis, radices ejus hanc formam habebunt

$$x = -\frac{p}{\mu} + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \sqrt[\mu]{R_3} + \ldots + \sqrt[\mu]{R_{\mu-1}},$$

ubi R_1, R_2, R_3, ... $R_{\mu-1}$ radices aequationis $(\mu-1)^{ti}$ gradus sunt, cujus coëfficientes rationaliter ex datae aequationis coëfficientibus sunt formatae.

Quod quidem, comparatione cum iis facta, quae pag. 48 proposita sunt, facile videbis esse 1^{mum} theorema Abelianum.

§. 11.

Beneficio theorematis IX. possumus jam directo modo demonstrare hoc maximi momenti

Theor. X. *Aequatio irreductibilis μ^{ti} gradus, exsistente μ numero primo, non est in genere algebraice resolubilis, si $\mu > 3$ est.*

Demonstratio. Ex theoremate VIII. sequitur, ut radices aequationis sint hujus formae:

$$x_1 = -\frac{p}{\mu} + \varphi_1(s)\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s)\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s)\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$
$$x_2 = -\frac{p}{\mu} + \varphi_1(s) w\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s) w^2\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s) w^{\mu-1}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$
$$x_3 = -\frac{p}{\mu} + \varphi_1(s) w^2\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s) w^4\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s) w^{2(\mu-1)}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_\mu = -\frac{p}{\mu} + \varphi_1(s) w^{\mu-1}\cdot s^{\frac{1}{\mu}} + \varphi_2(s) w^{2(\mu-1)}\cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\mu-1}(s) w^{(\mu-1)(\mu-1)}\cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

unde si secundam harum formularum per w^{-k}, tertiam per w^{-2k}, quartam per w^{-3k} etc. multiplicemus, addendo habebimus

$$\mu\,\varphi_k(s)\cdot s^{\frac{k}{\mu}} = x_1 + w^{-k}x_2 + w^{-2k}x_3 + \ldots + w^{-(\mu-1)k}x_\mu,$$

seu secundum notationem nostram (58.):

$$R_k = \frac{1}{\mu^\mu}\{x_1 + w^{-k}x_2 + w^{-2k}x_3 + \ldots + w^{-(\mu-1)k}x_\mu\},$$

atque inde, si successive $k = 1, 2, 3, \ldots \mu-1$ ponamus,

$$62.\quad \left\{\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{\mu^\mu}\{x_1 + w^{-1}x_2 + w^{-2}x_3 + \ldots + w^{-(\mu-1)}x_\mu\}^\mu,\\
R_2 &= \frac{1}{\mu^\mu}\{x_1 + w^{-2}x_2 + w^{-4}x_3 + \ldots + w^{-2(\mu-1)}x_\mu\}^\mu,\\
R_3 &= \frac{1}{\mu^\mu}\{x_1 + w^{-3}x_2 + w^{-6}x_3 + \ldots + w^{-3(\mu-1)}x_\mu\}^\mu,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_{\mu-1} &= \frac{1}{\mu^\mu}\{x_1 + w^{-(\mu-1)}x_2 + w^{-2(\mu-1)}x_3 + \ldots + w^{-(\mu-1)(\mu-1)}x_\mu\}^\mu.
\end{aligned}\right.$$

Jam vero ex theoremate IX. hanc facile licet derivare conditionem, sine qua aequatio non esse potest algebraice resolubilis: unamquamque rationalem et symmetricam ipsorum R_1, R_2, ... $R_{\mu-1}$ functionem rationalem etiam datae aequationis coëfficientium functionem esse debere, i. e. symmetricam ipsorum x_1, x_2, x_3, ... x_μ functionem. Ad theorema igitur nostrum firmandum sufficit omnino demonstrare expressionem

$$63.\quad R_1\cdot R_2\cdot R_3 \cdots R_{\mu-1},$$

exsistente $\mu > 3$, revera non in genere esse respectu x_1, x_2, ... x_μ symmetricam. Quod ut fiat, multiplicemus formulas (62.); unde erit

$$64.\quad R_1\cdot R_2\cdot R_3 \cdots R_{\mu-1}$$
$$= \frac{1}{\mu^{\mu(\mu-1)}}(x_1 + w^{-1}x_2 + \ldots + w^{-(\mu-1)}x_\mu)^\mu\cdot(x_1 + w^{-2}x_2 + \ldots + w^{-2(\mu-1)}x_\mu)^\mu \ldots$$
$$\ldots (x_1 + w^{-(\mu-1)}x_2 + \ldots + w^{-(\mu-1)(\mu-1)}x_\mu)^\mu,$$

atque si in dextero membro x_1 et x_2 inter se permutamus, habebimus expressionem

$$\frac{1}{\mu^{\mu(\mu-1)}}(x_2+w^{-1}x_1+\dots+w^{-(\mu-1)}x_\mu)^\mu\cdot(x_2+w^{-2}x_1+\dots+w^{-2(\mu-1)}x_\mu)^\mu\dots$$
$$\dots(x_2+w^{-(\mu-1)}x_1+\dots+w^{-(\mu-1)(\mu-1)}x_\mu)^\mu,$$

quae, si esset expressio (63.) respectu $x_1, x_2, \dots x_\mu$ symmetrica, omnino identica esse deberet cum dextero formulae (64.) membro. Hoc tamen fieri non potest, nisi exsistit tale $r<\mu$, ut sit

$$(x_1+w^{-1}x_2+w^{-2}x_3+\dots+w^{-(\mu-1)}x_\mu)^\mu$$
$$=(x_2+w^{-r}x_1+w^{-2r}x_3+\dots+w^{-(\mu-1)r}x_\mu)^\mu$$

id est

$$x_1+w^{-1}x_2+w^{-2}x_3+\dots+w^{-(\mu-1)}x_\mu$$
$$=w^p(x_2+w^{-r}x_1+w^{-2r}x_3+\dots+w^{-(\mu-1)r}x_\mu,$$
$$(p \text{ et } r<\mu).$$

Huic vero aequationi in genere (i. e. exsistentibus $x_1, x_2, \dots x_\mu$ a se invicem omnino independentibus) non satisfieri potest, nisi aequationibus

$$w^{p-r}=1,\quad w^{p+1}=1,\quad w^{p-2(r-1)}=1,\quad \dots\quad w^{p-(\mu-1)(r-1)}=1$$

simul erit satisfactum, quod tamen fieri non potest si $\mu>3$. Aequatio igitur μ^{ti} gradus, exsistente μ numero primo, non in genere est algebraice resolubilis si $\mu>3$ est. Q. e. d.

Upsaliae d. XXII Apr. 1846.

4.

Die Lagrangesche Formel und die Reihensummirung durch dieselbe.

(Von Herrn *J. Dienger*, Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.)

Die Formel $\sum_1^\infty \int_{u_0}^{u_1} \cos \frac{n\pi(x-u)}{\alpha} \psi(u) \partial u$ stellt eine, nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreitende Reihe dar, wenn u_0 und u_1 bestimmte Gröfsen sind, und $\sum_1^\infty$ die Summe der Werthe bedeutet, welche man erhält, wenn man n die Werthe 1, 2, ... ∞ beilegt. Diese Formel läfst sich durch einen endlichen Ausdruck geben, unter gewissen Bedingungen, die wir näher bezeichnen werden.

Ist $u_0 = -\alpha$, $u_1 = +\alpha$, so findet man, unter gewissen Beschränkungen:

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \psi(u) \partial u + \frac{1}{\alpha} \sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{n\pi(x-u)}{\alpha} \psi(u) \partial u.$$

Diese letztere Formel läfst sich, wie bekannt, auch direct herleiten, wie es z. B. *Poisson* in seiner Mechanik §. 325. thut; allein es sind diese directen Herleitungen meistens schwierig, indem dabei leicht Manches übersehen werden kann, was unumgänglich angezeigt werden mufs, um die Grenzen, innerhalb welcher eine Formel gebraucht werden kann, zu bestimmen. Es ist daher immer rathsamer, nicht die unendliche Reihe aus der Function selbst zu entwickeln, sondern diese aus jener zu bestimmen, oder, mit andern Worten, die unendliche Reihe blofs zu summiren.

In dem Folgenden sind bekannte Sätze mit aufgenommen worden; auch hat man frühere Arbeiten benutzt, ohne dafs man es nöthig gehalten hat, die jeweilige Quelle anzuführen. Es werden alsdann eine Reihe von Anwendungen auf Reihensummirungen gemacht, bei welchen die Grenzen der Gültigkeit nach dem Vorangegangenen leicht zu erkennen sind.

§. 1.

Bezeichnet ε eine unendlich kleine Gröfse, so soll $f(\varepsilon)$ eine unendlich kleine Gröfse von der Ordnung r heifsen, wenn $\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^n}$ unendlich ist für $n > r$, Null für $n < r$, und auch Null, aber nicht unendlich, für $n = r$.

Eine Function $f(x)$ soll continuirlich heifsen zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ (wo $\beta > \alpha$), wenn $f(x+\varepsilon) - f(x)$ eine unendlich kleine Gröfse von der nämlichen, oder von höherer Ordnung als ε ist; vorausgesetzt, dafs x jene gegebenen Grenzen nicht übersteige. Dann ist also $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ eine endliche Gröfse, oder auch Null.

Ist aber $f(x+\varepsilon) - f(x)$ eine endliche Gröfse, oder unendlich klein, aber von niedrigerer Ordnung als ε, so soll $f(x)$ für diejenigen Werthe von x, für welche solches Statt hat, discontinuirlich heifsen. x wird dabei immer $\gtreqless \alpha$ und $\leqq \beta$ vorausgesetzt.

So ist z. B. $\sqrt{(1-x^2)}$ discontinuirlich für $x^2 = 1$ oder $x = \pm 1$, denn es ist, wenn $f(x) = \sqrt{(1-x^2)}$ gesetzt wird,

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{(1-(x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2))}-\sqrt{(1-x^2)}}{\varepsilon} = \sqrt{\left(\pm\frac{2}{\varepsilon}-\varepsilon\right)} \text{ für } x^2 = 1,$$

also $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ unendlich grofs.

Hat $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ einen endlichen Werth (der auch Null sein darf), so nennt man diesen Werth den *Differentialcoëfficienten* und bezeichnet ihn durch $f'(x)$ oder $\frac{\partial \cdot f(x)}{\partial x}$.

Hat also $f'(x)$ zwischen den Grenzen $x = \alpha$, $x = \beta$ lauter bestimmte, endliche Werthe, so hat auch $f(x)$ endliche Werthe zwischen jenen Grenzen von x; dann ist $f(x+\varepsilon) - f(x)$ von gleicher oder höherer Ordnung als ε, also $f(x)$ continuirlich, zwischen jenen Grenzen von x.

Ist $f'(x)$ selbst continuirlich zwischen den Grenzen α und β, so hat es innerhalb dieser Grenzen lauter endliche und bestimmte Werthe; also ist alsdann auch $f(x)$ continuirlich innerhalb jener Grenzen.

Ist die Gröfse $f(x+\varepsilon) - f(x)$ positiv für ein positives ε, so wächst $f(x)$ mit x; ist sie negativ, so nimmt $f(x)$ ab, wenn x wächst. Im ersten Falle ist $f'(x)$ positiv, im zweiten negativ. Ist demnach $f'(x)$ positiv, so wächst $f(x)$ mit x; ist $f'(x)$ negativ, so nimmt $f(x)$ ab mit wachsendem x.

Ist also $f(x)$ so beschaffen, dafs es Null ist für $x=0$, und ist für den nämlichen Werth von x, $f'(x)$ positiv, so wächst $f(x)$ mit x und ist somit positiv für ein kleines positives x; ist aber $f'(x)$ für den Werth $x=0$ negativ, so ist $f(x)$ negativ für ein kleines positives x. Bleibt $f'(x)$, von $x=0$ bis $x=k$, immer von gleichem Zeichen, so ist $f(x)$ positiv für $x>0$ und $<k$, wenn $f'(0)$ positiv ist; negativ, wenn $f'(0)$ negativ ist.

§. 2.

Es sei $f(h)$ gleich Null für $h=0$, und es habe $f'(h)$ von $h=0$ bis $h=h$ lauter endliche Werthe, so ist auch $f(h)$ continuirlich von $h=0$ bis $h=h$. Legt man h in der Gröfse $f'(h)$ alle Werthe von 0 bis h bei, so wird $f'(h)$ einen gröfsten und einen kleinsten Werth erlangen. Es sei a dieser gröfste, b der kleinste Werth, so ist $f'(h)-a$ im Allgemeinen negativ, $f'(h)-b$ positiv. Aber $f'(h)-a=\frac{\partial\cdot(f(h)-ah)}{\partial h}$ und $f'(h)-b=\frac{\partial\cdot(fh-bh)}{\partial h}$: also wird, da $f(h)-ah$ und $f(h)-b(h)$ Null sind, für $h=0$, $f(h)-ah$ negativ und $f(h)-bh$ positiv sein, für ein positives h; folglich auch $\frac{f(h)}{h}-a$ negativ und $\frac{f(h)}{h}-b$ positiv, mithin immer $\frac{f(h)}{h}$ zwischen a und b. Legt man nun dem h in $f'(h)$ die Werthe 0 bis h bei, so erhält man alle Werthe zwischen a und b, folglich auch den Werth von $\frac{f(h)}{h}$. Ist demnach θ eine Zahl, die nicht gröfser als 1 ist, so wird man setzen können:

$$\frac{f(h)}{h}=f'(\theta h),\quad \text{folglich}\quad f(h)=hf'(\theta h).$$

Es sei nun $f'(x)$ immer endlich, und bestimmt für alle Werthe von x zwischen den Grenzen α und β, so ist $f(x)$ continuirlich zwischen jenen Grenzen, mithin ist, wenn x und $x+h$ die gegebenen Grenzen nicht überschreiten, $f(x+h)-f(x)$ endlich und bestimmt. Aber für $h=0$ ist $f(x+h)-f(x)$ auch Null; also ist, nach Dem was man so eben gesehen:

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h)\quad\text{oder}$$

$$1.\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h).$$

§. 3.

Setzt man in der Gleichung (1. §. 2.) $f(x)=\int F(x)\partial x$, so giebt sie

$$2.\qquad \int F(x+h)\partial x=\int F(x)\partial x+hF(x+\theta h),$$

wenn $F(x)$ zwischen den Grenzen $x=\alpha$ und $x=\beta$ nur endliche, be-

stimmte Werthe hat. Alsdann giebt die Formel (2.) innerhalb jener Grenzen von x, wenn $x+h$ diese nicht überschreitet:

$$\int F(x+h)\partial x - \int F(x)\partial x = hF(x+\theta h) \text{ oder}$$

$$3. \quad \int_x^{x+k} F(x)\partial x = hF(x+\theta h).$$

Ist nun ε eine unendlich kleine Gröfse, so erhält man aus (3.):

$$4. \quad \begin{cases} \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} F(x)\partial x = \varepsilon F(\alpha+\theta\varepsilon), \\ \int_{\alpha+\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon} F(x)\partial x = \varepsilon F(\alpha+\varepsilon+\theta\varepsilon), \\ \int_{\alpha+2\varepsilon}^{\alpha+3\varepsilon} F(x)\partial x = \varepsilon F(\alpha+2\varepsilon+\theta\varepsilon), \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{\alpha+(n-1)\varepsilon}^{\alpha+n\varepsilon} F(x)\partial x = \varepsilon F(\alpha+(n-1)\varepsilon+\theta\varepsilon), \end{cases}$$

wenn $\beta = \alpha+n\varepsilon$. Addirt man die Gleichungen (4.) und erwägt, dafs

$$\int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} F(x)\partial x + \int_{\alpha+\varepsilon}^{\alpha+2\varepsilon} F(x)\partial x + \ldots + \int_{\alpha+(n-1)\varepsilon}^{\beta} F(x)\partial x = \int_\alpha^\beta F(x)\partial x \text{ ist,}$$

so erhält man

$$\int_\alpha^\beta F(x)\partial x$$

$$= \varepsilon[F(\alpha+\theta\varepsilon)+F(\alpha+\varepsilon+\theta\varepsilon)+F(\alpha+2\varepsilon+\theta\varepsilon)+\ldots+F(\beta-\varepsilon+\theta\varepsilon);$$

wo θ zwischen 0 und 1 liegt. Wenn aber ε unendlich klein ist, so nähert sich diese Gröfse offenbar dem Werthe

$$\varepsilon[F(\alpha)+F(\alpha+\varepsilon)+F(\alpha+2\varepsilon)+\ldots+F(\beta)],$$

also ist

$$5. \quad \int_\alpha^\beta F(x)\partial x = \varepsilon[F(\alpha)+F(\alpha+\varepsilon)+\ldots+F(\beta)],$$

vorausgesetzt dafs $F(x)$ zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$ endlich und bestimmt sei.

§. 4.

Wenn $F(x)$ von $x=a-\varepsilon$ bis $x=a+\varepsilon$ endlich ist, und es ist $F'(x)$ für $x=a$ unendlich, so wird im Allgemeinen $F'(x)$ für $x=a-\varepsilon$ nicht unendlich sein. Also wird man haben:

$$F(a-\varepsilon+h) = F(a-\varepsilon)+hF'(a-\varepsilon)+\frac{h^2}{2!}F''(a-\varepsilon+h)+\ldots,$$

wenn h nicht $> 2\varepsilon$ ist, und auch $F''(a-\varepsilon+h)$ u. s. f. endlich sind. Dann ist, da

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,\partial x = \int_0^{2\varepsilon} f(a-\varepsilon+h)\,\partial h,$$

auch $\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} F(x)\,\partial x$ endlich und bestimmt, indem die Reihe für $F(a-\varepsilon+h)$ rasch convergirt. Desgleichen ist

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \psi(x)\,F(x)\,\partial x$$

endlich und bestimmt, wenn die Werthe von $\psi(x)$ zwischen $x=a-\varepsilon$ und $x=a+\varepsilon$ endlich und bestimmt sind.

§. 5.

Wir wollen nun den Ausdruck

$$6.\qquad \sum_1^\infty \int_{u_0}^{u_1} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u$$

untersuchen, indem wir dabei voraussetzen, dafs $f(u)$ für die Werthe $u=u_0$ bis $u=u_1$ endlich und bestimmt sei. α, u_0, u_1 sind bestimmte, endliche Zahlen. Unter diesen Voraussetzungen läfst sich zunächst leicht nachweisen, dafs der Ausdruck (6.) immer einen bestimmten Werth hat, welcher endlich ist.

Es ist bekanntlich

$$\int \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = -\frac{\alpha}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u) + \frac{\alpha}{n\pi}\int \sin\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f'(u)\,\partial u,$$

also

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^{u_1} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = &-\frac{\alpha}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-u_1)}{\alpha} f(u_1)\\ &+\frac{\alpha}{n\pi}\sin\frac{n\pi(x-u_0)}{\alpha} f(u_0)\\ &+\frac{\alpha}{n\pi}\int_{u_0}^{u_1} \sin\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f'(u)\,\partial u,\end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty \int_{u_0}^{u_1} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = &-\frac{\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_1)}{\alpha} f(u_1)\\ &+\frac{\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_0)}{\alpha} f(u_0)\\ &+\frac{\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\int_{u_0}^{u_1} \sin\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f'(u)\,\partial u\\ = &-\frac{\alpha f(u_1)}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_1)}{\alpha}\\ &+\frac{\alpha f(u_0)}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_0)}{\alpha}\\ &+\frac{\alpha}{\pi}\sum_1^\infty \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f'(u)\,\partial u.\end{aligned}$$

Bekanntlich ist aber $\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n(x-u_1)\pi}{a}$, so wie $\sum_1^\infty \frac{1}{n}\sin\frac{n(x-u_0)\pi}{a}$, eine bestimmte, endliche Gröfse. Sind die Werthe von $f'(u)$ endlich, zwischen u_0 und u_1, so ist nach (§. 3.):

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{a}f'(u)\partial u$$

$$=\varepsilon\Big[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_0)}{a}f'(u_0)+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_0-\varepsilon)}{a}f'(u_0+\varepsilon)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_1)}{a}f'(u_1)\Big],$$

$$\sum_1^\infty\int_{u_0}^{u_1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{a}f'(u)\partial u$$

$$=\varepsilon\Big[\sum_1^\infty\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_0)}{a}f'(u_0)+\sum_1^\infty\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_0-\varepsilon)}{a}f'(u_0+\varepsilon)+\dots$$

$$\dots+\sum_1^\infty\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u_1)}{a}f'(u_1)\Big]$$

$$=\int_{u_0}^{u_1}\sum_1^\infty\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{a}f'(u)\partial u.$$

Aber $\sum_1^\infty\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{a}$ ist eine bestimmte, endliche Gröfse, also ist es auch

$$\int_{u_0}^{u_1}\sum_1^\infty\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{a}f'(u)\partial u \quad\text{oder}\quad \sum_1^\infty\int_{u_0}^{u_1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi(x-u)}{a}f'(u)\partial u.$$

Fafst man das Gesagte zusammen, so zeigt sich, dafs der Ausdruck (6.) immer einen bestimmten Werth hat und dafs also die durch ihn dargestellte Reihe immer convergent ist.

§. 6.

In dem Vorstehenden ist die Bedingung gemacht, dafs $f(u)$ endlich sei zwischen u_0 und u_1. Diese Bedingung ist aber nicht unerläfslich. Denn es werde z. B. $f(u)$ ein einziges Mal zwischen u_0 und u_1 unendlich, z. B. für $x=k$, so ist

$$\sum_1^\infty\int_{u_0}^{u_1}\cos\frac{n\pi(x-u)}{a}f(u)\partial u=\sum_1^\infty\int_{u_0}^{k-\varepsilon}\cos\frac{n\pi(x-u)}{a}f(u)\partial u$$

$$+\sum_1^\infty\int_{k-\varepsilon}^{k+\varepsilon}\cos\frac{n\pi(x-u)}{a}f(u)\partial u$$

$$+\sum_1^\infty\int_{k+\varepsilon}^{u_1}\cos\frac{n\pi(x-u)}{a}f(u)\partial u.$$

Die erste und die dritte dieser drei Gröfsen sind nach (§. 5.) endlich. Die zweite ist gleich

$$\sum_1^\infty \int_0^{2\varepsilon} \cos \frac{n\pi(x-k+\varepsilon-h)}{\alpha} f(k-\varepsilon+h)\partial h,$$

nach (§. 4.). Entwickelt man nun $f(k-\varepsilon+h)$ in eine rasch convergirende Reihe, so sind die Gröfsen

$$\sum_1^\infty \int_0^{2\varepsilon} \cos \frac{n\pi(x-k+\varepsilon-h)}{\alpha} h\partial h, \ldots.$$

endlich und bestimmt, da sie allen Bedingungen in (§. 5.) entsprechen; es ist also auch die zweite der betrachteten Gröfsen endlich und bestimmt. Der Ausdruck (6.) hat demnach in diesem Falle doch einen bestimmten Werth. Dasselbe findet Statt, wenn $f(u)$ mehrere Male zwischen u_0 und u_1 unendlich wird.

§. 7.

Um den Werth des betrachteten Ausdrucks zu finden, bemerke man, dafs, wie in (§. 5.),

$$\sum_1^\infty \int_{u_0}^{u_1} \cos \frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\partial u = \int_{u_0}^{u_1} f(u)\partial u \sum_1^\infty \cos \frac{n\pi(x-u)}{\alpha} \text{ ist.}$$

Nun ist aber nach bekannten Formeln:

$$\sum_1^n \cos \frac{n\pi(x-u)}{\alpha} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)},$$

also

$$\sum_1^\infty \int_{u_0}^{u_1} \cos \frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\partial u$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1} f(u)\partial u + \tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi(x-u)}{\alpha}}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi(x-u)}{\alpha}} f(u)\partial u,$$

worin n gleich ∞ zu setzen ist.

Man findet aber, wie in (§. 5.), dafs

$$\int \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)} f(u)\partial u = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)} f(u)$$

$$-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\int \cos(n+\tfrac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial u}\cdot\left(\frac{f(u)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}\right)\partial u.$$

Ist also $\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{u}\right)}$ endlich und für alle Werthe von u zwischen u_0 und u_1 bestimmt, so erhält man hieraus:

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}f(u)\,\partial u=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\cos(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi(x-u_1)}{\alpha}f(u_1)$$
$$-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\cos(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi(x-u_0)}{\alpha}f(u_0)$$
$$-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\alpha}{\pi}\int_{u_0}^{u_1}\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{x-u}{\alpha}\cdot\frac{\partial\cdot\left(\dfrac{f(u)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}\right)}{\partial u}\cdot\partial u.$$

Unter diesen Bedingungen ist also für $n=\infty$:

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}f(u)\,\partial u = 0 \quad\text{und}$$

$$\sum_1^{\infty}\int_{u_0}^{u_1}\cos n\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)fu\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}f(u)\,\partial u.$$

Ist $\dfrac{\partial\cdot\left(\dfrac{f(u)}{\sin\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)}\right)}{\partial u}$ nicht immer endlich zwischen den angegebenen Grenzen, so beweiset man, auf die in (§. 6.) näher beleuchtete Weise, dafs das angeführte Resultat doch Statt hat.

§. 8.

Das so eben gefundene Resultat gründet sich auf die Voraussetzung, dafs

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi(x-u)}{\alpha}}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi(x-u)}{\alpha}}$$

endlich und bestimmt sei, zwischen u_0 und u_1. Nun ist es aber möglich, dafs, je nach dem Werthe von x, zwischen u_0 und u_1 Werthe von u von der Form $x\pm 2r\alpha$ liegen, für welche offenbar dieses Bestimmtsein aufhört. Man nehme an, es gebe zuerst einen einzigen Werth von u zwischen u_0 und u_1 von der

Form $x \pm 2r\alpha$, so ist, wenn man, um abzukürzen,

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\pi}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{x-u}{\alpha}\right)\pi} f(u) = \psi(u)$$

setzt:

$$\int_{u_0}^{u_1} \psi(u)\partial u = \int_{u_0}^{x\pm 2r\alpha-\varepsilon} \psi(u)\partial u + \int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha+\varepsilon} \psi(u)\partial u + \int_{x\pm 2r\alpha+\varepsilon}^{u_1} \psi(u)\partial u$$

$$= \int_{u_0}^{x\pm 2r\alpha-\varepsilon} \psi(u)\partial u + \int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha} \psi(u)\partial u + \int_{x\pm 2r\alpha}^{x\pm 2r\alpha+\varepsilon} \psi(u)\partial u + \int_{x\pm 2r\alpha+\varepsilon}^{u_1} \psi(u)\partial u;$$

was sich, wie wir gesehen, für $n=\infty$ auf

$$\int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha} \psi(u)\partial u + \int_{x\pm 2r\alpha}^{x\pm 2r\alpha+\varepsilon} \psi(u)\partial u$$

zusammenzieht (§. 7.), wenn man annimmt, dafs weder u_0 noch u_1 von der Form $x \pm 2r\alpha$ sei.

Wäre $u_0 = x \pm 2r\alpha$, und mithin sonst kein Werth von u von dieser Form, so würde stehen bleiben:

$$\int_{x\pm 2r\alpha}^{x\pm 2r\alpha+\varepsilon} \psi(u)\partial u;$$

für $u_1 = x \pm 2r\alpha$ aber

$$\int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x+2r\alpha} \psi(u)\partial u;$$

wo überall ε eine sehr kleine Gröfse ist.

Setzt man nun $u = x \pm 2r\alpha - h$, so findet sich, wenn man bemerkt, dafs zuletzt $n=\infty$ zu setzen ist:

$$\int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha} \psi(u)\partial u = -\int_{\varepsilon}^{0} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}h}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}h} f(x \pm 2r\alpha - h)\partial h.$$

Da aber ε so klein angenommen werden kann, als man will, so wird sich $f(x \pm 2r\alpha - h)$ für $h=\varepsilon$ bis $h=0$ wenig ändern, so dafs man, wenn man den Satz (§. 3.) beachtet, wird setzen dürfen:

$$\int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha} \psi(u)\partial u = -f(x \pm 2r\alpha)\int_{\varepsilon}^{0} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}h}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}h}\partial h.$$

Nun sind aber für ein sehr kleines h, $\sin\frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}h$ und $\frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}h$ wenig verschieden; also wird

$$\int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha}\psi(u)\,\partial u = -2f(x\pm 2r\alpha)\int_{\varepsilon}^{0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}h}{\frac{\pi}{\alpha}h}\,\partial h$$

sein, wenn $n=\infty$ zu setzen ist. Macht man $(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}h=k$, so sind die Grenzen von k Null und ∞, indem für jeden angebbaren Werth von h das Integral $\int_{h}^{\varepsilon}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}h}{\sin\frac{1}{2}\frac{\pi}{\alpha}h}\,\partial h$ Null ist (§. 7.), also die Grenzen von h beliebig ausgedehnt werden können. Man findet nun

$$\begin{aligned}\int_{x\pm 2r\alpha-\varepsilon}^{x\pm 2r\alpha}\psi(u)\,\partial u &= -\frac{2\alpha}{\pi}f(x\pm 2r\alpha)\int_{\infty}^{0}\frac{\sin k}{k}\,\partial k\\ &= +\frac{2\alpha}{\pi}f(x\pm 2r\alpha)\int_{0}^{\infty}\frac{\sin k}{k}\,\partial k\\ &= +\ \alpha f(x\pm 2r\alpha).\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise ist

$$\int_{x\pm 2r\alpha}^{x\pm 2r\alpha+\varepsilon}\psi(u)\,\partial u = \alpha f(x\pm 2r\alpha).$$

Liegt also zwischen u_0 und u_1 ein einziger Werth von u von der Form $x\pm 2r\alpha$, und sind u_0, u_1 nicht dieser Werth, so ist

$$7.\quad \sum_{1}^{\infty}\int_{u_0}^{u_1}\cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha}f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}f(u)\,\partial u+\alpha f(x\pm 2r\alpha).$$

Für u_0 oder $u_1=x\pm 2r\alpha$ erhält man aber, wenn ferner zwischen u_0 und u_1 kein anderer Werth von dieser Form liegt:

$$8.\quad \sum_{1}^{\infty}\int_{u_0}^{u_1}\cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha}f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}f(u)\,\partial u+\tfrac{1}{2}\alpha f(x\pm 2r\alpha).$$

Gäbe es zwischen u_0 und u_1, diese Grenzen ausgenommen, die Werthe $x\pm 2r\alpha$, $x\pm 2(r+1)\alpha$, $x\pm 2(r+2)\alpha$, ... $x\pm 2(r+m)\alpha$, so wäre

$$9.\quad \sum_{1}^{\infty}\int_{u_0}^{u_1}\cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha}f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{u_0}^{u_1}f(u)\,\partial u+\alpha\sum_{v=0}^{v=m}f(x\pm 2(r+v)\alpha).$$

Wäre dazu noch $u_0=x\pm 2s\alpha$, so würde hinzuzusetzen sein

$$\tfrac{1}{2}\alpha f(x\pm 2s\alpha);$$

desgleichen, wenn $u_1 = x \pm 2s\alpha$ ist. Wären aber zugleich $u_0 = x \pm 2s\alpha$ und $u_1 = x \pm 2s'\alpha$, so wäre hinzuzusetzen:

$$\tfrac{1}{2}\alpha f(x \pm 2s\alpha) + \tfrac{1}{2}\alpha f(x \pm 2s'\alpha).$$

§. 9.

Setzt man $u_0 = -\alpha$, $u_1 = +\alpha$, so liegt zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ ein einziger Werth von u von der Form $x \pm 2r\alpha$; was auch immer x sei. Ist nämlich $x = \pm 2s\alpha + k$, und liegt k zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ (diese Grenzen eingeschlossen), so ist u für den Werth k von der Form $x \pm 2r\alpha$. Dann ist, wenn k nicht $= \pm\alpha$:

$$10. \quad \sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \alpha f(x \pm 2s\alpha).$$

Ist aber $k = +\alpha$, oder $= -\alpha$, so ist

$$11. \quad \sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \tfrac{1}{2}\alpha f(x \pm 2s\alpha).$$

Ist $x < +\alpha$ und $> -\alpha$, so ist $s = 0$ und aus (10.)

$$12. \quad \sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \alpha f(x);$$

ist aber $x = \pm\alpha$, so erhält man aus (11.):

$$13. \quad \sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = -\tfrac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(u)\,\partial u + \tfrac{1}{2}\alpha \cdot f(x).$$

Die Formel (12.) giebt

$$14. \quad f(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \frac{1}{\alpha}\sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u$$

für $x > -\alpha$ und $< \alpha$.

Die Formel (13.) giebt

$$15. \quad f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \frac{2}{\alpha}\sum_1^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u$$

für $x = \pm\alpha$.

Setzt man $\alpha = \pi$, so erhält man

$$16. \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)\,\partial u + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_{-\pi}^{+\pi} \cos n(x-u) f(u)\,\partial u.$$

für $x > -\pi$ und $< +\pi$.

§. 10.

Setzt man in der Formel (14.) $\frac{\pi}{\alpha} = \varepsilon$, $\frac{n\pi}{\alpha} = n\varepsilon = v$, so erhält man

$$f(x) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \frac{\varepsilon}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos v(x-u) f(u)\,\partial u$$
$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u \sum_{v=\varepsilon}^{v=\infty} \cos v(x-u).$$

Ist nun α unendlich grofs, so ist ε unendlich klein, folglich, wenn $f(x)$ lauter endliche Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ hat, alsdann

$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,\partial u = 0.$$

Aber $\varepsilon \sum_{v=\varepsilon}^{v=\infty} \cos v(x-u) = \varepsilon[\cos\varepsilon(x-u) + \cos 2\varepsilon(x-u) + \dots + \cos\infty(x-u)]$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \cos v(x-u)\,\partial v = \int_{0}^{\infty} \cos v(x-u)\,\partial v,$$

nach dem Satze (§. 3.). Also erhält man unter den angegebenen Bedingungen für $f(x)$:

$$17. \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\partial u \int_{0}^{\infty} \cos v(x-u)\,\partial v.$$

§. 11.

Setzt man aber in §. 8.: $u_0 = 0$, $u_1 = +\alpha$, und nimmt $x > 0$ und $< \alpha$ an, so ist in der Formel (7.) $r = 0$ und man erhält:

$$18. \quad f(x) = \frac{1}{2\alpha}\int_{0}^{+\alpha} f(u)\,\partial u + \frac{1}{\alpha}\sum_{1}^{\infty}\int_{0}^{\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u,$$

für $x > 0$ und $< \alpha$ und, wenn die Werthe von $f(x)$ endlich sind, von $x = 0$ bis $x = \alpha$.

Die Formel (§. 7.) gilt aber, wenn man $u_0 = 0$, $u_1 = \alpha$ setzt und $x < 0$ und $> -\alpha$ nimmt: man erhält also

$$\sum_{1}^{\infty}\int_{0}^{+\alpha} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} f(u)\,\partial u = 0 \quad \text{oder}$$

$$19. \quad \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\alpha} f(u)\,\partial u + \sum_{1}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \cos\frac{n\pi(x-u)}{\alpha} f(u)\,\partial u = 0,$$

wenn $x > 0$ und $< +\alpha$ ist.

Dividirt man (19.) durch α und subtrahirt von (18.), so erhält man

$$20. \quad f(x) = \frac{2}{\alpha}\sum_{1}^{\infty}\left(\int_{0}^{\alpha} f(u)\,\partial u . \sin\frac{n\pi u}{\alpha}\right)\sin\frac{n\pi x}{\alpha},$$

für $x > 0$ und $< \alpha$, wenn die Werthe von $f(x)$ innerhalb jener Grenzen endlich sind.

Diese Formel gilt auch für die Grenzwerthe, wenn $f(x)$ Null ist für $x=0$ und $x=a$.

Setzt man $a=\pi$, so erhält man

$$21.\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\left(\int_0^\pi f(u)\partial u.\sin nu\right)\sin nx,$$

für $x>0$ und $<\pi$.

§. 12.

Gesetzt, es habe $f(u)$ die Eigenschaft, dafs

$$f(-u)=f(u),$$

so ist offenbar

$$\int_{-a}^{+a}f(u)\partial u=2\int_0^a f(u)\partial u,\qquad \int_{-a}^{+a}f(u)\cdot\sin\frac{n\pi u}{a}\cdot\partial u=0,$$

$$\int_{-a}^{+a}\cos\frac{n\pi u}{a}f(u)\partial u=2\int_0^a\cos\frac{n\pi u}{a}f(u)\partial u:$$

also ergiebt sich dann aus der Formel (14.):

$$22.\quad f(x)=\frac{1}{a}\int_0^a f(u)\partial u+\frac{2}{a}\sum_1^\infty\left(\int_0^a\cos\frac{n\pi u}{a}f(u)\partial u\right)\cos\frac{n\pi x}{a},$$

von $x\gtreqless 0$ bis $x<a$, wenn a eine positive Gröfse ist und, wie wir bei allen Rechnungen in diesem Aufsatze voraussetzen, $f(x)$ innerhalb der angegebenen Grenzen endlich ist. Für $x=0$ erhält man

$$23.\quad f(0)=\frac{1}{a}\int_0^a f(u)\partial u+\frac{2}{a}\sum_1^\infty\int_0^a\cos\frac{n\pi u}{a}f(u)\partial u.$$

Setzt man $a=\pi$, so erhält man

$$24.\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(u)\partial u+\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\left(\int_0^\pi\cos nu\cdot f(u)\partial u\right)\cos nx,$$

und für $x\gtreqless 0$ bis $x<\pi$:

$$25.\quad f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(u)\partial u+\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\int_0^\pi\cos nu\cdot f(u)\partial u.$$

§. 13.

Die Formel (20.) gestattet einige Umgestaltungen, die wir angeben wollen.

Man setze $a=2k$, statt u und x aber $u+k$, $x+k$, so werden die Grenzen $-k$ und $+k$ werden, und mithin, wenn man $f(x)$ und $f(u)$ statt $f(x+k)$ und $f(u+k)$ setzt:

$$26.\quad f(x)=\frac{1}{k}\sum_1^\infty\left(\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u\cdot\sin\frac{n\pi(u+k)}{2k}\right)\sin\frac{n\pi(x+k)}{2k},$$

für $x>-k$ und $<+k$;

also für $x=0$:

$$27. \quad f(0) = \frac{1}{k}\sum_1^\infty\left(\int_{-k}^{+k}\sin\frac{n\pi(u+k)}{2k}f(u)\partial u\right)\sin\tfrac{1}{2}(n\pi).$$

Aus der Formel (26.) aber ergiebt sich offenbar:

$$f(x) = \frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u\cdot\sin\frac{n\pi(u+k)}{k}\cdot\sin\frac{n\pi(x+k)}{k}$$
$$+\frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u\cdot\sin\frac{(2n-1)(u+k)\pi}{2k}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi(u+k)}{2k},$$

und bekanntlich ist:

$$\sin\frac{n\pi(x+k)}{k} = (-1)^n\sin\frac{n\pi x}{k} \text{ und}$$
$$\sin\frac{(2n-1)(x+k)\pi}{2k} = (-1)^{n+1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2k}.$$

Dies beachtend, erhält man

$$28. \quad f(x) = \frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u\cdot\sin\frac{n\pi u}{k}\cdot\sin\frac{n\pi x}{k}$$
$$+\frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi u}{2k}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2k},$$

für $x>-k$ und $<+k$.

Für $k=\pi$ erhält man

$$29. \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}f(u)\partial u\cdot\sin nu\cdot\sin nx$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}f(u)\partial u\cdot\cos\tfrac{1}{2}((2n-1)u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(2n-1)\cdot x,$$

für $x>-\pi$ und $<+\pi$.

§. 14.

Dividirt man die Gleichung (19.) durch α und addirt zu (18.), so erhält man:

$$30. \quad f(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\alpha}f(u)\partial u+\frac{2}{\alpha}\sum_1^\infty\int_0^\alpha\cos\frac{n\pi u}{\alpha}f(u)\partial u\cdot\cos\frac{n\pi x}{\alpha},$$

für $x>0$ und $<\alpha$.

Durch ähnliche Umwandlungen wie in (§. 13.) erhält man

$$31. \quad f(x) = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u+\frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}\cos\frac{n\pi(u+k)}{2k}f(u)\partial u\cdot\cos\frac{n\pi(x+k)}{2k},$$

für $x>-k$, $<+k$.

Hieraus erhält man, ganz wie oben:

$$32.\quad f(x)=\frac{1}{2k}\int_{-k}^{+k}f(u)\partial u+\frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}\cos\frac{n\pi u}{k}f(u)\partial u\cdot\cos\frac{n\pi x}{k}$$
$$+\frac{1}{k}\sum_1^\infty\int_{-k}^{+k}\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2k}f(u)\partial u\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2k},$$

für $x>-k$ und $<+k$.

§. 15.

Aus den Formeln (28. und 32.) findet sich leicht

$$33.\quad f(0)=\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}f(u)\partial u\cdot\cos\tfrac{1}{2}(2n-1)u,$$

$$34.\quad f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(u)\partial u+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nu\cdot f(u)\partial u.$$

§. 16.

Hat $f(u)$ die Eigenschaft, dafs $f(-u)=-f(u)$, so erhält man aus der Formel (32.) wie in (§. 12.):

$$35.\quad f(x)=\frac{2}{k}\sum_1^\infty\int_0^k\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2k}f(u)\partial u\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2k},$$

für $x\gtreqless 0$ und $<k$.

Setzt man $k=\pi$, so ergiebt sich

$$36.\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\int_0^\pi\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)u\cdot f(u)\partial u\cdot\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)x,$$

für $x\gtreqless 0$ bis $<\pi$.

§. 17.

Die Formel (17.) giebt auch

$$37.\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\partial u\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cos v(x-u)\partial v$$
$$=\frac{1}{2\pi}\,{}^2\!\!\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cdot\cos v(x-u)\cdot\partial u\,\partial v.$$

Nun ist aber offenbar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin v(x-u)\partial v=0:$$

demnach

$$38.\quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\,{}^2\!\!\int_{-\infty}^{\infty}fu[\cos v(x-u)+i\sin v(x-u)]\partial u\,\partial v$$
$$=\frac{1}{2\pi}\,{}^2\!\!\int_{-\infty}^{\infty}e^{v(x-u)i}f(u)\partial u\,\partial v.$$

Hieraus folgt

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{2} e^{v(x-u)i} f(u,y)\,\partial u\,\partial v.$$

Aber nach (38.) ist

$$f(u,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{2} e^{v_1(y-u_1)i} f(u,u_1)\,\partial u_1\,\partial v_1,$$

also ist:

$$39. \quad f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{4} e^{v(x-u)i}.e^{v_1(y-u_1)i} f(u,u_1)\,\partial u\,\partial v\,\partial u_1\,\partial v_1.$$

Dieses Theorem ist leicht auszudehnen, und man erhält

$$f(x,y,z,\ldots.) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{2n} e^{v(x-u)i}.e^{v_1(y-u_1)i}.e^{v_2(z-u_2)i}\ldots.f(u,u_1,u_2,\ldots.)\,\partial u\,\partial v\,\partial u_1\,\partial v_1\ldots.,$$

wenn die Anzahl der Veränderlichen n ist, und $f(x,y,z,\ldots.)$ für alle möglichen Werthe dieser Veränderlichen endlich bleibt.

Da aber offenbar

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}^{2n} \sin[v(x-u)+v_1(y-u_1)+\ldots.]\,\partial v.\partial v_1\ldots. = 0$$

ist, so ist

$$40. \quad f(x,y,z,\ldots.) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}{}^{2n} \cos[v(x-u)+v_1(y-u_1)+\ldots.] f(u,u_1,\ldots.)\,\partial u\,\partial v\,\partial u_1\,\partial v_1\ldots.$$

§. 18.

Die vorstehenden Resultate gelten auch, wenn man beide Seiten differentiirt, oder integrirt; vorausgesetzt dafs die entstehenden Werthe endlich und bestimmt, die erhaltenen unendlichen Reihen also convergent sind. Die Grenzen der Gültigkeit sind die nämlichen, wie bei den Formeln, aus denen sie abgeleitet worden.

Im Folgenden sollen nun einige specielle Resultate angegeben werden, die man erhält, wenn man $f(x)$ bestimmte Formen beilegt.

§. 19.

Man setze in der Formel (25.) $f(u)=u^{2r}$, so erhält man ($r \gtreqless 1$)

$$\int_0^\pi u^{2r}\,\partial u = \frac{\pi^{2r+1}}{2r+1} \text{ und}$$

$$\int_0^\pi \cos nu.u^{2r}\,\partial u$$

$$= \cos n\pi\left[\frac{2r}{n^2}\pi^{2r-1} - \frac{2r(2r-1)(2r-2)}{n^4}\pi^{2r-3} + \ldots.(-1)^{r+1}\frac{2r(2r-1)\ldots.2}{n^{2r}}\pi\right];$$

also giebt jene Formel

$$0=\frac{\pi^{2r}}{2r+1}+2\sum_1^\infty\Big[2r.\pi^{2r-2}\frac{\cos n\pi}{n^2}-2r.(2r-1)(2r-2)\pi^{2r-4}\frac{\cos n\pi}{n^4}+\ldots \\ \ldots(-1)^{r+1}2r\ldots 2\frac{\cos n\pi}{n^{2r}}\Big]$$

oder

$$1.\quad 0=\tfrac{1}{2}\frac{\pi^{2r}}{(2r+1)!}-\sum_1^\infty\frac{\cos(n-1)\pi}{n^2}\cdot\frac{\pi^{2r-2}}{(2r-1)!}+\frac{\pi^{2r-4}}{(2r-3)!}\sum_1^\infty\frac{\cos(n-1)\pi}{n^4}-\ldots \\ \ldots(-1)^r\sum_1^\infty\frac{\cos(n-1)\pi}{n^{2r}}.$$

Setzt man also

$$2.\quad 1-\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}-\frac{1}{4^{2r}}+\ldots=\pi^{2r}B_r,$$

so ergiebt sich

$$3.\quad 0=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2r+1)!}-\frac{B_1}{(2r-1)!}+\frac{B_2}{(2r-3)!}-\ldots(-1)^rB_r,$$

und hieraus

$$4.\quad\begin{cases}0=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!}-B_1,\\ 0=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{5!}-\frac{B_1}{3!}+B_2,\\ 0=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{7!}-\frac{B_1}{5!}+\frac{B_2}{3!}-B_3,\\ 0=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{9!}-\frac{B_1}{7!}+\frac{B_2}{5!}-\frac{B_3}{3!}+B_4;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

wodurch B_1, B_2, ... recurrirend bestimmt sind.

Aus (2.) folgt:

$$\frac{1}{1^{2r}}-\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}-\frac{1}{4^{2r}}+\frac{1}{5^{2r}}-\frac{1}{6^{2r}}+\ldots=1\cdot\pi^{2r}B_r,$$

$$2\Big[\frac{1}{2^{2r}}-\frac{1}{4^{2r}}+\frac{1}{6^{2r}}-\frac{1}{8^{2r}}+\ldots\Big]=\frac{1\cdot\pi^{2r}B_r}{2^{2r-1}},$$

$$4\Big[\frac{1}{4^{2r}}-\frac{1}{8^{2r}}+\frac{1}{12^{2r}}-\ldots\Big]=\frac{1}{2^{4r-3}}\pi^{2r}B_r,$$

$$8\Big[\frac{1}{8^{2r}}-\frac{1}{16^{2r}}+\ldots\Big]=\frac{1}{2^{6r-3}}\pi^{2r}B_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Addirt man, so ergiebt sich leicht:

$$5.\quad\frac{1}{1^{2r}}+\frac{1}{2^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{4^{2r}}+\ldots=\frac{2^{2r-1}}{2^{2r-1}-1}\pi^{2r}B_r.$$

Addirt man (2. und 5.) und halbirt die Summe, so erhält man

$$6.\quad \frac{1}{1^{2r}}+\frac{1}{3^{2r}}+\frac{1}{5^{2r}}+\ldots = \frac{2^{2r}-1}{2^{2r}-2}\pi^{2r}B_r;$$

wodurch die Formeln für die reciproken Potenzenreihen der natürlichen Zahlen gegeben sind.

§. 20.

Setzt man in der Formel (24.) $fu=u^2$, so erhält man

$$\int_0^\pi u^2\,\partial u = \tfrac{1}{3}\pi^3,\quad \int_0^\pi u^2\cdot\cos nu\cdot\partial u = \cos n\pi\cdot\frac{2\pi}{n^2},$$

also giebt jene Formel

$$x^2 = \tfrac{1}{3}\pi^2+4\sum_1^\infty\frac{\cos n\pi\cdot\cos nx}{n^2}$$

oder

$$7.\quad \frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12} = -\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{1}{3^2}\cos 3x+\ldots,$$

für $x \gtreqless 0$ und $<\pi$.

Für $x=\frac{1}{2}\pi$ erhält man daraus

$$8.\quad -\frac{\pi^2}{48} = -\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots.$$

Setzt man in der nämlichen Formel $f(u)=u^{2r}$, wo r eine positive ganze Zahl ist, so findet man nach (§. 19.)

$$x^{2r}=\frac{\pi^{2r}}{2r+1}+2\sum_1^\infty\cos n\pi\left[\frac{2r\pi^{2r-2}}{n^2}-\frac{2r\ldots(2r-2)\pi^{2r-4}}{n^4}\ldots(-1)^{r+1}\frac{2r\ldots2}{n^{2r}}\right]\cos nx,$$

für $x \gtreqless 0$ und $<\pi$. Setzt man also

$$\sum_1^\infty\frac{\cos n\pi\cdot\cos nx}{n^{2r}} = K_r,$$

so erhält man zur Bestimmung von K_1, K_2, ...

$$9.\quad \begin{cases} x^2=\frac{1}{3}\pi^2+4K_1, \\ x^4=\frac{1}{5}\pi^4+8K_1\pi^2-2\cdot4\cdot3\cdot2\,K_2, \\ x^6=\frac{1}{7}\pi^6+2\cdot6K_1\pi^4-2\cdot6\cdot5\cdot4K_2\pi^2+2\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2K_3, \\ x^8=\frac{1}{9}\pi^8+2\cdot8K_1\pi^6-2\cdot8\cdot7\cdot6K_2\pi^4+2\cdot8\cdots\cdots4K_3\pi^2-2\cdot8\cdots\cdot2K_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

§. 21.

Man setze in der Formel (36.) $f(u)=u$, so erhält man

$$\int_0^\pi\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)u.u\,\partial u = \frac{4}{(2n-1)^2}\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)\pi:$$

also giebt jene Formel:

$$x = \frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)\pi\cdot\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)x \text{ oder}$$

10. $$\tfrac{1}{8}(x\pi) = \sin\tfrac{1}{2}x - \frac{1}{3^2}\sin\tfrac{3}{2}x + \frac{1}{5^2}\sin\tfrac{5}{2}x - \ldots,$$

für $x \gtreqless 0$, und $< \pi$.

Setzt man in der nämlichen Formel $f(u) = u^{2r+1}$, so erhält man

$$\int_0^\pi \sin\tfrac{1}{2}(2n-1)u\cdot u^{2r+1}\partial u$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}(2n-1)\pi\Big[\frac{2^2}{(2n-1)^2}(2r+1)\pi^{2r} - \frac{2^4}{(2n-1)^4}(2r+1)\ldots(2r-1)\pi^{2r-2} + \ldots$$

$$\ldots(-1)^r\frac{2^{2r+2}}{(2n-1)^{2r+2}}(2r+1)\ldots 1\Big]\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)x:$$

also giebt jene Formel:

$$\tfrac{1}{2}\pi x^{2r+1}$$

$$= \sum_1^\infty \sin\tfrac{1}{2}(2n-1)\pi\Big[\frac{2^2}{(2n-1)^2}(2r+1)\pi^{2r} - \frac{2^4}{(2n-1)^4}(2r+1)\ldots(2r-1)\pi^{2r-2} + \ldots$$

$$\ldots(-1)^r\frac{2^{2r+2}}{(2n-1)^{2r+2}}(2r+1)\ldots 1\Big]\sin\tfrac{1}{2}(2n-1)x.$$

Setzt man demnach

11. $$\sin\tfrac{1}{2}x - \frac{1}{3^{2r}}\sin\tfrac{3}{2}x + \frac{1}{5^{2r}}\sin\tfrac{5}{2}x - \ldots = M_r,$$

so erhält man

$$\tfrac{1}{2}(\pi x^{2r+1}) = 2^2.(2r+1)\pi^{2r}M_1 - 2^4.(2r+1)\ldots(2r-1)\pi^{2r-2}M_2 + \ldots$$

$$\ldots(-1)^r(2r+1)\ldots 1.2^{2r+2}M_{r+1},$$

und hieraus, zur Bestimmung der M_1, M_2, ...,

12. $$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\pi x = 2^2 M_1, \\ \tfrac{1}{2}\pi x^3 = 2^2.3\pi^2 M_1 - 2^4.3.2.1 M_2, \\ \tfrac{1}{2}\pi x^5 = 2^2.5\pi^4 M_1 - 2^4.5\ldots 3\pi^2 M_2 + 2^6.5\ldots 1 M_3, \\ \tfrac{1}{2}\pi x^7 = 2^2.7\pi^6 M_1 - 2^4.7.6.5\pi^4 M_2 + 2^6.7\ldots 3\pi^2 M_3 - 2^8.7\ldots 1 M_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Formel (11.) gilt für $x \gtreqless 0$ bis $x < \pi$.

§. 22.

Die Formel (7. §. 20.) giebt durch Differentiation (§. 18.):

13. $$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \ldots,$$

für $x \gtreqless 0$ und $< \pi$.

Durch Integration erhält man aus der nämlichen Formel:

$$\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{12}\pi^2x+a = -\sin x+\frac{1}{2^3}\sin 2x-\frac{1}{3^3}\sin 3x+\ldots,$$

für $x \overline{\gtrless} 0$ und $<\pi$.

Für $x=0$ ist aber $a=0$, also

$$14.\quad \tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{12}\pi^2x = -\sin x+\frac{1}{2^3}\sin 2x-\frac{1}{3^3}\sin 3x+\ldots,$$

Nochmaliges Integriren giebt:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}-\frac{\pi^2B_1x^2}{2!}+a = \cos x-\frac{1}{2^4}\cos 2x+\frac{1}{3^4}\cos 3x-\ldots,$$

da $B_1=\frac{1}{12}$. Für $x=0$ ist

$$a = 1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ldots = \pi^4B_2,$$

also

$$15.\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}-\frac{\pi^2B_1x^2}{2!}+\pi^4B_2 = \cos x-\frac{1}{2^4}\cos 2x+\frac{1}{3^4}\cos 3x-\ldots,$$

für $x \overline{\gtrless} 0$ und $<\pi$.

Durch fortgesetztes Integriren findet man endlich:

$$16.\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^{2r}}{2r!}-\frac{\pi^2B_1x^{2r-2}}{(2r-2)!}+\frac{\pi^4B_2x^{2r-4}}{(2r-4)!}-\ldots(-1)^r\pi^{2r}B_r$$
$$= (-1)^r\left[\cos x-\frac{1}{2^{2r}}\cos 2x+\frac{1}{3^{2r}}\cos 3x-\frac{1}{4^{2r}}\cos 4x+\ldots\right],$$

$$17.\quad \tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}-\frac{\pi^2B_1x^{2r-1}}{(2r-1)!}+\frac{\pi^4B_2x^{2r-3}}{(2r-3)!}-\ldots(-1)^r\pi^{2r}B_rx$$
$$= (-1)^r\left[\sin x-\frac{1}{2^{2r+1}}\sin 2x+\frac{1}{3^{2r+1}}\sin 3x-\frac{1}{4^{2r+1}}\sin 4x+\ldots\right].$$

Die beiden letzten Formeln gelten für $x \overline{\gtrless} 0$ und $<\pi$.

§. 23.

Aus der Formel (10. §. 21.) zieht man durch Differentiiren:

$$18.\quad \tfrac{1}{4}\pi = \cos\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{5}\cos\tfrac{5}{2}x-\ldots,$$

für $x \overline{\gtrless} 0$ und $<\pi$.

Aus der nämlichen Formel erhält man durch Integration:

$$\tfrac{1}{8}\pi\cdot\frac{x^2}{2!}+a = -2\left[\cos\tfrac{1}{2}x-\frac{1}{3^3}\cos\tfrac{3}{2}x+\frac{1}{5^3}\cos\tfrac{5}{2}x-\ldots\right],$$

für $x \overline{\gtrless} 0$ und $<\pi$.

Für $x=0$ ist

$$a = -2\left[1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots\right],$$

Setzt man aber

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}-\frac{\pi^2 B_1 x^{2r-1}}{(2r-1)!}+\ldots.(-1)^r\pi^{2r}B_r x = F(2r+1,x),$$

so ist (§. 22.)

$$\sin x-\frac{1}{2^{2r+1}}\sin 2x+\frac{1}{3^{2r+1}}\sin 3x-\ldots. = (-1)^r F(2r+1,x),$$

also

$$1-\frac{1}{3^{2r+1}}+\frac{1}{5^{2r+1}}-\ldots\ldots\ldots\ldots. = (-1)^r F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi);$$

mithin

$$a = (-2)(-1)^1 F(3,\tfrac{1}{2}\pi) = 2F(3,\tfrac{1}{2}\pi) \text{ und}$$

$$\tfrac{1}{8}\pi\cdot\frac{x^2}{2!}+2F(3,\tfrac{1}{2}\pi) = -2\Big[\cos\tfrac{1}{2}x-\frac{1}{3^3}\cos\tfrac{3}{2}x+\frac{1}{5^3}\cos\tfrac{5}{2}x-\ldots.\Big].$$

Durch fortgesetztes Integriren erhält man:

$$19.\quad \tfrac{1}{8}\pi\cdot\frac{x^{2r}}{2r!}+2F(3,\tfrac{1}{2}\pi)\frac{x^{2r-2}}{(2r-2)!}+2^3F(5,\tfrac{1}{2}\pi)\frac{x^{2r-4}}{(2r-4)!}+\ldots.+2^{2r-1}F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= (-1)^r 2^{2r-1}\Big[\cos\tfrac{1}{2}x-\frac{1}{3^{2r+1}}\cos\tfrac{3}{2}x+\frac{1}{5^{2r+1}}\cos\tfrac{5}{2}x-\ldots.\Big].$$

$$20.\quad \tfrac{1}{8}\pi\cdot\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}+2F(3,\tfrac{1}{2}\pi)\frac{x^{2r-1}}{(2r-1)!}+2^3F(5,\tfrac{1}{2}\pi)\frac{x^{2r-3}}{(2r-3)!}+\ldots.+2^{2r-1}F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi)x$$
$$= (-1)^r 2^{2r}\Big[\sin\tfrac{1}{2}x-\frac{1}{3^{2r+2}}\sin\tfrac{3}{2}x+\frac{1}{5^{2r+2}}\sin\tfrac{5}{2}x-\ldots.\Big].$$

Die Formeln (19. und 20.) gelten von $x \gtreqless 0$ bis $<\pi$.

§. 24.

Setzt man in der Gleichung (30.) $\alpha=\pi$, $f(u)=u$, so erhält man

$$\int_0^\pi f(u)\partial u = \tfrac{1}{2}\pi^2 \quad\text{und}\quad \int_0^\pi \cos nu\, f(u)\partial u = \frac{\cos n\pi-1}{n^2}:$$

also giebt jene Formel:

$$x = \tfrac{1}{2}\pi+\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{\cos n\pi-1}{n^2}\cos nx \text{ oder}$$

$$(x-\tfrac{1}{2}\pi)\tfrac{1}{4}\pi = -2\Big[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots\Big],$$

$$21.\quad (\tfrac{1}{2}\pi-x)\tfrac{1}{4}\pi = \cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\ldots.,$$

für $x>0$ und $<\pi$.

Setzt man allgemein $f(u)=u^{2r+1}$, so erhält man

$$\int_0^\pi u^{2r+1}\partial u = \frac{\pi^{2r+2}}{2r+2} \text{ und}$$

$$\int_0^\pi \cos nu \cdot u^{2r+1}\partial u$$

$$= \cos n\pi\left[\frac{2r+1}{n^2}\pi^{2r} - \frac{(2r+1)..(2r-1)}{n^4}\pi^{2r-2} + \ldots.(-1)^r\frac{(2r+1)\ldots.1}{n^{2r+2}}\right]$$

$$-(-1)^r\frac{(2r+1)\ldots.1}{n^{2r+2}},$$

also giebt jene Formel:

$$x^{2r+1} =$$

$$\frac{\pi^{2r+1}}{2r+2} + \frac{2}{\pi}\left[(2r+1)\pi^{2r}\sum_1^\infty\frac{\cos n\pi}{n^2}\cos nx - (2r+1)..(2r-1)\pi^{2r-2}\sum_0^\infty\frac{\cos n\pi}{n^4}\cos nx + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots.(-1)^{r+1}(2r+1)\ldots.3\sum_1^\infty\frac{\cos n\pi}{n^{2r}}\cos nx\right]$$

$$+(-1)^r(2r+1)\ldots.1\sum\frac{\cos n\pi - 1}{n^{2r+2}}\cos nx\cdot\frac{2}{\pi}.$$

Hieraus folgt nach (§. 20.):

$$22.\quad \frac{\frac{1}{4}\pi x^{2r+1}}{(2r+1)!} - \frac{\frac{1}{4}\pi^{2r+2}}{(2r+2)!} - \tfrac{1}{2}\pi^{2r+2}\left[\frac{K_1}{2r!} - \frac{K_2}{(2r-2)!} + \ldots.(-1)^{r+1}\frac{K_r}{2!}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(-1)^r\sum\frac{\cos n\pi - 1}{n^{2r+2}}\cos nx$$

$$= (-1)^{r+1}\left[\cos x + \frac{1}{3^{2r+2}}\cos 3x + \frac{1}{5^{2r+2}}\cos 5x + \ldots.\right],$$

für $x > 0$ und $< \pi$.

§. 25.

Die Gleichung (21. §. 24.) ist

$$-\tfrac{1}{4}\pi x + \tfrac{1}{8}\pi^2 = \cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$-\tfrac{1}{4}\pi\frac{x^2}{2!} + \tfrac{1}{8}\pi^2 x + a = \sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \ldots.,$$

also, wenn $\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots. = \varphi(2, x)$ gesetzt wird:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2, x)\partial x + a = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots. = (-1)^1 F(3, \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$a = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2, x)\partial x - F(3, \tfrac{1}{2}\pi),$$

mithin

$$-\tfrac{1}{4}\pi\frac{x^2}{2!} + \tfrac{1}{8}\pi^2 x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2, x)\partial x - F(3; \tfrac{1}{2}\pi) = \sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \ldots,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\int_0^\pi \varphi(2,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(2,x)\partial x - F(3,\tfrac{1}{2}\pi) = \sin x + \frac{1}{3^3}\sin 3x + \frac{1}{5^3}\sin 5x + \dots$$
$$= \varphi(3,x).$$

Hieraus ergiebt sich wieder durch Integration:

$$-\tfrac{1}{4}\pi\frac{x^3}{3!} + \tfrac{1}{8}\pi^2\frac{x^2}{2!} - x\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2,x)\partial x - F(3,\tfrac{1}{2}\pi)x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(3,x)\partial x$$
$$= -\left[\cos x + \frac{1}{3^4}\cos 3x + \frac{1}{5^4}\cos 5x + \dots\right]$$
$$= \varphi(4,x).$$

Setzt man im Allgemeinen:

$$23.\quad \begin{cases} (-1)^{r+1}\left[\cos x + \frac{1}{3^{2r}}\cos 3x + \frac{1}{5^{2r}}\cos 5x + \dots\right] = \varphi(2r,x), \\ (-1)^{r+1}\left[\sin x + \frac{1}{3^{2r+1}}\sin 3x + \frac{1}{5^{2r+1}}\sin 5x + \dots\right] = \varphi(2r+1,x), \end{cases}$$

so erhält man

$$24.\quad \begin{cases} \varphi(2,x) = -\tfrac{1}{4}\pi x + \tfrac{1}{8}\pi^2, \\ \varphi(3,x) = \int_0^x \varphi(2,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2,x)\partial x - F(3,\tfrac{1}{2}\pi) \\ \qquad = \int_{\frac{1}{2}\pi}^x \varphi(2,x)\partial x - F(3,\tfrac{1}{2}\pi), \\ \varphi(4,x) = \int_0^x \varphi(3,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(3,x)\partial x = \int_{\frac{1}{2}\pi}^x \varphi(3,x)\partial x, \\ \varphi(5,x) = \int_0^x \varphi(4,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(4,x)\partial x - F(5,\tfrac{1}{2}\pi) \\ \qquad = \int_{\frac{1}{2}\pi}^x \varphi(4,x)\partial x - F(5,\tfrac{1}{2}\pi), \\ \varphi(6,x) = \int_0^x \varphi(5,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(5,x)\partial x = \int_{\frac{1}{2}\pi}^x \varphi(5,x)\partial x, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(2r,x) = \int_0^x \varphi(2r-1,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2r-1,x)\partial x \\ \qquad = \int_{\frac{1}{2}\pi}^x \varphi(2r-1,x)\partial x, \\ \varphi(2r+1,x) = \int_0^x \varphi(2r,x)\partial x - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\varphi(2r,x)\partial x - F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi \\ \qquad = \int_{\frac{1}{2}\pi}^x \varphi(2r,x)\partial x - F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi). \end{cases}$$

Die Formeln (23.) gelten für $x > 0$ und $< \pi$.

§. 26.

Die Formeln (16. und 17. §. 22.) geben, wenn man $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x setzt:

$$25.\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\pi-x)^{2r}}{2r!} - \frac{\pi^2 B_1(\frac{1}{2}\pi-x)^{2r-2}}{(2r-2)!} + \frac{\pi^4 B_2(\frac{1}{2}\pi-x)^{2r-4}}{(2r-4)!} - \dots (-1)^r \pi^{2r} B_r$$
$$= (-1)^r\left[\sin x + \frac{1}{2^{2r}}\cos 2x - \frac{1}{3^{2r}}\sin 3x - \frac{1}{4^{2r}}\cos 4x + \dots\right],$$

für $x > -\frac{1}{2}\pi$ und $\overline{\gtrless}\,\frac{1}{2}\pi$;

$$26.\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}\pi-x)^{2r+1}}{(2r+1)!} - \frac{\pi^2 B_1(\frac{1}{2}\pi-x)^{2r-1}}{(2r-1)!} + \frac{\pi^4 B_2(\frac{1}{2}\pi-x)^{2r-3}}{(2r-3)!} - \dots (-1)^r \pi^{2r} B_r(\tfrac{1}{2}\pi-x)$$
$$= (-1)^r\left[\cos x - \frac{1}{2^{2r+1}}\sin 2x - \frac{1}{3^{2r+1}}\cos 3x + \frac{1}{4^{2r+1}}\sin 4x + \frac{1}{5^{2r+1}}\cos 5x - \dots\right],$$

für $x > -\frac{1}{2}\pi$ und $\overline{\gtrless}\,\frac{1}{2}\pi$.

Setzt man in den nämlichen Formeln $\pi - x$ statt x, so erhält man

$$27.\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot(\pi-x)^{2r}}{2r!} - \frac{\pi^2 B_1(\pi-x)^{2r-2}}{(2r-2)!} + \frac{\pi^4 B_2(\pi-x)^{2r-4}}{(2r-4)!} - \dots (-1)^r \pi^{2r} B_r$$
$$= (-1)^{r+1}\left[\cos x + \frac{1}{2^{2r}}\cos 2x + \frac{1}{3^{2r}}\cos 3x + \frac{1}{4^{2r}}\cos 4x + \dots\right],$$

für $x > 0$ und $\overline{\gtrless}\,\pi$;

$$28.\quad \frac{\frac{1}{2}\cdot(\pi-x)^{2r+1}}{(2r+1)!} - \frac{\pi^2 B_1(\pi-x)^{2r-1}}{(2r-1)!} + \frac{\pi^4 B_2(\pi-x)^{2r-3}}{(2r-3)!} - \dots (-1)^r \pi^{2r} B_r(\pi-x)$$
$$= (-1)^r\left[\sin x + \frac{1}{2^{2r+1}}\sin 2x + \frac{1}{3^{2r+1}}\sin 3x + \frac{1}{4^{2r+1}}\sin 4x + \dots\right],$$

für $x > 0$ und $\overline{\gtrless}\,\pi$.

Die Formeln (19. und 20. §. 23.) geben, wenn man $(\pi - x)$ statt x setzt:

$$29.\quad \frac{\frac{1}{8}\cdot(\pi-x)^{2r}\pi}{2r!} + \frac{2F(3,\frac{1}{2}\pi)(\pi-x)^{2r-2}}{(2r-2)!} + \dots + 2^{2r-1}F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= (-1)^r 2^{2r-1}\left[\sin\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{3^{2r+1}}\sin\tfrac{3}{2}x + \frac{1}{5^{2r+1}}\sin\tfrac{5}{2}x + \dots\right];$$

$$30.\quad \frac{\frac{1}{8}\cdot(\pi-x)^{2r+1}\pi}{(2r+1)!} + \frac{2F(3,\frac{1}{2}\pi)(\pi-x)^{2r-1}}{(2r-1)!} + \dots + 2^{2r-1}F(2r+1,\tfrac{1}{2}\pi)(\pi-x)$$
$$= (-1)^r 2^{2r}\left[\cos\tfrac{1}{2}x + \frac{1}{3^{2r+1}}\cos\tfrac{3}{2}x + \frac{1}{5^{2r+1}}\cos\tfrac{5}{2}x + \dots\right].$$

Die beiden letzten Formeln gelten für $x > 0$ und $\overline{\gtrless}\,\pi$.

Setzt man in den Formeln (23. §. 25.) $\frac{1}{2}\pi - x$ statt x, so erhält man:

$$31.\quad \begin{cases} (-1)^{r+1}\left[\sin x - \frac{1}{3^{2r}}\sin 3x + \frac{1}{5^{2r}}\sin 5x - \dots\right] = \varphi(2r, \tfrac{1}{2}\pi - x), \\ (-1)^{r+1}\left[\cos x - \frac{1}{3^{2r+1}}\cos 3x + \frac{1}{5^{2r+1}}\cos 5x - \dots\right] = \varphi(2r+1, \tfrac{1}{2}\pi - x), \end{cases}$$

für $x > -\frac{1}{2}\pi$ und $< \frac{1}{2}\pi$.

Setzt man aber in den nämlichen Formeln $\pi - x$ statt x, so ergiebt sich:

$$(-1)^r\left[\cos x + \frac{1}{3^{2r}}\cos 3x + \frac{1}{5^{2r}}\cos 5x + \ldots\right] = \varphi(2r, \pi - x),$$

$$(-1)^{r+1}\left[\sin x + \frac{1}{3^{2r+1}}\sin 3x + \frac{1}{5^{2r+1}}\sin 5x + \ldots\right] = \varphi(2r+1, \pi - x),$$

für $x > 0$ und $< \pi$. Also ist

$$\varphi(2r, \pi - x) = -\varphi(2r, x),$$
$$\varphi(2r+1, \pi - x) = \varphi(2r+1, x).$$

§. 27.

Man setze in der Formel (21. §. 11.) $f(u) = e^{mu}$, so erhält man:

$$\int^{\pi} \sin nu \cdot e^{mu}\,\partial u = \frac{n}{m^2 + n^2}(1 - \cos n\pi \cdot e^{m\pi}),$$

also giebt die erwähnte Formel

$$e^{mx} = \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{n}{m^2+n^2}(1 - \cos n\pi \cdot e^{m\pi})\sin nx,$$

das heifst

32. $\frac{1}{2}\pi \cdot e^{mx}$

$$= \frac{1}{m^2+1}(1 + e^{m\pi})\sin x + \frac{2}{m^2+4}(1 - e^{m\pi})\sin 2x + \frac{3}{m^2+9}(1 + e^{m\pi})\sin 3x + \ldots,$$

gültig für $x > 0$ und $< \pi$.

Setzt man eben so in der Formel (30. §. 14.) $\alpha = \pi$, $f(u) = e^{mu}$, so erhält man

$$\int_0^{\pi} f(u)\,\partial u = \frac{e^{m\pi}}{m} - \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} f(u) \cdot \cos nu \cdot \partial u = \frac{m\cos n\pi \cdot e^{m\pi} - m}{m^2 + n^2},$$

also

$$e^{mx} = \frac{e^{m\pi} - 1}{m\pi} + \frac{2m}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m^2+n^2}(\cos n\pi \cdot e^{m\pi} - 1)\cos nx \quad \text{und}$$

33. $$\frac{\pi e^{mx}}{2m} - \frac{e^{m\pi} - 1}{2m^2} = -\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+1}\cos x + \frac{e^{m\pi}-1}{m^2+4}\cos 2x - \frac{e^{m\pi}+1}{m^2+9}\cos 3x + \ldots,$$

für $x > 0$ und $< \pi$.

Setzt man in der Formel (32. dieses Paragraphs) $\pi - x$ statt x, so erhält man

34. $$\tfrac{1}{2}\pi \cdot e^{m(\pi - x)} = \frac{1}{m^2+1}(1 + e^{m\pi})\sin x - \frac{2}{m^2+4}(1 - e^{m\pi})\sin 2x + \ldots,$$

für $x > 0$ und $< \pi$; desgleichen aus (33.):

35. $$\frac{\pi e^{m(\pi - x)}}{2\pi} - \frac{e^{m\pi} - 1}{2m^2} = \frac{e^{m\pi}+1}{m^2+1}\cos x + \frac{e^{m\pi}-1}{m^2+4}\cos 2x + \frac{e^{m\pi}+1}{m^2+9}\cos 3x + \ldots,$$

für $x > 0$ und $< \pi$.

Es wäre nicht schwer, durch Integration weitere Reihensummen zu finden; allein es ist hier nicht von Interesse, diese weiteren Anwendungen zu machen.

Man setze in der Formel (27. §. 13.) $k = \pi$, so giebt sie

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\partial u \cdot \sin\tfrac{1}{2}n(u+\pi)\cdot \sin\tfrac{1}{2}n\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\partial u \sum_1^\infty (\sin\tfrac{1}{2}nu\cdot\cos\tfrac{1}{2}n\pi\cdot\sin\tfrac{1}{2}n\pi + \cos\tfrac{1}{2}nu\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}n\pi).$$

Aber $\cos\frac{1}{2}n\pi\cdot\sin\frac{1}{2}n\pi$ ist immer Null, also hat man

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cdot\cos\tfrac{1}{2}nu\cdot\partial u\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}n\pi.$$

Man setze hierin nun $f(u) = e^{mu}$, so ergiebt sich

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{mu}\cdot\cos\tfrac{1}{2}nu\cdot\partial u = \frac{4m\cos\frac{1}{2}n\pi}{4m^2+n^2}(e^{m\pi}-e^{-m\pi}) + \frac{2n\sin\frac{1}{2}n\pi}{4m^2+n^2}(e^{m\pi}+e^{-m\pi}),$$

also

$$1 = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{2n\cdot\sin^3\frac{1}{2}n\pi}{4m^2+n^2}(e^{m\pi}+e^{-m\pi}) \quad \text{oder}$$

$$36. \quad \frac{\pi}{2(e^{m\pi}+e^{-m\pi})} = \frac{1}{4m^2+1} - \frac{3}{4m^2+9} + \frac{5}{4m^2+25} - \dots;$$

was auch m sei. Für $m = 0$ findet sich

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \dots;$$

wie bekannt.

Auf ähnliche Art lassen sich noch andere Formeln ableiten, deren Bildung jedoch einfach ist. Es liefsen sich überhaupt auch andere unendliche Reihen denken, als solche, die blofs nach Potenzen von x, oder nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von x fortschreiten. Es ist dies ein Gegenstand, der noch zu betrachten ist; wir haben im Vorstehenden blofs einige der unmittelbarsten Resultate angegeben, die aus den allgemeinen Formeln fliefsen, und die zugleich maafsgebend bei andern Bildungen dieser Art sein können.

Sinsheim im April 1845.

Fac simi

01

Molto Rev.do P.

Mi consolo infinitam
tutte le difficoltà da
stimatiss.o in data
so che di buona voglia

ni
le

...esposto nel giornale arcadico per l'ultimo trimestre 1845.

altrettante superficie curve, che come il medesimo Sig^r *Roberts* ha praticato per le curve piane, chiameremo superficie curve del sistema negativo, o semplicemente superficie curve *negative* *). Ciò posto, come nel sistema positivo una qualunque delle superficie è una derivata *positiva* della sua antecedente, così essa stessa sarà una superficie derivata *negativa* della sua consecutiva: viceversa, come una qualunque delle superficie nel sistema negativo è una derivata *negativa* della sua antecedente, così essa stessa sarà una superficie derivata *positiva* della sua consecutiva. Le superficie curve del doppio sistema godono di un' interessante proprietà che è ben di conoscere. Se dal consueto punto fisso si conducano i raggi vettori ai punti corrispondenti di ciascuna superficie nel doppio sistema, condotti i piani tangenti ai medesimi punti saranno tutti eguali gli angoli formati dalla stessa parte dai piani tangenti con i respettivi raggi vettori. L'enunciata proprietà porge un' estensione ad una proposizione somigliante trovata dal Sig^r *Roberts* per le curve piane, la quale gli ha somministrato una formola generale per la rettificazione di una qualunque delle curve del doppio sistema. Quantunque sia assai facile di stabilire le formole generali dalle quali dipende la natura delle superficie derivate positive, e negative, contuttociò non sarà inutile che in questa addizione ci fermiamo primieramente sopra la maniera di rappresentare l'equazioni delle medesime, facendo uso delle note equazioni del piano tangente e della normale: la scelta del punto fisso, dal quale si devono abbassare le perpendicolari essendo in nostro arbitrio, noi per non complicare di soverchio le formole, prenderemo questo punto per l'origine delle coordinate. In appresso risolveremo un problema sulla quadratura di qualche superficie *negativa* derivata dal centro di una superficie del secondo ordine: Problemi simili di quadratura, e cubatura si trovano già risoluti per le superficie positive nella citata Memoria.

3°. Sieno x, y, z le coordinate ortogonali di un punto qualunque di una superficie curva rappresentata dall' equazione generale

$$u = F(x, y, z) = 0.$$

Conducendo per il punto (x, y, z) un piano tangente, e chiamando X, Y, Z

---

*) Il Sig^r *Roberts* nella citata Memoria si occupa ancora della rettificazione delle curve, alle quali sieno costantemente tangenti le perpendicolari condotte all' estremità dei raggi vettori, e da esso chiamate curve *negative*. Dimostra che se n indichi il numero delle curve derivate, la formola per la rettificazione delle curve positive passa ad essere quella delle negative col solo cangiare n in, $-n$. Tal' è il motivo della denominazione di curve *positive*, e *negative*.

le coordinate di un punto qualunque di questo piano, si avrà per la sua equazione

$$(X-x)\partial_x u+(Y-y)\partial_y u+(Z-z)\partial_z u = 0,$$

ove $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_z u$ sono secondo le consuete notazioni le derivate parziali dell' equazione $u=0$. Se ora dall' orgine delle coordinate si abbassi una perpendicolare sulla direzione del piano tangente, le sue equazioni saranno

$$\frac{X}{\partial_x u} = \frac{Y}{\partial_y u} = \frac{Z}{\partial_z u}.$$

Nella coesistenza dell' equazioni del piano tangente, e della normale per i medesimi valori di X, Y, Z trovasi l'equazione della nuova superficie, luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari abbassate dall'orgine delle coordinate sopra tutti i piani tangenti: siccome poi le tre variabili x, y, z potremo sempre supporre ridotte a due di quelle, o a due nuove, cosi l'eliminazione delle due ultime variabili fra le riportate equazioni ci farà giungere ad una equazione unica fra le coordinate X, Y, Z quale apparterrà alla superficie in questione. L'eliminazione delle variabili presentando per lo più grandi difficoltà, proporremo piuttosto un' altro metodo, che ci fara scuoprire egualmente bene l'indole della superficie. Osserviamo primieramente che i valori di X, Y, Z essendo di forma lineare in ambedue l'equazioni, si del piano tangente, che della normale, ricaveremo facilmente

$$\frac{X}{\partial_x u} = \frac{Y}{\partial_y u} = \frac{Z}{\partial_z u} = \frac{X\partial_x u+Y\partial_y u+Z\partial_z u}{(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_z u)^2},$$

od anche per l'equazione del piano tangente,

$$\frac{X}{\partial_x u} = \frac{Y}{\partial_y u} = \frac{Z}{\partial_z u} = \frac{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u}{(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_z u)^2},$$

d'onde

$$X = \frac{\partial_x u(x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u)}{(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_z u)^2}, \quad Y = \frac{\partial_y u(x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u)}{(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_z u)^2},$$

$$Z = \frac{\partial_z u(x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u)}{(\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_z u)^2}.$$

Tali sono i valori delle coordinate X, Y, Z della superficie derivata positiva in funzione delle coordinate x, y, z del punto corrispondente nella superficie primitiva. Le tre variabili x, y, z potendosi ridurre a sole due, l'equazione della superficie sarà la risultante dall' eliminazione di queste due ultime variabili. Volendo calcolare il raggio R condotto dall' orgine al punto (X, Y, Z), si ricaverà

$$R = \pm\frac{(x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u)}{\sqrt{((\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_y u)^2)}}.$$

La distanza R non è altro che la perpendicolare abbassata dall' origine sopra la direzione del piano tangente la superficie curva nel punto (x, y, z). Quando l'equazione della superficie fosse risoluta rapporto ad una delle variabili z in modo da essere

$$u = f(x, y, z) - z = 0,$$

allora, ponendo per le derivate parziali:

$$\partial_x u = z', \quad \partial_y u = z_1, \quad \partial_z u = -1,$$

si troverà

$$X = \frac{z'(xz' + yz_1 - z)}{1 + z'^2 + z_1^2}, \quad Y = \frac{z_1(xz' + yz_1 - z)}{1 + z'^2 + z_1^2}, \quad Z = \frac{-(xz' + yz_1 - z)}{1 + z'^2 + z_1^2}.$$

Il raggio R diviene

$$R = \pm \frac{(xz' + yz_1 - z)}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_1^2)}}.$$

Le precedenti formole sono tutte quelle che possono occorrere volendo far uso delle coordinate ortogonali.

4°. Per mostrare una qualche applicazione, prendiamo un' ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

avremo dalla derivazione dell' equazione $u = 0$,

$$\partial_x u = \frac{2x}{a^2}, \quad \partial_y u = \frac{2y}{b^2}, \quad \partial_z u = \frac{2z}{c^2},$$

d'onde

$$X = \frac{x}{a^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}, \quad Y = \frac{y}{b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}, \quad Z = \frac{z}{c^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}$$

ed insieme

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}}.$$

Ognun vede che il raggio R è la nota espressione della perpendicolare abbassata dal centro dell'ellissoide sopra il piano tangente. L'eliminazione delle x, y, z si rende qui assai facile: infatti moltiplicando respettivamente i valori di X, Y, Z per a, b, c, ed elevando al quadrato, si troverà dalla somma dei quadrati

$$a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2 = \frac{1}{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^2}.$$

Ora il secondo membro è evidentemente la quarta potenza del raggio

$$R = \sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$$

e perciò

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2 = a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2.$$

Quest' equazione di quarto grado appartiene alla prima superficie derivata positiva dal centro dell'ellissoide ed è precisamente quella alla quale giunsi nella mia precedente Memoria per considerazioni alquanto diverse. Avuto riguardo alla doppia espressione di R, dai valori di X, Y, Z si dedurrà reciprocamente

$$x = \frac{a^2X}{X^2+Y^2+Z^2}, \quad y = \frac{b^2Y}{X^2+Y^2+Z^2}, \quad z = \frac{c^2Z}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Sostituendo poi questi valori o nell' equazione dell' ellissoide, o nell' espressione della distanza R, si giungerà in ambedue modi alla riportata equazione della superficie del quarto ordine. Osservando in fine che l'equazione dell'ellissoide vien verificata dai valori

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\omega, \quad z = c\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

otterremo per X, Y, Z le formole

$$X = \frac{ab^2c^2\cos\theta}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\omega+a^2b^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\omega},$$

$$Y = \frac{ba^2c^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\omega}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\omega+a^2b^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\omega},$$

$$Z = \frac{ca^2b^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\omega}{b^2c^2\cos^2\theta+a^2c^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\omega+a^2b^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\omega}.$$

Queste nouve espressioni potrebbero utilmente adoprarsi nella ricerca della quadratura della superficie, o nella cubatura del solido.

5°. Volendo proseguire alla ricerca della seconda superficie derivata positiva dal centro dell' ellissoide, mutereme X, Y, Z in x, y, z cosicche prendendo l'equazione alla superficie del quarto ordine

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

si abbia dalle derivate parziali:

$$\partial_x u = 2x(x^2+y^2+z^2-a^2), \quad \partial_y u = 2y(x^2+y^2+z^2-b^2),$$
$$\partial_z u = 2z(x^2+y^2+z^2-c^2)$$

quindi ritenuto $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, si ricaverà dalle formole generali dell' antecedente parag. 3°:

$$X = \frac{r^4x(2r^2-a^2)}{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}, \quad Y = \frac{r^4y(2r^2-b^2)}{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}, \quad Z = \frac{r^4z(2r^2-c^2)}{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}.$$

Il corrispondente raggio R sarà egualmente

$$R = \frac{r^4}{\sqrt{(a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2)}}.$$

Qui l'eliminazione delle x, y, z si rende difficile, e l'equazione della nuova superficie fra le coordinate X, Y, Z sarà di un grado molto elevato: quante volte adunque non venga data l'equazione della superficie fra le coordinate ortogonali, sarà alquanto complicato il proseguire alla ricerca dei valori delle coordinate della nuova superficie derivata, e converrebbe adoprare delle trasformazioni, le quali hanno luogo nel cangiamente delle variabili indipendenti. Chi volesse esprimere i valori di X, Y, Z e della distanze R per mezzo delle coordinate, e del raggio corrispondenti al punto (x', y', z') dell'ellissoide, avrà a sostituire nelle precedenti formole i respettivi valori di x, y, z, r di già ottenuti al principio del parag. 4°, vale a dire

$$x = \frac{x'}{a^2\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)}, \qquad y = \frac{y'}{b^2\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)},$$

$$z = \frac{z'}{c^2\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)}, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)}};$$

mà sarà qui opportuno di mettere a profitto la proprietà menzionata al parag. 2°, della quale godono le superficie derivate, e relativa all' eguaglianza degli angoli formati dai piani tangenti con i raggi vettori. Sia infatti ρ il raggio vettore condotto dal centro dell' ellissoide al punto (x', y', z'), e sieno r, R i raggi delle due superficie derivate condotti ai punti (x, y, z), (X, Y, Z), e sia infine α uno degli angoli formati dal piano tangente con il raggio vettore, si avrà

$$r = \rho \operatorname{sen} \alpha, \qquad R = r \operatorname{sen} \alpha,$$

quindi

$$R = \frac{r^2}{\rho}.$$

Pongasi ora per brevità

$$\xi = \cos\theta, \qquad \eta = \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \qquad \zeta = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega,$$

l'equazione dell' ellissoide porgerà

$$x' = a\xi, \qquad y' = b\eta, \qquad z' = c\zeta,$$

dalle quali

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)}}, \qquad \rho = \sqrt{(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)}$$

e perciò

$$R = \frac{1}{\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)\sqrt{(a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2)}}.$$

Tal' è il valore di R, che si sarebbe potuto ottenere da una successiva sostituzione. I valori poi di x, y, z danno

$$a^2x = r^2x', \quad b^2y = r^2y', \quad c^2z = r^2z',$$
$$a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2 = r^4\rho^2.$$

Con queste differenti sostituzioni otteniamo

$$X = \frac{r^2\xi}{a}\cdot\frac{2r^2-a^2}{\rho^2}, \quad Y = \frac{r^2\eta}{b}\cdot\frac{2r^2-b^2}{\rho^2}, \quad Z = \frac{r^2\zeta}{c}\cdot\frac{2r^2-c^2}{\rho^2}.$$

Ognun vede che i nuovi valori di X, Y, Z dipendono dopo la sostituzione del valore di r dai soli elementi dell' ellissoide. Infine faremo un' osservazione tutta propria delle applicazioni, che abbiamo scelta. L'equazione alla superficie del quarto ordine

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

per la sostituzione di $r^2 = x^2+y^2+z^2$ si potrà presentare sotto la forma

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r^2}{a}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r^2}{b}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{r^2}{c}\right)^2} = 1,$$

la quale si verificherà dall' equazioni sferiche

$$\frac{ax}{r^2} = \cos\theta, \quad \frac{by}{r^2} = \operatorname{sen}\theta\cos\omega, \quad \frac{cz}{r^2} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega,$$

e che risolute rapporto ad x, y, z coincideranno con i valori di già stabiliti in questo parag. 6°. Le formole generali ottenute al parag. 3° potranno forse più facilmente prestarsi per la risoluzione di un qualche problema, qualora si faccia uso delle equazioni fra le coordinate polari, ciò che noi verremo brevemente ad indicare. Ritenuto che $u=0$ sia l'equazione alla superficie primitiva fra le coordinate ortogonali x, y, z, supponiamo che sieno funzioni di tre nuove variabili r, p, q si avrà dalle note formole sul cangiamento delle variabili nei differenziali delle funzioni

$$\partial_x u = \partial_r u\,\partial_x r+\partial_p u\,\partial_x p+\partial_q u\,\partial_x q,$$
$$\partial_y u = \partial_r u\,\partial_y r+\partial_p u\,\partial_y p+\partial_q u\,\partial_y q,$$
$$\partial_z u = \partial_r u\,\partial_z r+\partial_p u\,\partial_z p+\partial_q u\,\partial_z q.$$

Riducendosi le variabili r, p, q a tre coordinate polari determinate dall'equazioni

$$x = r\cos p, \quad y = r\operatorname{sen}p\cos q, \quad z = r\operatorname{sen}p\operatorname{sen}q,$$

si ricaverà reciprocamente

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \cos p = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \quad \operatorname{tang} q = \frac{z}{y},$$

nelle quali eseguendo le derivazioni parziali rapporto ad x, y, z si troverà dalla sostituzione

$$\partial_x u = \cos p\, \partial_r u - \frac{\operatorname{sen} p}{r} \partial_p u,$$

$$\partial_y u = \operatorname{sen} p \cos q\, \partial_r u + \frac{\cos p \cos q}{r} \partial_p u - \frac{\operatorname{sen} q}{r \operatorname{sen} p} \partial_q u,$$

$$\partial_z u = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q\, \partial_r u + \frac{\cos p \operatorname{sen} q}{r} \partial_p u + \frac{\cos q}{r \operatorname{sen} p} \partial_q u.$$

Queste equazioni di forma lineare rapporto a tutte le derivate parziali, porgeranno dalla loro risoluzione i valori delle derivate $\partial_r u$, $\partial_p u$, $\partial_q u$ in funzione delle $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_z u$: i riportati valori delle derivate danno egualmente

$$x\partial_x u + y\partial_y u + z\partial_z u = r\partial_r u,$$

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + (\partial_z u)^2 = (\partial_r u)^2 + \frac{(\partial_p u)^2}{r^2} + \frac{(\partial_q u)^2}{r^2}.$$

Di qui le citate formole del parag. 3°, le quali rappresentano i valori delle coordinate X, Y, Z della prima superficie derivata positiva si trasformeranno in

$$X = \frac{r^2 \partial_r u (r \cos p\, \partial_r u - \operatorname{sen} p\, \partial_p u)}{r^2 (\partial_r u)^2 + (\partial_p u)^2 + (\partial_q u)^2},$$

$$Y = \frac{r^2 \partial_r u (r \operatorname{sen}^2 p \cos q\, \partial_r u + \operatorname{sen} p \cos p \cos q\, \partial_p u - \operatorname{sen} q\, \partial_q u)}{r^2 (\partial_r u)^2 + (\partial_p u)^2 + (\partial_q u)^2},$$

$$Z = \frac{r^2 \partial_r u (r \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen} q\, \partial_r u + \operatorname{sen} p \cos p \operatorname{sen} q\, \partial_p u + \cos q\, \partial_q u)}{r^2 (\partial_r u)^2 + (\partial_p u)^2 + (\partial_q u)^2}.$$

Il raggio R diverrà

$$R = \pm \frac{r^2 \partial_r u}{\sqrt{\{r^2 (\partial_r u)^2 + (\partial_p u)^2 + (\partial_q u)^2\}}}.$$

Per aggiungere ad R le altre coordinate polari, P, Q, non avremo che a porre

$$X = R \cos P, \quad Y = R \operatorname{sen} P \cos Q, \quad Z = R \operatorname{sen} P \operatorname{sen} Q,$$

d' onde si troverebbero due funzioni trigonometriche di P, Q espresse per r, p, q. Se l'equazione della superficie primitiva trovasi risoluta rapporto ad una delle variabili r, in modo da essere

$$u = f(p, q) - r = 0,$$

porremo per le derivate parziali

$$\partial_r u = -1, \quad \partial_p u = r', \quad \partial_q u = r_1,$$

ed allora i precedenti valori di X, Y, Z, R si cangieranno in

$$X=\frac{r^2(r\cos p+r'\operatorname{sen}p)}{r^2+r'^2+r_1^2},$$

$$Y=\frac{r^2(r\operatorname{sen}^2p\cos q-r'\operatorname{sen}p\cos p\cos q+r_1\operatorname{sen}q)}{r^2+r'^2+r_1^2},$$

$$Z=\frac{r^2(r\operatorname{sen}^2p\operatorname{sen}q-r'\operatorname{sen}p\cos p\operatorname{sen}q-r_1\cos q)}{r^2+r'^2+r_1^2},$$

$$R=\pm\frac{r^2}{\sqrt{(r^2+r'^2+r_1^2)}}.$$

La scelta, e l'uso di queste differenti formole dipenderà generalmente dalla natura della questione che s'intraprende a risolvere.

7°. Passiamo ora alle superficie derivate del sistema negativo. Le superficie curve in questione sono toccate da piani perpendicolari condotti all'estremità dei raggi vettori di una data superficie curva. A questo oggetto sia secondo il consueto $u=0$ l'equazione della superficie primitiva fra le coordinate ortogonali x, y, z, e riteniamo che il punto fisso dal quale partano i raggi vettori coincida con l'origine. Ciò posto, se all' estremità di un raggio vettore condotto dall'origine al punto (x, y, z) si conduca per lo stesso punto un piano perpendicolare, avremo per la sua equazione

$$1.\quad Xx+Yy+Zz=x^2+y^2+z^2,$$

ove X, Y, Z sono le coordinate di un punto qualunque del piano. Onde queste equazioni possano servire alla risoluzione del proposto problema, converrà differenziarle parzialmente rapporto ad x, ed y, e quindi dedurre due nuove equazioni risultanti dall' eliminazione dei coefficienti differenziali. Ponendo adunque per le derivate parziali

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

avremo dall' equazione $u=0$:

$$\partial_x u+p\,\partial_z u=0,\qquad \partial_y u+q\,\partial_z u=0,$$

come dalla (1.) si ricaverà egualmente

$$X-2x+(Z-2z)p=0,\qquad Y-2y+(Z-2z)q=0.$$

Eliminando fra queste ultime quattro le derivate parziali p, q, si avrà

$$2.\quad (X-2x)\partial_z u-(Z-2z)\partial_x u=0,\quad (Y-2y)\partial_z u-(Z-2z)\partial_y u=0.$$

L'equazione della nuova superficie sarà la risultante dall' eliminazione delle x, y, z fra la $u=0$ e le (1.), (2.); contuttocio come già si è praticato

per le superficie del sistema positivo, potremo dedurre i valori delle X, Y, Z in funzione delle x, y, z; infatti dalle (2.) abbiamo

$$\frac{X-2x}{\partial_x u}=\frac{Y-2y}{\partial_y u}=\frac{Z-2z}{\partial_z u}=\frac{Xx+Yy+Zz-2(x^2+y^2+z^2)}{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u},$$

od anche per la (1.)

$$\frac{X-2x}{\partial_x u}=\frac{Y-2y}{\partial_y u}=\frac{Z-2z}{\partial_z u}=-\frac{(x^2+y^2+z^2)}{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u},$$

dalle quali otteniamo

$$X=\frac{(x^2-y^2-z^2)\partial_x u+2xy\,\partial_y u+2xz\,\partial_z u}{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u},$$

$$Y=\frac{(y^2-x^2-z^2)\partial_y u+2xy\,\partial_x u+2yz\,\partial_z u}{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u},$$

$$Z=\frac{(z^2-x^2-y^2)\partial_z u+2yz\,\partial_y u+2xz\,\partial_x u}{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u}.$$

Quando le variabili X, Y, Z si riducano a funzioni date di due sole delle tre x, y, z o almeno dipendano da sole due altre variabili, allora l'eliminazione di queste fra le tre precedenti equazioni si farà giungere all' equazione della prima superficie derivata negativa fra le coordinate X, Y, Z. La distanza R dall' origine allo stesso punto (X, Y, Z) sarà

$$R=\pm\frac{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{((\partial_x u)^2+(\partial_y u)^2+(\partial_z u)^2)}}{x\partial_x u+y\partial_y u+z\partial_z u}.$$

Se come già si è fatto al parag. 3° l'equazione della superficie primitiva fosse risoluta rapporto a z, i valori di X, Y, Z prenderanno la forma

$$X=\frac{(x^2-y^2-z^2)z'+2xyz_1-2xz}{xz'+yz_1-z},$$

$$Y=\frac{(y^2-x^2-z^2)z_1+2xyz'-2yz}{xz'+yz_1-z},$$

$$Z=-\frac{(z^2-x^2-y^2)+2yzz_1+2xzz'}{xz'+yz_1-z}.$$

Similmente il raggio R si ridurrà ad

$$R=\pm\frac{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{(1+z'^2+z_1^2)}}{xz'+yz_1-z}.$$

Secondo un'osservazione stabilita al parag. 2° questa prima superficie derivata negativa, avrà per sua prima derivata positiva la stessa $u=0$, e percio supposto Z funzione di X, Y ed indicando per Z', Z_1 le derivate parziali rapporto alle stesse X, Y; dai precedenti valori di X, Y, Z si devrà avere recipro-

camente per le ultime formole del parag. 3°:

$$x = \frac{Z'(XZ'+YZ_1-Z)}{1+Z'^2+Z_1^2}, \qquad y = \frac{Z_1(XZ'+YZ_1-Z)}{1+Z'^2+Z_1^2},$$

$$z = -\frac{(XZ'+YZ_1-Z)}{1+Z'^2+Z_1^2}, \qquad r = \pm\frac{(XZ'+YZ_1-Z)}{\sqrt{(1+Z'^2+Z_1^2)}};$$

d'onde ne segue, che questi valori sostituiti nell' espressioni di X, Y, Z, R le renderanno necessariamente identiche.

8°. Si prenda un' ellissoide per superficie primitiva, e cerchiamo l'equazioni della sua prima derivata negativa dal centro; avremo, come già si è veduto:

$$\partial_x u = \frac{2x}{a^2}, \qquad \partial_y u = \frac{2y}{b^2}, \qquad \partial_z u = \frac{2z}{c^2},$$

d'onde i primi valori di X, Y, Z dell'antecedente parag. diverranno

$$X = \frac{x(b^2c^2x^2+c^2(2a^2-b^2)y^2+b^2(2a^2-c^2)z^2)}{a^2b^2c^2},$$

$$Y = \frac{y(a^2c^2y^2+c^2(2b^2-a^2)x^2+a^2(2b^2-a^2)z^2)}{a^2b^2c^2},$$

$$Z = \frac{z(a^2b^2z^2+b^2(2c^2-a^2)x^2+a^2(2c^2-b^2)y^2)}{a^2b^2c^2}.$$

Le variabili x, y, z nell'equazione dell'ellissoide si possono far dipendere da sole due, poiche fatto per brevità

$$u = \cos p, \qquad v = \operatorname{sen} p \cos q, \qquad w = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q,$$

avremo anche

$$x = au, \qquad y = bv, \qquad z = cw,$$

e perciò

$$X = \frac{u}{a}(a^2u^2+(2a^2-b^2)v^2+(2a^2-c^2)w^2),$$

$$Y = \frac{v}{b}(b^2v^2+(2b^2-a^2)u^2+(2b^2-c^2)w^2),$$

$$Z = \frac{w}{c}(c^2w^2+(2c^2-a^2)u^2+(2c^2-b^2)v^2).$$

Se fra queste tre elimineremo le due variabili p, q, la nuova equazione fra X, Y, Z apparterrà alla prima superficie derivata negativa dal centro dell' ellissoide. In egual modo si ricaverà dalla formola generale per il raggio vettore R condotto dal centro dell' ellissoide al punto (X, Y, Z) della nuova superficie:

$$R = (x^2+y^2+z^2)\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}.$$

Indicando con P la perpendicolare abbassata dal centro dell' ellissoide sulla direzione del piano tangente, e ritenuto per r il raggio vettore, si avrà facilmente

$$R = \frac{r^2}{P},$$

e che si ridurrà ad

$$R = \frac{(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2)\sqrt{(b^2 c^2 u^2 + a^2 c^2 v^2 + a^2 b^2 w^2)}}{abc}.$$

Le precedenti formole troveranno delle utili applicazioni nella quadratura della superficie.

9°. Riprendiamo per un' istante i valori generali di X, Y, Z, R del parag. 7°, e supponiamo che x, y, z si trasformino in coordinate polari r, p, q, noi otterremo con facilità

$$X = \frac{r \cos p\, \partial_r u + \operatorname{sen} p\, \partial_p u}{\partial_r u},$$

$$Y = \frac{r \operatorname{sen} p \cos q\, \partial_r u - \cos p \cos q\, \partial_p u + \frac{\operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p}\, \partial_q u}{\partial_r u},$$

$$Z = \frac{r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q\, \partial_r u - \cos p \operatorname{sen} q\, \partial_p u - \frac{\cos q}{\operatorname{sen} p}\, \partial_q u}{\partial_r u},$$

$$R = \pm \frac{\sqrt{\{r^2 (\partial_r u)^2 + (\partial_p u)^2 + (\partial_q u)^2\}}}{\partial_r u}.$$

Se l'equazione polare della superficie sia risoluta rapporto ad r, allora, come già si è veduto per le superficie del sistema positivo, si ricaverà

$$X = r \cos p - r' \operatorname{sen} p, \qquad Y = r \operatorname{sen} p \cos q + r' \cos p \cos q - \frac{r_1 \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p},$$

$$Z = r \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q + r' \cos p \operatorname{sen} q + \frac{r_1 \cos q}{\operatorname{sen} p}, \qquad R = \pm \sqrt{(r^2 + r'^2 + r_1^2)}.$$

Reciprocamente i valori delle coordinate x, y, z, e del raggio r si potrebbero esprimere per le coordinate polari della nuova superficie con formole del tutto somiglianti a quelle che termina il parag. 6°.

10°. Terminiamo questa prima parte dell' addizzione col dimostrare l'eguaglianza degli angoli formati dai piani tangenti con i rispettivi raggi vettori nel doppio sistema positivo, o negativo. Sia α l'angolo formato dal piano tangente la superficie curva $u = 0$ nel punto (x, y, z) con il raggio r condotto dall' origine: abbassando dalla stessa origine una perpendicolare R sopra

la direzione del piano tangente, si avrà

$$R = r \operatorname{sen} \alpha \quad \text{o}, \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{R}{r};$$

quindi supposto l'equazione della superficie risoluta rapporto a z, e fatto per le derivate parziali

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

avremo dai valori di R, ed r dalle formole del parag. 3°:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{px + qy - z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

L'estremità della perpendicolare R appartiene a un punto (X, Y, Z) della superficie derivata, e perciò chiamando α' l'angolo formato dal piano tangente la superficie nello stesso punto (X, Y, Z) con il raggio R, e facendo per le derivate parziali

$$P = \frac{dZ}{dX}, \quad Q = \frac{dZ}{dY},$$

si avrà egualmente

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{PX + QY - Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Per conoscere la relazione che passa fra gli angoli α, α', facciamo una supposizione, la quale nulla alterando la generalità della questione, ci potrà nello stesso tempo far giungere con la massima facilità alla medesima conclusione. Riprendiamo dal parag. 3° i valori di X, Y, Z, cioè

$$X = \frac{p(px+qy-z)}{1+p^2+q^2}, \quad Y = \frac{q(px+qy-z)}{1+p^2+q^2}, \quad Z = \frac{z-px-qy}{1+p^2+q^2},$$

e scegliamo il piano xy parallelo al piano tangente, sarà $p=0$, $q=0$, d'onde $X=0$, $Y=0$, $Z=z$ per cui

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}, \quad \operatorname{sen} \alpha' = -\frac{1}{\sqrt{(1+P^2+Q^2)}}.$$

Pongasi in fine per le derivate parziali del secondo ordine

$$r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

le quali potranno ritenere un valor finito quantunque sia $p=0$, $q=0$. Ciò posto, indichiamo per X', X_1, ... le derivate parziali rapporto ad x, ed y delle variabili X, Y, Z, è noto dalle trasformazioni dei differenziali parziali che le derivate P, Q si esprimono per

$$P = \frac{X'Z_1 - X_1 Z'}{X'Y_1 - Y'X_1}, \quad Q = \frac{Y_1 Z' - Z_1 Y'}{X'Y_1 - Y'X_1}.$$

Ora dai valori di X, Y, Z si ottiene col fare dopo le derivazioni $p=0$, $q=0$:

$$X'=-rz,\quad X_1=-sz,\quad Y'=-sz,\quad Y_1=-zt,$$
$$Z'=-(rx+sy),\quad Z_1=-(ty+sx),$$

dalle quali

$$X'Y_1-X_1Y'=z^2(rt-s^2),\quad X'Z_1-X_1Z'=zy(rt-s^2),$$
$$Y_1Z'-Y'Z_1=xz(rt-s^2),$$

e perciò

$$\sqrt{(1+P^2+Q^2)}=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{z}.$$

Da ciò ne segue immediatamente

$$\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\alpha',\quad \text{ed anche}\quad \alpha=\alpha'.$$

Il Sig[r] *Roberts* nella citata Memoria è giunto per una dimostrazione geometrica semplicissima a riconoscere l'eguaglianza degli angoli formati dalle tangenti con i respettivi raggi vettori nelle curve del doppio sistema positivo, e negativo: aggiungiamo di più che il ragionamento del Sig[r] *Roberts* si estende ancora alle superficie curve.

11°. Presentiamo ora delle applicazioni delle precedenti formole alla quadratura di una qualche superficie. È noto che la quadratura delle superficie curve, considerando una delle coordinate Z come funzione delle due altre X, Y, dipende dall' integrale duplicato

$$S=\iint dX\,dY\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dZ}{dX}\right)^2+\left(\frac{dZ}{dY}\right)^2\right\}}.$$

Se le X, Y, Z sieno funzioni di due nuove variabili p, q, e rappresentando per X', Y', Z' le derivate parziali delle X, Y, Z rapporto a p, e per X_1, Y_1, Z_1 le derivate delle medesime rapporto a q, l'integrale relativamente alle nuove variabili p, q si trasformerà in

$$S=\iint dp\,dq\sqrt{(U^2+V^2+W^2)},$$

ove per brevità

$$U=X'Y_1-X_1Y',\quad V=X_1Z'-X'Z_1,\quad W=Y'Z_1-Y_1Z'.$$

Queste trasformazioni già conosciute dai geometri, si trovano fra gli altri, per le formole della quadratura, e cubatura nella Teoria delle funzioni di *Lagrange*. Supponiamo adunque che si voglia conoscere la quadratura della superficie curva *negativa* proveniente dal centro dell' ellissoide; se per maggior semplicità si prenda per l'equazione dell' ellissoide

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1,$$

noi avremo dalle formole del parag. 8° per le coordinate X, Y, Z della superficie derivata:

$$X = \frac{u}{\sqrt{a}}(au^2+(2a-b)v^2+(2a-c)w^2),$$

$$Y = \frac{v}{\sqrt{b}}(bv^2+(2b-a)u^2+(2b-c)w^2),$$

$$Z = \frac{w}{\sqrt{c}}(cw^2+(2c-a)u^2+(2c-b)v^2).$$

Le variabili u, v, w, sono le coordinate sferiche

$$u = \cos p, \quad v = \operatorname{sen} p \cos q, \quad w = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q.$$

Facendo le derivazioni rapporto a p, avremo dopo la riduzione dei termini per le potenze di $\operatorname{sen} p$, $\operatorname{sen} q$:

$$X' = \frac{\operatorname{sen} p}{\sqrt{a}}(a-2b+3(b-a)\operatorname{sen}^2 p-2(c-b)\operatorname{sen}^2 q+3(c-b)\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q),$$

$$Y' = \frac{\cos p \cos q}{\sqrt{b}}(2b-a+3(a-b)\operatorname{sen}^2 p+3(b-c)\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q),$$

$$Z' = \frac{\cos p \operatorname{sen} q}{\sqrt{c}}(2c-a+3(a-b)\operatorname{sen}^2 p+3(b-c)\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q).$$

Nella stessa guisa derivando rapporto a q, otteniamo

$$X_1 = \frac{2(b-c)}{\sqrt{a}}\operatorname{sen}^2 p \cos p \operatorname{sen} q \cos q,$$

$$Y_1 = \frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} q}{\sqrt{b}}(a-2b+(3b-a-2c)\operatorname{sen}^2 p+3(c-b)\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q),$$

$$Z_1 = \frac{\operatorname{sen} p \cos q}{\sqrt{c}}(2c-a+(a-b)\operatorname{sen}^2 p-3(c-b)\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q).$$

Formando con queste derivate le differenze dei prodotti indicate da U, V, W, e ponendo ancora

$$R = (a-2b)(a-2c)+2(b-a)(2a-b-3c)\operatorname{sen}^2 p$$
$$-2(c^2-b^2)\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen}^2 q+3(b-a)\operatorname{sen}^4 p$$
$$+6(b-a)(c-b)\operatorname{sen}^4 p \operatorname{sen}^2 q+3(c-b)^2\operatorname{sen}^4 p \operatorname{sen}^4 q,$$

otterremo doppo tutte le richieste riduzioni:

$$U = \frac{\sqrt{c}.R\operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen} q}{\sqrt{(abc)}}, \quad V = \frac{\sqrt{b}.R\operatorname{sen}^2 p \cos q}{\sqrt{(abc)}}, \quad W = \frac{\sqrt{a}.R\operatorname{sen} p \cos p}{\sqrt{(abc)}},$$

d'onde nuovamente per i valori di u, v, w:

$$\sqrt{(U^2+V^2+W^2)} = \frac{R\operatorname{sen} p}{\sqrt{(abc)}}\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)},$$

e perciò la quadratura della superficie dipenderà dall'integrale duplicato

$$S = \frac{1}{\sqrt{(abc)}}\iint R\operatorname{sen} p\, dp\, dq\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}.$$

Integrando fra i limiti $p=0$, $p=\frac{1}{2}\pi$, $q=0$, $q=\frac{1}{2}\pi$, si ottiene l'ottava parte della superficie, per cui la quadratura dell' intera superficie sarà espressa per l'integrale definito duplicato

$$S=\frac{8}{\sqrt{(abc)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}R\operatorname{sen}p\,dp\,dq\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}.$$

Tutto adunque consiste a ridurre questo integrale duplicato ad un integrale semplice, ciò che noi verremo successivamente ad esporre.

12°. Ripreso primieramente il valore di R, si sostituisca nel secondo nel quarto, e nel quinto termine

$$\operatorname{sen}^2 p=1-\cos^2 p,\qquad \operatorname{sen}^4 p=1-2\cos^2 p+\cos^4 p,$$
$$\operatorname{sen}^4 p=\operatorname{sen}^2 p(1-\cos^2 p),$$

si ricavera facilmente per i valori di u, v, w:

$$\begin{aligned}R=&(b-2a)(b-2c)-2(b-a)(2b-a-3c)u^2\\&+2(c-b)(2b-c-3a)w^2+3(b-a)^2u^4\\&-6(b-a)(c-b)u^2w^2+3(c-b)^2w^4.\end{aligned}$$

Una prima integrazione si eseguisce più agevolmente col sostituire due nuove variabili θ, ω invece di p, q ed atte a togliere le irrazionalità. Pongasi

$$\xi=\cos\theta,\qquad \eta=\operatorname{sen}\theta\cos\omega,\qquad \zeta=\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\omega,$$

e supponiamo che fra gli angoli p, q, θ, ω sussistano le relazioni

$$\xi=\frac{\sqrt{a}.u}{\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}},\quad \eta=\frac{\sqrt{b}.v}{\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}},\quad \zeta=\frac{\sqrt{c}.w}{\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)}}.$$

Di questa identica sostituzione ho fatto già uso nella mia precedente Memoria per altre quadratnre, e cubature. Dai valori di ξ, η, ζ si ricavano reciprocamente quei di u, v, w; cosicchè facendo

$$P=\sqrt{(au^2+bv^2+cw^2)},\qquad Q=\sqrt{\left(\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}\right)},$$

si hà non solamente $PQ=1$, mà ben anche

$$u=\frac{\xi}{\sqrt{a}.Q},\qquad v=\frac{\eta}{\sqrt{b}.Q},\qquad w=\frac{\zeta}{\sqrt{c}.Q}.$$

La prima di queste formole è lo stesso che

$$\cos p=\frac{\cos\theta}{\sqrt{a}.\sqrt{\left(\frac{\cos^2\theta}{a}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\omega}{b}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\omega}{c}\right)}},$$

e le altre due dalla divisione di w per v porgono

$$\operatorname{tang}q=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\operatorname{tang}\omega,$$

ove ai limiti stabiliti per p, e q corrispondono i medesimi limiti per θ, ed ω. L'elemento differenziale relativo ai nuovi angoli θ, ω, che si ha da sostituire all'elemento $\operatorname{sen} p\, \partial p\, \partial q$, si trova col differenziare $\cos p$ nella supposizione di q costante, ossia di ω costante, ciò che porge

$$\operatorname{sen} p\, \partial p = \frac{(b \operatorname{sen}^2 \omega + c \cos^2 \omega) \operatorname{sen} \theta\, \partial \theta}{bc.\sqrt{a}.\sqrt{\left(\frac{\cos^2 \theta}{a} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \omega}{b} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \omega}{c}\right)^3}},$$

$$\partial q = \frac{\sqrt{(bc)}\, \partial q}{(b \operatorname{sen}^2 \omega + c \cos^2 \omega)}.$$

Quindi all'elemento $\operatorname{sen} p\, \partial p\, \partial q$ si dovrà sostituire il nuovo elemento

$$\frac{\operatorname{sen} \theta\, \partial \theta\, \partial \omega}{\sqrt{(abc)}\, Q^3}.$$

Elevando la Q al quadrato, abbiamo

$$Q^2 = \frac{bc\xi^2 + ac\eta^2 + ab\zeta^2}{abc},$$

d'onde sostituendo nel valore di R i valori di u, v, w espressi per ξ, η, ζ, e facendo per brevità

$$A = b^2 c^2 (a - 2b)(a - 2c), \qquad B = a^2 c^2 (b - 2a)(b - 2c),$$
$$C = a^2 b^2 (c - 2a)(c - 2b), \qquad A' = abc^2 (ab + ac + bc - a^2 - b^2),$$
$$B' = acb^2 (ab + ac + bc - a^2 - c^2), \qquad C' = bca^2 (ab + ac + bc - b^2 - c^2),$$

si ricaverà

$$R = \frac{A\xi^4 + B\eta^4 + C\zeta^4 + 2A'\xi^2\eta^2 + 2B'\xi^2\zeta^2 + 2C'\eta^2\zeta^2}{(bc\xi^2 + ac\eta^2 + ab\zeta^2)^2}.$$

Pongasi per il numeratore

$$R_1 = A\xi^4 + B\eta^4 + C\zeta^4 + 2A'\xi^2\eta^2 + 2B'\xi^2\zeta^2 + 2C'\eta^2\zeta^2,$$

allora il valore di S dato dall'ultima formola dell'antecedente parag° diverrà

$$S = 8abc \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{R_1 \operatorname{sen} \theta\, \partial \theta\, \partial \omega}{(bc \cos^2 \theta + ac \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \omega + ab \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \omega)^4}.$$

Tal'è il nuovo integrale definito privo d'irrazionalità.

13°. Una prima integrazione definita fra gli indicati limiti si eseguisce facilmente rapporto alla variabile ω. Per semplificare le operazioni analitiche, sia

$$\alpha^2 = c(b \cos^2 \theta + a \operatorname{sen}^2 \theta), \qquad \beta^2 = b(c \cos^2 \theta + a \operatorname{sen}^2 \theta),$$

ed insieme

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4},\qquad V_1=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^4\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4},$$

$$V_2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^4\,\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4},\qquad V_3=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4},$$

$$V_4=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^2\,\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4},\qquad V_5=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^2\,\omega\cos^2\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4},$$

L'integrale definito duplicato dopo la sostituzione dei valori di V, V_1, V_2, ... che verremo a determinare sarà ridotto ad una somma d'integrali definiti semplici. È facile di poter conoscere la forma di questi ultimi integrali definiti. Pongasi

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}V\cos^4\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\partial\theta,\qquad S_1=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}V_1\,\mathrm{sen}^5\,\theta\,\partial\theta,$$

$$S_2=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}V_2\,\mathrm{sen}^5\,\theta\,\partial\theta,\qquad S_3=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}V_3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta\,\partial\theta,$$

$$S_4=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}V_4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta\,\partial\theta,\qquad S_5=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}V_5\,\mathrm{sen}^5\,\theta\,\partial\theta,$$

il valore di S si presenterà sotto la forma

$$S=8abc(AS_0+BS_1+CS_2+2A'S_3+2B'S_4+2C'S_5).$$

Veniamo alla determinazione degli integrali definiti V, V_1, V_2, ... A questo proposito, osserviamo che sostituendo $z=\beta\,\mathrm{tang}\,\omega$, si ottiene immediatamente

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\omega}{\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega}=\tfrac{1}{2}\pi\cdot\frac{1}{\alpha\beta}.$$

Coll' eseguire delle derivazioni rapporto alle costanti α, β, potremo giungere a diversi altri integrali definiti, fra i quali si troveranno quei che ci occorrono. Così da una prima derivazione rapporto ad α, e β deduciamo dopo la divisione o per 2α, o per 2β:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}=\tfrac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{\alpha^3\beta},\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^2\,\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}=\tfrac{1}{4}\pi\cdot\frac{1}{\alpha\beta^3};$$

quindi da lor somma

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}=\tfrac{1}{4}\pi\Big(\frac{1}{\alpha\beta^3}+\frac{1}{\beta\alpha^3}\Big).$$

Questo integrale fù riportato senza dimostrazione al parag. 7° della mia citata Memoria. Proseguiamo nel nuovo ultimo integrale la derivazione rapporto alle costanti α, β, avremo egualmente

$$1.\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^3} = \tfrac{1}{16}\pi\Big(\frac{3}{\beta\alpha^5}+\frac{1}{\alpha^3\beta^3}\Big),$$

$$2.\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\,\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^3} = \tfrac{1}{16}\pi\Big(\frac{3}{\alpha\beta^5}+\frac{1}{\alpha^3\beta^3}\Big),$$

d'onde, sommando,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\omega}{(\alpha^3\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^3} = \tfrac{1}{16}\pi\Big(\frac{3}{\alpha\beta^5}+\frac{3}{\beta\alpha^5}+\frac{2}{\alpha^3\beta^3}\Big).$$

Questo integrale si presentò ancora nel parag. 8° della mia Memoria in alcune speculazioni geometriche della stessa specie. Nel nuovo integrale definito si prosegua la derivazione rapporto alle consuete costanti, si avrà

$$V_4 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\,\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4} = \tfrac{1}{32}\pi\Big(\frac{5}{\alpha\beta^7}+\frac{1}{\alpha^5\beta^3}+\frac{6}{\alpha^3\beta^5}\Big),$$

$$V_3 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4} = \tfrac{1}{32}\pi\Big(\frac{1}{\alpha^3\beta^5}+\frac{5}{\beta\alpha^7}+\frac{6}{\beta^3\alpha^5}\Big),$$

quali sommate porgeranno

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\omega}{(\alpha^3\cos^3\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4} = \tfrac{1}{32}\pi\Big(\frac{5}{\alpha\beta^7}+\frac{5}{\beta\alpha^7}+\frac{7}{\alpha^3\beta^5}+\frac{7}{\beta^3\alpha^5}\Big).$$

Nello stesso modo eseguendo una derivazione nelle formole (1. e 2.) rapporto ad α, e β, si ricaverà dopo la divisione per 6α, o per 6β,

$$V_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^4\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4} = \tfrac{1}{32}\pi\Big(\frac{5}{\beta\alpha^7}+\frac{1}{\alpha^5\beta^3}\Big),$$

$$V_2 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^4\,\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4} = \tfrac{1}{32}\pi\Big(\frac{5}{\alpha\beta^7}+\frac{1}{\alpha^3\beta^5}\Big).$$

In fine derivando la (1.) rapporto a β, otterremo

$$V_5 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{sen}^2\,\omega\cos^2\omega\,\partial\omega}{(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^4} = \tfrac{1}{32}\pi\Big(\frac{1}{\alpha^5\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3\beta^5}\Big).$$

Dopo di aver calcolato gli integrali V, V_1, V_2, ... che sono funzioni della sola variabile θ, restano a calcolarsi gli altri integrali espressi per S_0, S_1, S_2, ...; quali dipenderanno tutti dai trascendenti ellittici di prima e seconda specie. Per meglio scorgere la natura di queste altre riduzioni, facciamo un cangiamento della variabile θ in una nuova variabile. Supponiamo, per fissar le idee, $a<b<c$, e sia

$$\cos\mu = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}},\qquad \cos\nu = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\qquad k^2 = 1-\frac{\mathrm{tang}^2\,\nu}{\mathrm{tang}^2\,\mu} = \frac{c-b}{c-a},$$

quindi denotato per φ un'angolo variabile, pongasi

$$\cos\theta = \cot\mu \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(c-a)}}\operatorname{tang}\varphi,$$

per cui

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(c-a)}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi},\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(c\cos^2\varphi - a)}}{\sqrt{(c-a)}\cos\varphi},\quad \operatorname{sen}\theta\,\partial\theta = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(c-a)}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Ai limiti $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ corrispondono $\varphi = \mu$, $\varphi = 0$, e perciò gli integrali definiti fra i limiti $\varphi = \mu$, $\varphi = 0$, saranno eguali agli integrali definiti fra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \mu$, purché si faccia un cangiamento di segni: la quantità k sarà < 1, e percio, fatto

$$\varDelta = \sqrt{(1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi)},$$

i valori di α^0, e β^0 diverranno

$$\alpha = \frac{\sqrt{(ac)}\varDelta}{\cos\varphi},\qquad \beta = \frac{\sqrt{(ab)}}{\cos\varphi}.$$

Di qui per le quantità V, V_1, V_2, ... si hà

$$V = \frac{\pi\cos^8\varphi}{32a^4b^3c^3\sqrt{(bc)}}\left(\frac{5c^3}{\varDelta} + \frac{7bc^2}{\varDelta^3} + \frac{7cb^2}{\varDelta^5} + \frac{5b^3}{\varDelta^7}\right),$$

$$V_1 = \frac{\pi\cos^8\varphi}{32a^4c^3b\sqrt{(bc)}}\left(\frac{c}{\varDelta^5} + \frac{5b}{\varDelta^7}\right),$$

$$V_2 = \frac{\pi\cos^8\varphi}{32a^4b^3c\sqrt{(bc)}}\left(\frac{5c}{\varDelta} + \frac{b}{\varDelta^3}\right),$$

$$V_3 = \frac{\pi\cos^8\varphi}{32a^4c^3b^2\sqrt{(bc)}}\left(\frac{c^2}{\varDelta^3} + \frac{6bc}{\varDelta^5} + \frac{5b^2}{\varDelta^7}\right),$$

$$V_4 = \frac{\pi\cos^8\varphi}{32a^4b^3c^2\sqrt{(bc)}}\left(\frac{5c^2}{\varDelta} + \frac{6bc}{\varDelta^3} + \frac{b^2}{\varDelta^5}\right),$$

$$V_5 = \frac{\pi\cos^6\varphi}{32a^4b^2c^2\sqrt{(bc)}}\left(\frac{c}{\varDelta^3} + \frac{b}{\varDelta^5}\right).$$

Infine fatto per brevità

$$m = \frac{\pi}{32abc\sqrt{(abc)}\sqrt{(c-a)^5}},$$

i valori degli integrali definiti S_0, S_1, S_2, ... saranno

$$S_0 = \frac{m}{b^2c^2}\int_0^\mu\left(\frac{5c^3}{\varDelta} + \frac{7bc^2}{\varDelta^3} + \frac{7cb^2}{\varDelta^5} + \frac{5b^3}{\varDelta^7}\right)\cos^2\varphi\operatorname{sen}^4\varphi\,\partial\varphi,$$

$$S_1 = \frac{m}{a^2c^2}\int_0^\mu\left(\frac{c}{\varDelta^5} + \frac{5b}{\varDelta^7}\right)(c\cos^2\varphi - a)^2\cos^2\varphi\,\partial\varphi,$$

$$S_2 = \frac{m}{a^2b^2}\int_0^\mu\left(\frac{5c}{\varDelta} + \frac{b}{\varDelta^3}\right)(c\cos^2\varphi - a)^2\cos^2\varphi\,\partial\varphi,$$

$$S_3 = \frac{m}{abc^2}\int_0^{\mu}\left(\frac{c^2}{\Delta^3}+\frac{6bc}{\Delta^5}+\frac{5b^2}{\Delta^7}\right)(c\cos^2\varphi - a)\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi,$$

$$S_4 = \frac{m}{acb^2}\int_0^{\mu}\left(\frac{5c^2}{\Delta}+\frac{6bc}{\Delta^3}+\frac{b^2}{\Delta^5}\right)(c\cos^2\varphi - a)\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi,$$

$$S_5 = \frac{m}{bca^2}\int_0^{\mu}\left(\frac{c}{\Delta^3}+\frac{b}{\Delta^5}\right)(c\cos^2\varphi - a)^2\cos^2\varphi\,\partial\varphi.$$

Adottando le notazioni di *Legendre* per le funzioni ellittiche di prima, e seconda specie, vale a dire

$$F(k,\varphi) = \int\frac{\partial\varphi}{\Delta}, \qquad E(k,\varphi) = \int\partial\varphi\,\Delta,$$

gli integrali S_0, S_1, ... sono tutti riducibili ai due trascendenti $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$, d'onde ne segue che sostituiti nel valore di S, resta pienamente dimostrato che la quadratura della nuova superficie dipende da soli trascendenti ellittici di prima, e seconda specie. Per non allungare di troppo questa addizione, termineremo coll'avvertire, che quantunque ci sia luogo a sperare che i coefficienti finali dei trascendenti ellittici $F(k,\mu)$, $E(k,\mu)$ dopo tutte le riduzioni nel valore di S, prendano un'aspetto semplice, contuttociò il risultato si trova nascosto dietro lunghe operazioni analitiche, e delle quali probabilmente ne parleremo in altra circostanza.

Roma 15. Aprile 1846.

6.

Über die Lichtzerstreuung in der Atmosphäre.

(Von Herrn Candidaten *R. Clausius* zu Berlin.)

Es ist eine bekannte Erscheinung, dafs das Sonnenlicht, indem es die Atmosphäre durchdringt, sehr geschwächt wird, dagegen die Atmosphäre durch das Licht, welches sie dem directen Sonnenlichte entzieht, selbst eine bedeutend leuchtende Kraft erlangt. Dieses in der Atmosphäre zerstreuete Licht ist für alle menschlichen Verhältnisse von der gröfsten Wichtigkeit. In ihm hat die Gleichförmigkeit der allgemeinen Tageshelle ihren Grund; denn ohne dasselbe würden nur diejenigen Räume erleuchtet sein, welche unmittelbar von den Sonnenstrahlen getroffen werden, alle andern dagegen wären in schwarzes Dunkel gehüllt. Auch eine Dämmerung könnte nicht Statt finden, sondern beim Untergange der Sonne würde der Übergang von Tag in Nacht fast momentan sein, und eben so beim Aufgange der Sonne die Entstehung des Tages aus der Nacht.

Ungeachtet dieser grofsen Wichtigkeit ist die Erscheinung bis jetzt noch selten Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen gewesen. Die Gesetze derselben sind noch wenig entwickelt, und selbst die Thatsachen noch wenig durch Messungen festgestellt.

Was zunächst die Schwächung des Lichtes beim Durchgange durch die Atmosphäre betrifft, so werden in den Lehrbüchern noch jetzt die Beobachtungen von *Bouguer* und *Lambert* als maafsgebend angeführt. Die ersteren befinden sich schon in dem kleineren Werke von *Bouguer:* Essai d'optique v. J. 1729. Die letztern sind in *Lambert's* Pyrometrie beschrieben, und das Resultat derselben ist schon in seiner Photometria v. J. 1760 angeführt. Dieses weicht aber von dem *Bouguer's* sehr ab. Nimmt man nämlich an, die Sonne stände im Zenith, so dafs der Weg, den die Strahlen in der Atmosphäre zu durchlaufen haben, möglichst klein wäre, und setzt die Stärke des Lichtes aufserhalb der Atmosphäre $= 1$, so ergiebt sich aus *Bouguer's* Messungen, dafs die Stärke des an der Erdoberfläche ankommenden Lichtes noch

0,8123

sein würde. *Lambert* dagegen giebt unter denselben Umständen

0,59

an. *Kaemtz* beschreibt in seiner Meteorologie noch Beobachtungen, die er selbst über diesen Gegenstand angestellt hat, und deren Resultate zwischen die beiden eben angeführten Zahlen fallen. Es ist jedoch, wie er selbst sagt, die Erscheinung noch lange nicht als hinlänglich festgestellt zu betrachten.

Noch weniger ist die Helligkeit des blauen Himmels, (also die leuchtende Kraft der Atmosphäre) bei verschiedenem Stande der Sonne, und an verschiedenen Puncten des Himmels, experimental untersucht.

Dieser Gegenstand bedarf indessen auch noch einer besonderen Behandlung. Obgleich nämlich der Grund der Erscheinung im Allgemeinen leicht klar ist, und unmittelbar mit der Schwächung des directen Sonnenlichtes zusammenhangt, so wirken doch zur Erzeugung der Helligkeit an jedem Puncte des Himmels mehrere einwirkende Umstände mit, deren Einfluſs sich nicht unmittelbar durchschauen läſst. Es ist daher nothwendig, daſs man sich durch mathematische Betrachtungen vorläufig klar mache, welche Lichtstärke und Lichtvertheilung bei Berücksichtigung dieser Umstände zu erwarten sei. Ohne eine solche Rechnung können eine Menge mühsamer Messungen doch immer nur ein sehr lückenhaftes Bild des Himmels geben. Hat man sich über die betreffenden Ursachen und Wirkungen Rechenschaft abgelegt, so können einige gut gewählte und genau angestellte Versuche, falls sie die bei der Rechnung gemachten Hypothesen bestätigen, schon hinreichen, sogleich die ganze, etwas verwickelte Erscheinung ins Klare zu bringen, oder im entgegengesetzten Falle die Unstatthaftigkeit der Hypothesen zu zeigen; was eben so nützlich ist.

Eine Rechnung der Art findet sich in *Lamberts* Photometrie, und ist, so viel ich weiſs, die vollständigste Arbeit über diesen Gegenstand, welche existirt. Aber, so sehr auch diese Arbeit zu schätzen ist, da sie den ersten Grund zur wissenschaftlichen Behandlung des Gegenstandes legt, so dürfte sie doch eben nur als Anfang einer solchen zu betrachten sein. Es werden darin zur Vereinfachung der Rechnung noch Hypothesen aufgestellt, die zu weit von der Wahrscheinlichkeit abweichen, als daſs man von den aus den Formeln folgenden Zahlenwerthen auch nur eine annähernde Übereinstimmung mit der Wirklichkeit erwarten dürfte.

Lambert sagt nämlich (S. 405), nachdem er den Verlust, den das directe Sonnenlicht in der Atmosphäre erleidet, bestimmt hat: diese von der Atmosphäre

aufgefangene Lichtmenge könne man sich in drei Theile getheilt vorstellen. Ein Theil werde in der Luft selbst absorbirt, ein zweiter gelange als reflectirtes Licht an die obere Grenze der Atmosphäre, und werde also in den Weltenraum ausgestrahlt, und der dritte, ebenfalls reflectirtes Licht enthaltend, gelange zur Oberfläche der Erde.

> Den ersten dieser drei Theile nimmt er als unbedeutend an, und vernachlässigt ihn in der Rechnung; die beiden anderen setzt er einander gleich.

Beide Hypothesen lassen sich anfechten, und *Kaemtz* hebt in seiner Meteorologie besonders die Unsicherheit der ersteren hervor, dafs die Menge des absorbirten Lichtes unbedeutend sein solle. Über diesen Gegenstand läfst sich indessen zu wenig Sicheres sagen; und andererseits, wenn man die Absorption wirklich vorläufig in den Rechnungen aufser Acht läfst, wird es durchaus nicht schwer sein, den dadurch entstehenden Überschufs an reflectirtem Lichte nachträglich in Abzug zu bringen. Es mag daher dieser Punct für jetzt unberücksichtigt bleiben und wir wollen uns zu der zweiten Hypothese wenden. Auf ihr beruhen alle Rechnungen *Lamberts,* und eine Änderung in derselben mufs auf die ganze Vertheilung des Lichtes am Himmel wesentlichen Einflufs haben.

Diese Hypothese wollen wir also zunächst etwas näher betrachten.

Lambert sagt, von dem reflectirten Lichte gehe die Hälfte nach oben, die andere Hälfte nach unten. An anderen Stellen drückt er im Wesentlichen Dasselbe etwas anders aus, nämlich (Seite 410): „ponemus .... particulas „lumen intercipientes perfecte esse reflectentes" und (S. 411): „particulas istas „esse instar puncti tenui lumine radiantis." Dieses jedoch ist etwas weiter zu erläutern nöthig.

Es ist aus mehrfachen Gründen hinlänglich klar, dafs man sich die Zerstreuung des Lichtes in der Luft mufs bewirkt vorstellen durch Reflexionen an unzählig vielen in der Atmosphäre schwebenden Körperchen, deren reflectirende Flächen alle möglichen verschiedenen Lagen haben. Die Gestalt dieser Körperchen ist gleichgültig, und es läfst sich leicht zeigen, dafs es für die Stärke des ganzen nach jeder Richtung reflectirten Lichtes einerlei ist, ob man annimmt, dafs jedes Körperchen das Licht nur nach einer oder nach einigen Richtungen reflectire, und dafs, indem diese Richtungen zugleich mit der Lage der Körperchen vom Zufalle abhängen, für jede beliebige Richtung durchschnittlich gleich viele Körperchen vorhanden seien; oder auch, ob man sich die

Körperchen von solcher Gestalt vorstellt, dafs schon jedes derselben für sich dem ankommenden Lichte reflectirende Flächen von allen möglichen Lagen in gleichem Verhältnisse darbietet, indem sich seine Oberfläche durch alle Lagen gleichmäfsig krümmt. Solch ein Körper ist die Kugel. Man kann also, ohne irgend eine Hypothese über die wirkliche Gestalt der reflectirenden Körperchen zu machen, zur Bestimmung der von sehr vielen solcher Körperchen nach verschiedenen Richtungen reflectirten Lichtmengen für jedes derselben die Kugelgestalt annehmen.

Was nun das von einer Kugel reflectirte Licht betrifft, so gilt von demselben folgender Satz, den schon *Lambert* (Phot. S. 300 u. f.) dargethan hat, und dessen Richtigkeit sich auch aus einfachen Betrachtungen ergiebt:

Nimmt man an, der Stoff, aus dem die Kugel besteht, habe die Eigenschaft, *alles* auffallende Licht zu reflectiren, die Kugel sei also „perfecte reflectens", und sie werde von einem Puncte her, aus einer gegen ihren Halbmesser sehr grofsen Entfernung erleuchtet, so würde sie das von ihr reflectirte Licht nach allen Seiten gleichmäfsig zerstreuen, so dafs man sie als einen selbstleuchtenden Punct („instar puncti radiantis") betrachten könnte, welcher ringsum sich Licht von gleicher Stärke verbreitet.

Derselbe Satz gilt offenbar auch, wenn der Stoff nicht gerade Alles auffallende Licht, aber, bei verschiedenen Einfallswinkeln, doch stets einen gleichen aliquoten Theil des auffallenden Lichtes reflectirte.

Nähme man nun an, die Körperchen in der Atmosphäre beständen aus einem solchen Stoffe, so würden sie allerdings das von ihnen aufgefangene Licht ringsumher gleichmäfsig zerstreuen, und dann würde natürlich die eine Hälfte dieses Lichtes die oberen Regionen suchen, die andere Hälfte die unteren. Freilich ist damit noch nicht gesagt, dafs auch wirklich die Hälfte des in der Atmosphäre zerstreueten Lichtes an der oberen Grenze derselben, und die andere Hälfte an der Erdoberfläche *anlangen* würde. Im Gegentheile wird sich im Verlaufe der nachfolgenden Rechnungen ergeben, welche Unterschiede auch da noch eintreten. Indessen, auch abgesehen von diesen, dürfen wir doch die für jenen Satz nothwendige Bedingung über die reflectirende Kraft des Stoffes durchaus nicht zugeben. Dieselbe müfste von dem Einfallswinkel unabhängig sein. Es ist aber bekannt, dafs bei allen spiegelnden Körpern die Intensität des reflectirten Lichtes bei grofsen Einfallswinkeln bedeutend stärker ist, als bei kleinen. Für Wasser z. B. hat schon *Bouguer* experimental nachgewiesen (Optice in lat. conv. *a Richtenburg*. Viennae 1772. S. 66),

dafs, während der Einfallswinkel von 0 bis $89\frac{1}{2}^0$ zunimmt, die Menge des reflectirten Lichtes im Verhältnisse von 1:40 wächst, und seine Zahlen stimmen ziemlich gut mit denen, die man aus *Fresnels* theoretischen Formeln berechnen kann, wenn man dieselben auf Wasser mit dem Brechungsverhältnisse 1,3$\frac{3}{3}$3 anwendet. Man sieht also, dafs die Unterschiede, die hiebei zur Sprache kommen, viel zu grofs sind, als dafs man sie vernachlässigen dürfte.

Wir wollen daher im Folgenden die Stärke des nach verschiedenen Richtungen reflectirten Lichtes als Function des Einfallswinkels betrachten, oder, besser, als eine Function desjenigen Winkels, welchen der reflectirte Strahl mit dem einfallenden bildet. Es sei nämlich (Taf. I. Fig. 1) P ein Punct einer reflectirenden Fläche AB, auf welchen aus S ein Lichtstrahl SP fällt, und PN die Normale in diesem Puncte, so ist $SPN = i$ der Einfallswinkel. Es sei ferner PT die verlängerte Richtung des einfallenden Strahles, und PO der reflectirte Strahl, so ist

$$OPT = \varphi = 180^0 - 2i$$

der Winkel, als dessen Function wir die Intensität des Strahles PO betrachten wollen.

Wendet man dies auf die Zerstreuung des auf eine Kugelfläche fallenden Lichtes an, so ist leicht zu ersehen, dafs man zwar noch an die Stelle der Kugel einen selbstleuchtenden Punct setzen darf, aber nicht einen solchen, der nach allen Seiten gleich stark leuchtet, sondern einen solchen, der in verschiedenen Richtungen ungleich hell erscheint. Und diese Helligkeit wird dargestellt durch die erwähnte Function des Winkels φ, den die entsprechende Richtung mit den directen Sonnenstrahlen bildet. Wir wollen diese Function durch

$$F(\varphi)$$

bezeichnen.

Es könnte nun auf den ersten Blick scheinen, als ob die Aufgabe hiemit abgethan wäre, und man hätte, um die richtige Lichtvertheilung zu finden, die *Lambert*schen Rechnungen nur dadurch abzuändern, dafs man statt der dort angenommenen gleichförmigen Zerstreuung die durch $F(\varphi)$ ausgedrückte Zerstreuung zu Grunde legte. Es kommt indessen dabei noch ein besonderer Umstand in Betracht, der für *Lamberts* Annahme günstig ist, und der nun eine doppelte Behandlung des Gegenstandes nöthig macht. *Lambert* selbst führt ihn zur Rechtfertigung seiner Annahme an, mit den Worten (S. 405): „ob infinitas „in aëre reflexiones"; und es ist darunter Folgendes zu verstehen.

Das Licht, welches durch einmalige Reflexion an den in der Atmosphäre schwebenden Körperchen zerstreuet wird, hat bei seinem Durchgange durch die Luft wiederum dieselbe Schwächung zu erleiden, wie das directe Sonnenlicht, indem ein Theil desselben durch eine zweite Reflexion abermals nach allen Seiten hin zerstreuet wird. Von diesem letzteren wird eben so ein Theil zum drittenmale reflectirt u. s. f.; so dafs die Zahl der Reflexionen unbegrenzt ist. Dadurch wird nun allerdings eine gröfsere Gleichförmigkeit in der Zerstreuung des Lichtes hervorgebracht, als bei blofs einmaliger Reflexion; doch darf man den Einflufs dieses Umstandes nicht überschätzen. Von dem einmalig reflectirten Lichte nämlich erreicht der gröfsere Theil ungehindert sein Ziel (die obere oder untere Grenze der Atmosphäre), und nur der geringere wird zum zweiten Male reflectirt. Diesen zweiten Theil kann man dann ohne Bedenken als nach allen Richtungen hin gleichförmig zerstreuet betrachten und *Lamberts* Annahme gelten lassen, dafs derselbe, welche weiteren Reflexionen in ihm auch noch vorgehen mögen, endlich zur Hälfte zur Erde gelange und zur Hälfte in den Weltenraum verloren gehe. Dadurch sind wir der besonderen Betrachtung der dritten, vierten u. s. w. Reflexion überhoben. Für den ersten, nur einmal reflectirten Theil dagegen ist die durch $F(\varphi)$ ausgedrückte Ungleichförmigkeit der Zerstreuung vollständig in Rechnung zu bringen.

Da nun die Wirkungen dieser beiden Theile des ganzen zerstreueten Lichtes einzeln berechnet werden müssen, so kommt es zunächst darauf an, die beiden Theile von einander zu *sondern*. Es mufs bestimmt werden, wieviel von dem *einmal* reflectirten Lichte als solches zur Erde, oder an die obere Grenze der Atmosphäre gelangt, und wieviel dagegen noch eine zweite Reflexion erleidet; und diese Sonderung ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Die weitere Ausführung der Rechnungen, um die leuchtende Wirkung des ganzen Himmels und die Helligkeit desselben an einzelnen verschiedenen Puncten zu bestimmen, behalte ich mir noch vor. Dazu nämlich mufs die Form der Function $F(\varphi)$ bekannt sein, und um diese zu finden, mufs man eine bestimmte Hypothese über die Natur der lichtzerstreuenden Körperchen in der Atmosphäre machen. In der gegenwärtigen Arbeit ist für den Gang der meisten Untersuchungen eine solche Hypothese noch nicht nöthig, sondern nur insoweit eine specielle Hypothese, als erforderlich ist, um an ihr beispielsweise zu zeigen, wie sich die Constante in einer vorher gewonnenen allgemeinen Formel finden lasse, und wie man eine andere, zur vollständigen Sonderung der beiden Lichtmengen noch nöthige Bestimmung ausführen könne.

Wir wollen die Sonderung erst unter der Voraussetzung ausführen, dafs schon das *einmalig* reflectirte Licht gleichmäfsig ringsumher zerstreuet sei, und dann untersuchen, wie man die durch die Ungleichmäfsigkeit entstehende Änderung in dem Resultate berechnen könne, sobald über $F(\varphi)$ eine bestimmte Annahme gemacht ist.

Wenn Licht ein unvollkommen durchsichtiges Mittel zu durchscheinen hat, so verliert es auf diesem Wege von Strecke zu Strecke etwas von seiner Intensität. In welchem Verhältnisse dieses geschieht, haben schon *Bouguer* und *Lambert* hinlänglich dargethan, und ist auch leicht zu ersehen. Es sei nämlich die ursprüngliche Lichtstärke $= 1$, und man bezeichne die Stärke, welche nach Zurücklegung des Weges x in dem betrachteten Mittel noch übrig ist, mit v, so ist

$$1. \quad v = e^{-\int_0^x \delta . dx},$$

wo δ die von der Dichtigkeit des Mittels abhängige Undurchsichtigkeit desselben an den den verschiedenen Werthen von x entsprechenden Puncten ist.

Im gegenwärtigen Falle ist die atmosphärische Luft das unvollkommen durchsichtige Mittel, und wir müssen also die *Gestalt* der Atmosphäre kennen. Sie ist eine Kugelschicht, bei der aber das Verhältnifs der beiden Radien der inneren und der äufseren Grenzfläche (sofern man überhaupt von einer bestimmten äufseren Grenzfläche reden darf,) sehr wenig von der Einheit abweicht. Bedenkt man dazu noch, dafs die oberen Regionen der Atmosphäre, wegen der dort Statt findenden geringeren Dichtigkeit, weniger in Betracht kommen, als die unteren, für welche jenes Verhältnifs der Einheit noch näher kommt, so findet sich die Abweichung so geringe, dafs man sie bei vielen Betrachtungen vernachlässigen kann: d. h. man kann bei vielen Betrachtungen die Atmosphäre über einem bestimmten Orte der Erde als eine ebene, nach allen Horizontalrichtungen hin unbegrenzte Luftschicht annehmen. Dieses findet auch bei der Bestimmung der Lichtstärke in der Atmosphäre bis zu einer gewissen Grenze Statt. *Lambert* zeigt (S. 408), dafs, so lange die Sonne nicht weiter als 70° — 75° vom Zenith entfernt ist, jene Annahme keinen merklichen Fehler hervorbringt. Ja, man kann hinzufügen, dafs der dadurch entstehende Fehler, im Vergleich mit der durch den Gegenstand selbst bedingten Ungenauigkeit der Beobachtungen, noch bis 80° Zenith-Abstand der Sonne geringe genug ist, um ihn in Fällen, wo es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, vernachlässigen zu dürfen. Wir machen daher ebenfalls jene An-

nahme, und bemerken also, dafs die Resultate der Untersuchungen nur gültig sind, wenn der Zenith-Abstand der Sonne nicht gröfser ist, als 75° bis 80°.

Hat man nun die Atmosphäre einmal als eben und nach allen Horizontalrichtungen hin unbegrenzt angenommen, so ist es für die ganze lichtzerstreuende und leuchtende Wirkung derselben durchaus gleichgültig, ob sie aus parallelen Schichten von verschiedener Dichtigkeit bestehet, wie man es in der Wirklichkeit annehmen mufs, oder ob sie eine einzige, gleichförmig dichte Schicht wäre, aber von solcher Dicke, dafs sie allein dieselbe Lichtschwächung hervorbrächte, als alle jene parallelen Schichten zusammengenommen. Wir betrachten daher im Verlaufe der nachfolgenden Untersuchung, ohne es jedesmal ausdrücklich zu sagen, die Atmosphäre stets als eine ebene, nach allen Horizontalrichtungen hin unendlich ausgedehnte Luftschicht von durchweg gleicher Dichtigkeit.

Alsdann ist die in der Gleichung (1.) vorkommende Gröfse δ eine Constante, und wir haben also

$$\int_0^x \delta . dx = \delta . x,$$

folglich

$$2. \quad v = e^{-\delta . x}.$$

Es sei nun CD (Fig. 2) die Oberfläche der Erde, EF die obere Grenze der Atmosphäre und $AB = h$ die Höhe derselben. Im Puncte P, dessen Höhe AP durch y bezeichnet sei, betrachten wir einen unendlich kleinen prismatischen Raum, dessen horizontale obere und untere Grundfläche $MN = mn = ds$ und dessen Höhe $Mm = dy$ sei, also die Gröfse desselben $= ds\, dy$. Dieser kleine Raum sei, wie die umgebenden Räume, mit Luft gefüllt und von der Sonne in der Richtung SP beschienen, welche mit der Senkrechten den Winkel $SPB = \gamma$ macht: so soll nun zunächst die Lichtmenge (μ) bestimmt werden, welche dieses Element versendet. Dazu stelle man sich vorläufig ein anderes, neben jenem befindliches Element von derselben Gestalt und Gröfse vor, aber in anderer Lage: nämlich so, dafs seine Grundflächen ds nicht horizontal, sondern normal sind gegen die Richtung der ankommenden Strahlen, also gegen SP. Dann ist, wenn man die Intensität des ankommenden Lichtes $= v$ setzt, die auf das Element auffallende Lichtmenge $= v\, ds$. Indem dieses das Element durchscheint, wird sie etwas geschwächt, indem sie nach Zurücklegung des kleinen Weges dy zufolge der Gleichung (2.) nur noch $= v\, ds\, e^{-\delta . dy}$ ist. Die von dem Elemente aufgefangene und nun rings-

umher zerstreuete Lichtmenge ist also

$$\mu = v\,ds(1 - e^{-\delta . dy}) = v . \delta . ds\,dy.$$

Dieses Resultat ist aber nicht an die oben angenommene Lage des Elementes gebunden; denn, da es überhaupt auf die Gestalt desselben gar nicht ankommt, sondern nur auf die darin enthaltene Luftmenge, so ist auch seine Lage gegen die ankommenden Strahlen gleichgültig, und jener Ausdruck gilt eben so für das horizontal stehende Element bei P. Um die in dem Ausdrucke vorkommende Gröfse v zu bestimmen, braucht man nur zu erwägen, dafs das Sonnenlicht, welches ursprünglich die Intensität 1 hatte, ehe es zu dem Elemente gelangt, den Weg $PG = (h - y)\sec\gamma$ zurücklegen mufs: also ist dort

$$v = e^{-\delta . (h-y) \sec\gamma}.$$

Dieses in den obigen Ausdruck gesetzt, giebt die Menge des von dem Elemente ausgesandten Lichtes

$$3. \quad \mu = ds\,dy . \delta . e^{-\delta . (h-y) \sec\gamma}.$$

Ferner wollen wir den Theil (λ) dieser ausgesandten Lichtmenge bestimmen, welcher, ohne eine Reflexion auf seinem Wege zu erleiden, an der Erdoberfläche anlangt. Es sei um den Punct P (Fig. 2) eine Kugelfläche beschrieben, welche die Gerade AB in den Puncten a und b schneidet: so ist die von P nach dieser ganzen Kugelfläche hin ausgesandte Lichtmenge $= \mu$. Es sei ferner um a, als Pol, in der Bogen-Entfernung $ar = \beta$ eine Zone von der Breite $rt = d\beta$ gezogen, so ist deren Flächenraum $= 2\pi \sin\beta\, d\beta$, also die nach ihr hin ausgesandte Lichtmenge

$$4. \quad = \mu . \frac{2\pi \sin\beta\, d\beta}{4\pi} = \tfrac{1}{2}\mu \sin\beta\, d\beta.$$

Dieses Licht hat, ehe es zur Erde gelangt, den Weg $PR = y \sec\beta$ in der Atmosphäre zurückzulegen, wodurch es im Verhältnisse von $1 : e^{-\delta . y . \sec\beta}$ geschwächt wird. Die wirklich dort ankommende Lichtmenge ist also nur noch

$$5. \quad = \tfrac{1}{2}\mu e^{-\delta . y \sec\beta} \sin\beta\, d\beta,$$

und diesen Ausdruck mufs man, um die ganze von P zur Erde gelangende Lichtmenge zu erhalten, von $\beta = 0$ bis $\beta = 90^\circ$ integriren, also

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\mu \int_{\beta=0}^{\beta=\frac{1}{2}\pi} e^{-\delta . y \sec\beta} \sin\beta\, d\beta$$

nehmen. Setzt man hierin $\delta . y \sec\beta = z$, so geht der Ausdruck in

$$6. \quad \lambda = \tfrac{1}{2}\mu\,\delta . y \int_{z=\delta . y}^{z=\infty} \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz$$

über, oder, indem man für μ seinen Werth aus der Gleichung (3.) substituirt, in

$$7.\quad \lambda = \tfrac{1}{2} ds\, dy\, \delta . \delta . y\, e^{-\delta . (h-y) \sec\gamma} \int_{z=\delta . y}^{z=\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz.$$

Dasselbe, was von einem solchen Elemente gilt, gilt von jedem anderen, in derselben Höhe befindlichen ebenfalls; man kann also die Gleichungen (3. und 7.) sogleich auf eine ganze Luftschicht mit der Grundfläche 1 und von der Dicke dy ausdehnen. Demnach ist die von einer solchen ausgesandte Lichtmenge

$$3\text{ a.}\quad = dy\, \delta . e^{-\delta (h-y) \sec\gamma},$$

und der davon zur Erde gelangende Theil ist

$$7\text{ a.}\quad = \tfrac{1}{2} dy\, \delta . \delta . y\, e^{-\delta . (h-y) \sec\gamma} \int_{z=\delta . y}^{z=\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz.$$

Betrachtet man nun statt der *einen* Elementarschicht bei P (Fig. 3) eine ganze, senkrecht durch die Atmosphäre gehende Luftsäule AB, mit dem Querschnitte 1, so erhält man die ganze, von derselben ausgesandte Lichtmenge (M) und den ganzen davon zur Erde gelangenden Theil (L), wenn man die Ausdrücke (3 a. und 7 a.) von $y=0$ bis $y=h$ integrirt.

Aus (3 a.) ergiebt sich

$$M = \frac{1 - e^{-\delta . h \sec\gamma}}{\sec\gamma}.$$

Wir wollen hier eine abgekürzte Bezeichnung einführen, die durch die ganze folgende Rechnung beibehalten werden soll, nämlich

$$8.\quad \delta . y = x;\quad \delta . h = a;\quad \sec\gamma = c$$

setzen. Demnach ist

$$9.\quad M = \frac{1 - e^{-ca}}{c}.$$

Aus (7 a.) dagegen erhält man

$$L = \tfrac{1}{2} \delta\, e^{-\delta . h \sec\gamma} \int_{y=0}^{y=h} \left[\delta . y\, e^{\delta . y \sec\gamma} \int_{z=\delta . y}^{z=\infty} \frac{e^{-z}}{z^2} dz \right] dy.$$

Wendet man hier die abgekürzten Zeichen aus (8.) an, so geht der Ausdruck in

$$10.\quad L = \tfrac{1}{2} e^{-ca} \int_{x=0}^{x=a} \left[x e^{cx} \int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} dx \right] dx$$

über. Um diese Integration auszuführen, setze man der Kürze wegen

$$11.\quad x e^{cx} = f(x) \quad \text{und} \quad \int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \varphi(x),$$

so dafs

$$12.\quad \int\left[x e^{cx}\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx\right]dx = \int f(x).\varphi(x)\,dx$$

ist. Hierauf die Methode der partiellen Integration angewandt, giebt

$$\int f(x).\varphi(x)\,dx = \varphi(x)\int f(x)\,dx - \int\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\int f(x)\,dx\right]dx.$$

Nun ist nach (11.)

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{c^2}e^{cx}(cx-1) \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{e^{-x}}{x^2},$$

und durch Einsetzung dieser Werthe erhält man

$$\int f(x).\varphi(x)\,dx = \frac{1}{c^2}e^{cx}(cx-1)\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx + \frac{1}{c^2}\int\frac{e^{-x}}{x^2}e^{cx}(cx-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{c^2}e^{cx}(cx-1)\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx + \frac{1}{c}\int\frac{e^{(c-1)x}}{x}dx - \frac{1}{c^2}\int\frac{e^{(c-1)x}}{x^2}dx.$$

Es werde wieder eine abgekürzte Bezeichnung eingeführt, nämlich

$$13.\quad (c-1)x = z \quad \text{und} \quad (c-1)a = b$$

gesetzt. Dieses auf das zweite und dritte Integral des vorigen Ausdruckes angewandt, giebt

$$\int f(x).\varphi(x)\,dx = \frac{1}{c^2}e^{cx}(cx-1)\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx + \frac{1}{c}\int\frac{e^z}{z}dz - \frac{c-1}{c^2}\int\frac{e^z}{z^2}dz.$$

Hier lassen sich noch das erste und dritte Integral auf einfachere Ausdrücke zurückführen, nämlich auf

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx, \qquad \int\frac{e^z}{z^2}dz = -\frac{e^z}{z} + \int\frac{e^z}{z}dz.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in der vorigen Gleichung, macht die nöthigen Zusammenziehungen, und setzt endlich noch für das Zeichen $\int f(x).\varphi(x)\,dx$ dasjenige Integral, welches dasselbe nach (12.) vertreten hat, so ergiebt sich

$$14.\quad \int\left[x e^{cx}\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx\right]dx = \frac{1}{c}e^{(c-1)x} + \frac{1}{c^2}e^{cx}(cx-1)\int_\infty^x \frac{e^{-x}}{x}dx + \frac{1}{c^2}\int\frac{e^z}{z}dz.$$

Die beiden hier noch vorkommenden Integrale lassen sich nicht in geschlossenen Ausdrücken darstellen; sie geben aber folgende, für die Rechnung bequeme unendliche Reihen:

$$15.\quad \begin{cases} \int\frac{e^z}{z}dz = K + \log z + z + \frac{z^2}{2\cdot 2!} + \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \cdots\cdots; \\ \int_\infty^x \frac{e^{-x}}{x}dx = C + \log x - x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \cdots\cdots \end{cases}$$

Hier ist K natürlich eine willkürliche Constante, welche aus der Rechnung wegfällt, sobald man für die Integration bestimmte Grenzen setzt; C dagegen ist eine bestimmte Gröfse, welche wir kennen müssen. Sie ist schon von *Brandes* auf 5 Stellen berechnet und später noch genauer gefunden, nämlich:

$$C = 0{,}5772157\ldots..$$

Setzt man die Reihen in (14.), nimmt die Grenzen der Integrale von $x=0$ bis $x=a$ und daher resp. von $z=0$ bis $z=b$, und macht die nöthigen Zusammenziehungen, so erhält man

$$16.\quad \int_0^a \Big[x e^{cx}\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}dx\Big]dx = \frac{1}{c^2}\Big\{c(e^b-1)+[(ca-1)e^{ca}+1](C+\log a)\\ -(ca-1)e^{ca}\Big(a-\frac{a^2}{2\cdot 2!}+\frac{a^3}{3\cdot 3!}-\ldots\Big)+\Big(b+\frac{b^2}{2\cdot 2!}+\frac{b^3}{3\cdot 3!}+\ldots\Big)\Big\}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$17.\quad a-\frac{a^2}{2\cdot 2!}+\frac{a^3}{3\cdot 3!}-\ldots = R_1,\quad b+\frac{b^2}{2\cdot 2!}+\frac{b^3}{3\cdot 3!}+\ldots = R_2,$$

und substituirt den Ausdruck aus (16.) in (10.), so ergiebt sich schliefslich

$$18.\quad L = \frac{e^{-ca}}{2c^2}\Big\{c(e^b-1)+[(ca-1)e^{ca}+1](C+\log a)-(ca-1)e^{ca}.R_1+R_2\Big\}.$$

Dieses ist also der Antheil des von der ganzen Säule ausgesandten Lichtes, welcher wirklich zur Erdoberfläche gelangt.

Auf ganz entsprechende Weise erhält man denjenigen Antheil jenes Lichtes, welcher nach der obern Grenze der Atmosphäre gelangt. Um zunächst die Lichtmenge (λ') zu finden, welche, von einem Elemente $ds\,dy$ bei P ausgehend, oben anlangt, braucht man nur in der Gleichung (6.) $h-y$ statt y zu setzen. Es ist also

$$19.\quad \lambda' = \tfrac{1}{2}\mu\delta.(h-y)\int_{z=\delta.(h-y)}^{z=\infty}\frac{e^{-z}}{z^2}dz.$$

Hierin mufs für μ der Werth aus (3.) gesetzt werden. Dehnt man dann den Ausdruck sogleich auf die Schicht von der Grundfläche 1 und von der Dicke dy aus, so erhält man, dem Ausdrucke (7 a.) entsprechend, für die oben anlangende Lichtmenge:

$$20.\quad = \tfrac{1}{2}dy.\delta.\delta.(h-y)e^{-\delta.(h-y)\sec\gamma}\int_{z=\delta.(h-y)}^{z=\infty}\frac{e^{-z}}{z^2}dz.$$

Dieser Ausdruck mufs, um die entsprechende Lichtmenge (L') für die ganze Säule zu erhalten, von $y=0$ bis $y=h$ integrirt werden. Setzt man darin

$\delta(h-y)=x'$, so erhält man

$$21. \quad L' = \tfrac{1}{2}\int_{x'=0}^{x'=a}\left[x' e^{-cx'}\int_{x'}^{\infty}\frac{e^{-x'}}{x'^2}dx'\right]dx';$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (10.), so zeigt sich dafs das Integral von dem dortigen nur dadurch sich unterscheidet, dafs der Factor c, der dort das $+$ Zeichen hatte, hier das Zeichen $-$ hat. Wir brauchen also das Integral nicht von Neuem zu entwickeln, sondern nur in dem dort gefundenen Ausdrucke (16.) überall das Vorzeichen von c umzukehren. Dabei geht $b=(c-1)a$ in $-(c+1)a$ über. Wir wollen daher das neue Zeichen

$$22. \quad (c+1)a = b'$$

einführen, so dafs also b durch Umkehrung des Vorzeichens von c in $-b'$ übergeht. Dies giebt

$$23. \int_0^a\left[x e^{-cx}\int_x^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}dx\right]dx = \frac{1}{c^2}\Big\{-c(e^{b'}-1)+[-(ca+1)e^{-ca}+1](C+\log a)$$
$$+(ca+1)e^{-ca}\Big(a-\frac{a^2}{2\cdot 2!}+\frac{a^3}{3\cdot 3!}-\ldots\Big)+\Big(-b'+\frac{b'^2}{2\cdot 2!}-\frac{b'^3}{3\cdot 3!}+\ldots\Big\}.$$

Setzt man hier noch

$$24. \quad b'-\frac{b'^2}{2\cdot 2!}+\frac{b'^3}{3\cdot 3!}-\ldots = R_3,$$

so erhält man zufolge der Gleichung (21.) endlich

$$25. \quad L'=\frac{1}{2c^2}\Big\{c(1-e^{-b'})-[(ca+1)e^{-ca}-1](C+\log a)+(ca+1)e^{-ca}.R_1-R_3\Big\}.$$

Die Gleichungen (9. 18. und 25.) bestimmen also für jeden Stand der Sonne die von einer senkrecht durch die Atmosphäre gehenden Luftsäule mit dem Querschnitte 1 ausgesandte Lichtmenge und die davon wirklich an die untere und an die obere Grenze der Atmosphäre gelangenden Theile. Da man sich ferner die ganze Atmosphäre als aus solchen Säulen bestehend vorstellen kann, so gelten die Verhältnisse zwischen diesen Werthen sogleich für das in der ganzen Atmosphäre zerstreuete Licht.

Um aber die Verhältnisse in bestimmten Zahlen berechnen zu können, mufs die Gröfse a gegeben sein. Es ist nämlich nach (8.) $a=\delta.h$ und $1:e^{-\delta.h}$ ist das Verhältnifs der Lichtstärke eines Gestirnes, bevor sein Licht in die Atmosphäre getreten ist, und nachdem es dieselbe senkrecht durchschienen hat. Dieses Verhältnifs, oder überhaupt die Durchsichtigkeit der Luft, mufs durch Versuche bestimmt werden. Bis jetzt herrscht dabei, wie schon oben

erwähnt, unter den Angaben der Physiker eine grofse Verschiedenheit. Auch handelt es sich hier nicht blofs um eine einzelne Zahl; vielmehr ist die Durchsichtigkeit der Luft offenbar in verschiedenen Climaten und unter verschiedenen Witterungsverhältnissen sehr verschieden. Es kommt also darauf an, unter mannichfachen Umständen, mit genauer Berücksichtigung und Aufzeichnung derselben, diese Gröfse zu bestimmen, und es ist zu wünschen, dafs recht viele geschickte Beobachter sich des Gegenstandes annehmen möchten, was durch seine Wichtigkeit die Mühe gewifs reichlich belohnen würde.

Ich nehme vorläufig, da keiner der oben erwähnten Werthe durch besondere Umstände so begünstigt ist, dafs man sich für ihn entscheiden müfste, und aufserdem unter verschiedenen Verhältnissen auch verschiedene Werthe gelten, einen Mittelwerth an und setze

$$26.\quad e^{-\delta . h} = 0{,}75,$$

so dafs also bei senkrechter Durchstrahlung der Atmosphäre ein Viertel der Licht-Intensität verloren ginge. Dann ist

$$27.\quad \begin{aligned} a &= \delta . h \\ &= -\log \mathrm{nat}\, 0{,}75 \\ &= 0{,}2876819\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mit diesem Werthe kann man nun zur numerischen Berechnung der obigen Gleichungen schreiten; und dann ist die verlangte Sonderung desjenigen Lichtes, welches durch eine zweite Reflexion abermals in der Atmosphäre zerstreuet wird, von dem, welches nur eine einmalige Reflexion erleidet, geschehen; unter der Voraussetzung, dafs schon das letztere gleichmäfsig zerstreuet sei.

Um den Gang der gefundenen Functionen im Allgemeinen kenntlich zu machen, habe ich die Berechnung für einige Werthe von γ ausgeführt und die Resultate in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt. Es werde nämlich die durch die erste Reflexion abwärts gesandte Lichtmenge mit m bezeichnet, die aufwärts gesandte mit m', und die Summe beider, also die ganze, durch einmalige Reflexion in der Atmosphäre zerstreuete Lichtmenge, wie schon früher, mit M, so dafs im gegenwärtigen Falle

$$m = m' = \tfrac{1}{2}M$$

ist. Ferner bezeichnen wir, Dem entsprechend, den Verlust, den m auf seinem Wege vermöge abermaliger Reflexion erleidet, mit n, also durch $n = \frac{1}{2}M - L$, den Verlust von m' mit n', also durch $n' = \frac{1}{2}M - L'$, und endlich den Verlust

beider, also die ganze durch die zweite Reflexion in der Atmosphäre zerstreuete Lichtmenge mit N. Dann sind es die Verhältnisse

$$\frac{n}{m}, \quad \frac{n'}{m'} \text{ und } \frac{N}{M},$$

also die verschiedenen Lichtverluste, gemessen durch die jedesmal entsprechenden ausgesandten Lichtmengen, welche durch die in der 2ten, 3ten und 4ten Columne angeführten Zahlen ausgedrückt werden, während die Zahlen der ersten Columne den Zenith-Abstand der Sonne angeben.

I.

γ	$\frac{n}{m}$	$\frac{n'}{m'}$	$\frac{N}{M}$
0	0,33648	0,31389	0,32519
20°	0,33720	0,31316	0,32518
40°	0,33987	0,31041	0,32514
60°	0,34747	0,30247	0,32497
70°	0,35739	0,29194	0,32467
80°	0,38538	0,26054	0,32296

Aus dieser Tabelle ergiebt sich, was vorläufig schon oben erwähnt wurde, dafs, selbst wenn das durch eine erste Reflexion zerstreuete Licht zur Hälfte aufwärts und zur Hälfte abwärts gesendet würde, darum doch noch nicht die eine Hälfte wirklich oben und die andere unten anlangen müfste. Das nach oben gehende Licht verliert weniger durch die zweite Reflexion, als das nach unten gehende; und dadurch würde eine Ungleichheit entstehen.

Ist auf solche Weise die Bestimmung unter der Annahme gleichförmiger Zerstreuung gemacht, so fragt es sich weiter, wie man den Einflufs, den die durch $F(\varphi)$ ausgedrückte Ungleichförmigkeit auf die Resultate hat, in Rechnung bringen könne, sobald man $F(\varphi)$ kennt.

Fassen wir zunächst das Verhältnifs $\frac{N}{M}$, welches für die weiteren Rechnungen das wichtigste ist, ins Auge, so läfst sich für dieses der Gang eines bequemen und hinreichend genauen Verfahrens schon angeben, indem man nur eine vorläufige, noch sehr unbestimmte Annahme über die Form von $F(\varphi)$ macht; erst zur Bestimmung einer dabei vorkommenden Constanten bedarf man dieser Function selbst.

Betrachtet man nämlich die Zahlen der 4ten Columne in der obigen Tabelle, so sieht man, dafs sie bis $\gamma = 70°$ noch nicht um *eine* Einheit der dritten Stelle von einander abweichen, und der Unterschied auch bei $\gamma = 80°$

nur wenige Einheiten dieser Stelle beträgt. Für $\gamma = 90^0$ wird der Unterschied etwas größer; doch liegt dies außer den Grenzen der gegenwärtigen Betrachtungen. Man kann also, so lange der Zenith-Abstand der Sonne nicht über 80^0 hinausgeht, jenes Verhältniſs unbedenklich als constant betrachten, und setzen:

$$28. \quad \frac{N}{M} = 0{,}325.$$

Diese Unveränderlichkeit des Verhältnisses $\frac{N}{M}$ wird aber gestört, sobald die Zerstreuung nicht mehr gleichförmig ist. Um übersehen zu können, welcher Art diese Abweichung sein wird, betrachten wir wieder ein einzelnes mit Luft gefülltes Raum-Element, welches nach allen Seiten Lichtstrahlen versendet. Die Gröſse der Wege, welche diese Strahlen in der Atmosphäre zurücklegen müssen, also auch die Gröſse der Verluste, welche sie erleiden, ist sehr verschieden, und hangt von ihren verschiedenen Richtungen ab. Haben die Strahlen ursprünglich gleiche Intensität, so nimmt die Summe der Verluste aller Strahlen einen gewissen Mittelwerth an, welcher für die ganze, senkrecht durch die Atmosphäre gehende Säule zu dem Werthe in (28.) führt. Haben die Strahlen verschiedene Intensitäten, so wird die Summe der Verluste im Allgemeinen anders ausfallen. Trifft es sich z. B., daſs die stärksten Strahlen gröſstentheils auf solche Richtungen fallen, bei denen die Wege durch die Atmosphäre verhältniſsmäſsig klein sind, so muſs, wenn dieser Umstand nicht durch andere, entgegengesetzt wirkende, ausgeglichen wird, die Summe der Verluste geringer sein, als der Mittelwerth. Wären dagegen die Wege der stärksten Strahlen verhältniſsmäſsig groſs, so würde dies der umgekehrte Fall sein. Wir wollen nun bloſs annehmen, wie man es für reflectirtes Licht annehmen muſs: die Function $F(\varphi)$ sei von der Art, daſs das Maximum der Intensität auf $\varphi = 0$ falle, und daſs diese Strahlen, so wie die in ihre Nähe fallenden, eine überwiegend gröſsere Intensität haben, als die mittleren, so daſs von ihnen hauptsächlich der Ausschlag für die ganze Summe abhange. Dann werden wir uns überhaupt auf die Betrachtung dieser Maximumstrahlen beschränken können, welche, wie leicht zu sehen, parallel mit den directen Sonnenstrahlen ausfahren. Steht nun die Sonne im Zenith, so ist die Richtung der Maximumstrahlen senkrecht: ihr Weg, und demgemäſs ihr Verlust, ist also möglichst klein, und die Summe der Verluste wird daher geringer ausfallen, als der Mittelwerth. Mit zunehmendem Zenith-Abstande wachsen die Wege der Maximumstrahlen, und mit ihnen der ganze Lichtverlust, so daſs man zu

einem bestimmten Zenith-Abstande gelangen wird, wo die Maximumstrahlen, für sich allein betrachtet, den Mittelwerth geben: d. h. die Wege dieser Strahlen sind dann gerade so grofs, dafs man, wenn man annähme, die Lufttheilchen der Säule versendeten nur Licht in dieser Richtung, und unter dieser Voraussetzung den Lichtverlust für die ganze Säule berechnete, genau den Werth in (28.) finden würde. Für diesen Zenith-Abstand kann man ohne bedeutenden Fehler annehmen, dafs auch das ganze, gemäfs der Function $F(\varphi)$ zerstreuete Licht denselben Verlust erleidet. Denn, da die Maximumstrahlen genau stimmen, und sich diejenigen von geringerer Intensität gleichmäfsig ringsum diese Richtung vertheilen, so dafs sie theils zu grofse, theils zu kleine Wege zurücklegen, so werden sich die Differenzen so ausgleichen, dafs alle Strahlen zusammen sehr nahe den Mittelwerth geben. Jenseit dieses Zenith-Abstandes tritt der entgegengesetzte Fall ein. Die Wege der Maximumstrahlen werden noch länger, und somit wird der ganze Lichtverlust gröfser werden, als der Mittelwerth.

Dieses allmälige Wachsen des Lichtverlustes wird sehr gut nachgeahmt, wenn man sich vorstellt, die ganze von einem Lufttheilchen ausgesandte Lichtmenge bestehe, anstatt gemäfs der Function $F(\varphi)$ zerstreuet zu sein, aus zwei Theilen, deren einer gleichförmig ringsumher zerstreuet wird, während der andere ganz in der vorher bezeichneten Richtung der Maximumstrahlen ausfährt. Die Menge dieses letzteren werde, als Bruchtheil des ganzen ausgesandten Lichtes, durch r ausgedrückt. Dadurch ist dann die von der ganzen Säule ausgesandte Lichtmenge M in die beiden Theile $(1-r)M$ und rM getheilt; der erstere wird gleichförmig zerstreuet, der letztere bleibt unzerstreuet. Den Verlust des ersteren (N_1) mufs man nach der Gleichung (28.) bestimmen, nämlich

$$29. \quad N_1 = 0{,}325(1-r)M;$$

der des letzteren dagegen kann leicht auf folgende Weise gefunden werden. Die von der oben betrachteten Elementarschicht, von der Dicke dy, ausgesandte Lichtmenge dieser Art ist nach (3 a.)

$$= r\,dy\,\delta . e^{-\delta.(h-y)\sec\gamma},$$

und der davon wirklich zur Erde gelangende Theil ist, da das Licht den Weg $y\sec\gamma$ zurückzulegen hat,

$$= r\,dy\,\delta . e^{-\delta.(h-y)\sec\gamma} . e^{-\delta.y\sec\gamma} = r\,dy\,\delta . e^{-\delta.h\sec\gamma}.$$

Dies von $y=0$ bis $y=h$ integrirt, giebt für die ganze ankommende Lichtmenge:

$$= r\delta.h e^{-\delta.h\sec\gamma} = rae^{-\varsigma a},$$

und somit ist der Lichtverlust (N_2) dieses Theiles

$$30. \quad N_2 = rM - rae^{-ca}.$$

Durch Addition der Gleichungen (29.) und (30.) erhält man

$$N = N_1 + N_2 = (0{,}325 + 0{,}675\,r)M - rae^{-ca},$$

also

$$31. \quad \frac{N}{M} = 0{,}325 + 0{,}675 . r - ra\frac{e^{-ca}}{M},$$

oder, wenn man die constanten Glieder in *eines* zusammenfafst, indem man

$$32. \quad 0{,}325 + 0{,}675\,r = A$$

setzt, ergiebt sich schliefslich:

$$31\,\text{a.} \quad \frac{N}{M} = A - ra\frac{e^{-ca}}{M}.$$

Dieser Ausdruck ist für die Sonderung des ganzen, zum zweiten Male reflectirten Lichtes, von dem einmalig reflectirten, als die Schlufsformel zu betrachten. Es kommt nur noch darauf an, die darin vorkommende Constante r zu bestimmen, welche von der Natur der reflectirenden Körperchen in der Atmosphäre abhangt. Dazu ist nöthig, die Function $F(\varphi)$ zu kennen. Mit deren Berücksichtigung mufs man für irgend einen Stand der Sonne, also, am einfachsten, wenn dieselbe im Zenith steht, den Lichtverlust wirklich berechnen; was auf ähnliche Weise geschehen kann, wie es oben für die gleichförmige Zerstreuung allgemein geschahe. Ist der Verlust gefunden, so ist es leicht, zu bestimmen, wie grofs r sein mufs, um für denselben Stand der Sonne denselben Verlust zu geben. Setzt man dann diesen Werth von r in die Gleichung (31.), so giebt dieselbe sogleich für jeden anderen Stand der Sonne den gesuchten Lichtverlust; und an Leichtigkeit der Rechnung läfst die Formel, da man, um M zu kennen, e^{-ca} schon vorher berechnet haben mufs, nichts zu wünschen.

Diese Sonderung in dem ganzen zerstreueten Lichte war das Haupt-Erfordernifs für die weiteren Rechnungen. Um indessen die Lichtmenge, welche aus der Atmosphäre zur Erdoberfläche gelangt, vollständig bestimmen zu können, ist es nöthig, die Verluste, welche das nach oben und das nach unten gehende Licht erleidet, auch einzeln zu kennen. Es mufs also auch für die Verhältnisse $\frac{n}{m}$ und $\frac{n'}{m'}$, welche wir für die gleichförmige Zerstreuung schon kennen, die durch die Ungleichförmigkeit der Zerstreuung hervorgebrachte Änderung untersucht werden. Welches Verfahren man aber dazu am bequemsten an-

wende, wollen wir vorläufig dahingestellt sein lassen, indem es sich am besten nach der besonderen Gestalt von $F(\varphi)$ richten wird.

Es ist, wie schon erwähnt, nicht meine Absicht, in diesem Aufsatze auf irgend eine Hypothese über die Function $F(\varphi)$ genauer einzugehen; doch soviel sei mir von der Betrachtung derelben erlaubt, um zeigen zu können, wie sich die Formel (31.) in ihr gestalte, und wie man die Verhältnisse $\frac{n}{m}$ und $\frac{n'}{m'}$ näher bestimmen könne.

Es ist eine in vieler Beziehung wahrscheinliche Hypothese, welche sich besonders durch eine leichte Erklärung der blauen Farbe des Himmels und der Morgen- und Abendröthe empfiehlt, dafs die Lichtzerstreuung der heiteren Luft durch Reflexion an Dampfbläschen von äufserster Feinheit erfolge; also wenn diese ihrer Auflösung nahe sind, und daher klares Wetter bezeichnen. Nimmt man dieses an, so müfste man, um $F(\varphi)$ zu bestimmen, untersuchen, mit welcher Intensität ein solches Bläschen, wenn es der Beleuchtung der Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, das Licht nach allen Seiten reflectirt. Dabei handelt es sich aber nicht um eine einfache Reflexion an der äufseren Oberfläche des Bläschens. Da dasselbe ein in Kugelform gespanntes Wasserhäutchen ist, so hat man erstens bei dem jedesmaligen Durchgange des Lichtes durch dieses Häutchen die vielfachen Reflexionen an der vordern und hintern Fläche desselben zu berücksichtigen. Aufserdem wird aber von dem auffallenden Strahle *SA* (Fig. 4) nicht nur ein Theil bei *A* in der Richtung *AL* reflectirt, sondern ein zweiter bei *B* in der Richtung *BM;* von diesem wiederum ein Theil bei *C* in der Richtung *CN,* von diesem ein Theil bei *D* in der Richtung *DO* u. s. f. Diese Theile nehmen zwar der Reihe nach an Intensität ab, aber doch nicht schnell genug, dafs man sich mit den ersten wenigen derselben begnügen dürfte. Ich habe eine Rechnung darüber angestellt, von der ich hier nur die Resultate anführen will. Nimmt man nämlich für das Wasser, nach *Becquerel* und *Cahours,* das mittlere Brechungsverhältnifs zu 1,333 an, und bestimmt die Stärke der einzelnen Reflexionen bei verschiedenen Einfallswinkeln nach den von *Fresnel* gegebenen Formeln, so findet man, als Intensität (I) des von dem Bläschen nach verschiedenen Richtungen reflectirten Lichtes, die in der 2ten Columne der folgenden Tabelle enthaltenen Zahlen.

(II.)

φ	$I = F(\varphi)$	I nach Formel (33.)	Differenzen.
0	. . . .	0,950	. . . . .
2°	1,076	0,948	−0,128
10°	0,815	0,892	+0,077
20°	0,652	0,737	+0,085
30°	0,509	0,540	+0,031
40°	0,383	0,362	−0,021
50°	0,283	0,238	−0,045
60°	0,210	0,175	−0,035
70°	0,164	0,154	−0,010
80°	0,135	0,151	+0,016
90°	0,118	0,150 0,101	+0,032 −0,017
100°	0,109	- - -	−0,008
110°	0,104	- - -	−0,003
120°	0,103	- - -	−0,002
130°	0,102	- - -	−0,001
140°	0,101	- - -	0
150°	0,097	- - -	+0,004
160°	0,090	- - -	+0,011
170°	0,082	- - -	+0,019
178°	0,080	- - -	+0,021
180°	. . . .	- - -	. . . . .

Die Zahlen der 3ten und 4ten Columne finden erst später ihre Erklärung. Die der 2ten Columne, welche die Intensitäten des reflectirten Lichtes angeben, können als specielle Werthe der gesuchten Function $F(\varphi)$ betrachtet werden, den in der ersten Columne stehenden speciellen Werthen von φ entsprechend. Sie gestatten übrigens durchaus nicht die Vergleichung der Intensität des reflectirten Lichtes mit der des directen Sonnenlichtes. Um vielmehr die Bedeutung der darin als Einheit geltenden Gröfse zu verstehen, denke man sich um das Bläschen eine gegen dasselbe sehr grofse concentrische Kugel beschrieben. Wird dann die auf ein Flächen-Element ds derselben von dem Bläschen auffallende Lichtmenge durch $F(\varphi).ds$ ausgedrückt und dies für die

ganze Kugelfläche integrirt, indem der Flächenraum derselben $=1$ gesetzt wird, so ist die gefundene Lichtmenge die Menge des wirklich von dem Bläschen reflectirten Lichtes, wenn man die Menge des auffallenden directen Lichtes als Einheit annimmt.

Für $\varphi=0$ und $\varphi=180^0$ fehlen die Zahlen der zweiten Columne und es sind dagegen diejenigen für $\varphi=2^0$ und $\varphi=178^0$ angegeben. Um nämlich die Werthe für $\varphi=0$ und $\varphi=180^0$ zu bestimmen, ist nöthig, die Gröfse der Sonnenscheibe in Betracht zu ziehen, während es für alle, diesen Grenzen nicht sehr nahe liegenden Werthe von φ erlaubt ist, die Sonne als einen leuchtenden Punct anzusehen. Aus der eben beschriebenen sphärischen Darstellung erhellet aber, dafs die Menge der Strahlen, welche einem bestimmten Werthe von φ entsprechen, dem $\sin\varphi$ proportional ist, und daher können die Mengen, welche den Intervallen von $\varphi=0$ bis $\varphi=2^0$ und von $\varphi=178^0$ bis $\varphi=180^0$ entsprechen, nur so geringe sein, dafs die in ihnen noch eintretenden Abweichungen keine besondere Betrachtung verdienen. Es handelt sich hier nämlich nicht sowohl um die einzelnen Werthe der Intensitäten, als vielmehr um die Wirkungen des auf die ganze Kugel oder auf eine Halbkugel fallenden Lichtes.

Um nun zunächst die Constante r in der Gleichung (31.) bestimmen zu können, mufs das Verhältnifs $\frac{N}{M}$, wie es sich bei dieser Vertheilung herausstellt, für den besonderen Fall, dafs die Sonne im Zenith steht, berechnet werden. Dazu ist nöthig, eine bestimmte Function $F(\varphi)$ anzunehmen, welche den in der Tabelle (II.) gegebenen Zahlen so genau als möglich entspricht, zugleich aber für die nöthigen Integrationen bequem ist. Mit Berücksichtigung dieser letzteren Bedingung habe ich die folgende Formel gewählt; jedoch ausschliefslich für den vorliegenden Zweck, da sie für andere Zwecke nicht genau genug sein mag, und sich leicht Formeln finden lassen werden, welche jenen Werthen besser entsprechen. Da nämlich die Zahlen der Tabelle ergeben, dafs von $\varphi=90^0$ bis $\varphi=180^0$ die Intensität sich wenig ändert, so habe ich dieselbe für diese ganze Halbkugel als constant betrachtet. Für die andere Halbkugel dagegen habe ich gesetzt: $I=P+Q\cos^5\varphi$, wo P und Q constant sind. Diese Constanten habe ich so bestimmt, dafs die gemäfs dieser Formeln auf die beiden Halbkugeln fallenden Lichtmengen einzeln der Wahrheit nahe

entsprechen, und habe erhalten:

$$33. \begin{cases} \text{Von } \varphi = 0 \text{ bis } \varphi = 90^\circ & I = 0{,}1505 + 0{,}8 \cos^5 \varphi, \\ \text{Von } \varphi = 90^\circ \text{ bis } \varphi = 180^\circ & I = 0{,}1014. \end{cases}$$

Zur Vergleichung sind die aus diesen Formeln sich ergebenden Werthe in der 3ten Columne der obigen Tabelle neben die wahren Werthe gestellt, und in der 4ten Columne sind die Differenzen zwischen beiden hinzugefügt.

Diese Differenzen sind allerdings ziemlich bedeutend. Sie werden aber am gröfsten in der Nähe von $\varphi = 180^\circ$ und $\varphi = 0$, wo sie, wie schon erwähnt, am wenigsten Einflufs haben; und aufserdem sind sie so vertheilt, dafs die aus ihnen entstehenden Fehler sich grofsentheils aufheben müssen: denn von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^\circ$, wo die Differenzen am bedeutendsten sind, wechseln sie dreimal das Vorzeichen. Es lassen sich daher für den gegenwärtigen Zweck die Formeln (33.) als ausreichend betrachten.

Sucht man aus diesen Formeln durch Integration die auf die beiden Halbkugeln fallenden Lichtmengen, so findet sich

für die erste Halbkugel 0,1419 und
für die zweite Halbkugel 0,0507,

also die ganze von dem Bläschen reflectirte Lichtmenge

$$= 0{,}1926;$$

wobei die auf das Bläschen auffallende Lichtmenge als Einheit angenommen ist. Will man dagegen die eben gefundene Menge des ganzen reflectirten Lichtes als Einheit betrachten, so müssen die Constanten der Gleichungen (33.) durch diese Gröfsen dividirt werden, und man erhält

$$33\text{a}. \begin{cases} \text{Von } \varphi = 0 \text{ bis } \varphi = 90^\circ & I = 0{,}7813 + 4{,}1533 \cos^5 \varphi \text{ und} \\ \text{Von } \varphi = 90^\circ \text{ bis } \varphi = 180^\circ & I = 0{,}5264. \end{cases}$$

Nach diesen Formeln wollen wir den Lichtverlust berechnen. Dabei kann man für die ganze zweite Gleichung und für das erste Glied der ersten die früher gefundenen Resultate anwenden, und es bleibt *nur ein* Glied besonders zu betrachten, nämlich

$$4{,}1533 \cos^5 \varphi \quad \text{oder} \quad B \cos^5 \varphi,$$

wenn man

$$34. \quad 4{,}1533 = B$$

setzt. Wir können uns also vorstellen, die Lufttheilchen sendeten nur nach

unten Licht, und zwar von der Intensität, die durch $B\cos^5\varphi$ bestimmt wird; und für dieses Licht ist der auf dem Wege bis zur Erdoberfläche erlittene Verlust zu bestimmen.

Wir gehen dazu auf die frühere Betrachtungsweise zurück, indem wir das von einem Elemente bei P (Fig. 2) versandte Licht verfolgen. Für die gleichmäfsige Zerstreuung fand sich (4.), dafs die in der Zone rt ausgesandte Lichtmenge durch $\frac{1}{2}\mu\sin\beta\,d\beta$ ausgedrückt wird. Dieses geht im jetzigen Falle, bei Berücksichtigung der Formel $B\cos^5\varphi$, wenn man zugleich bedenkt, dafs, wenn die Sonne im Zenith steht, $\varphi=\beta$ ist, in

$$\tfrac{1}{2}\mu B\cos^5\beta\sin\beta\,d\beta$$

über, und der davon wirklich zur Erde gelangende Theil ist

$$=\tfrac{1}{2}\mu B e^{-\delta.\gamma.\sec\beta}\cos^5\beta\sin\beta\,d\beta.$$

Für die ganze von dem Elemente zur Erde gelangende Lichtmenge (λ_1) ist

$$\lambda_1=\tfrac{1}{2}B\mu\int_{\beta=0}^{\beta=\frac{1}{2}\pi}e^{-\delta.\gamma\sec\beta}\cos^5\beta\sin\beta\,d\beta,$$

und wenn man hier, wie früher, $\delta.\gamma\sec\beta=z$ setzt, so erhält man, der Gleichung (6.) entsprechend,

$$35.\qquad \lambda_1=\tfrac{1}{2}B\mu(\delta.\gamma)^6\int_{z=\delta.\gamma}^{z=\infty}\frac{e^{-z}}{z^7}\,dz.$$

Hierin mufs der Werth von μ aus (3.) substituirt, dabei aber $\gamma=0$, also $\sec\gamma=1$ gesetzt werden. Verfährt man dann weiter ganz wie oben, so erhält man, der Gleichung (10.) entsprechend, für die von der ganzen Säule zur Erde gelangende Lichtmenge (L_1)

$$36.\qquad L_1=\tfrac{1}{2}Be^{-a}\int_{x=0}^{x=a}\left[x^6e^x\int_x^\infty\frac{e^{-x}}{x^7}\,dx\right]dx.$$

Dieser Ausdruck läfst sich durch partielle Integration auf ähnliche zurückführen, wie die oben betrachteten; ich will daher den Gang der Rechnung nicht weiter verfolgen, sondern nur das Resultat angeben. Entwickelt man nämlich den Ausdruck, und setzt bei der Berechnung desselben für a den angenommenen Werth aus der Gleichung (27.), so erhält man

$$37.\qquad L_1=B.0{,}017486$$
$$=0{,}072625.$$

Um dagegen für die beiden constanten Glieder in (31 a.) die zur Erde und an die obere Grenze der Atmosphäre gelangenden Lichtmengen zu finden, kann man sich, wie gesagt, der früher gefundenen Resultate (Tabelle I.) bedienen. Fafst man diese Werthe zusammen, subtrahirt sie von der ganzen in der Atmosphäre zerstreueten Lichtmenge, und dividirt den Rest durch eben diese Menge, so erhält man für das gesuchte Verhältnifs:

$$38. \quad \frac{N}{M} = 0,2697.$$

Dieser Werth ist in der Gleichung (31.) zu substituiren, indem man darin zugleich $c = 1$ setzt, wodurch $e^{-ca} = e^{-a} = 0,75$ und $M = 0,25$ wird; dann findet man für die Constante:

$$r = 0,2940,$$

und durch Einsetzung dieses Werthes geht die Gleichung (31.) selbst in die folgende über:

$$39. \quad \frac{N}{M} = 0,5235 - 0,0846 \frac{e^{-ca}}{M}.$$

So also gestaltet sich in dieser Hypothese über die Natur der reflectirenden Körperchen die oben aufgestellte Schlufsformel für das gesammte zerstreuete Licht. Darnach würde an die Stelle der vierten Columne der Tabelle (I.) folgende Zahlenreihe treten:

(III.)

φ	$\frac{N}{M}$
0	0,270
20°	0,272
40°	0,281
60°	0,306
70°	0,336
80°	0,409

Man sieht, dafs der mittlere Lichtverlust 0,325 zwischen 60° und 70° fällt.

Wir wenden uns nun zu der zweiten Frage, wie die Verhältnisse $\frac{n}{m}$ und $\frac{n'}{m'}$ einzeln zu bestimmen seien, d. h. wieviel von dem ganzen, so eben gefundenen Lichtverluste auf das nach unten gehende Licht, und wieviel auf das nach oben gehende zu rechnen sei. Dazu bietet sich in unserem Falle

ein sehr bequemes und für diese minder wichtigen Bestimmungen auch hinlänglich genaues Auskunftsmittel dar. Die Werthe von $F(\varphi)$ ändern sich nämlich von $\varphi = 90^\circ$ bis $\varphi = 180^\circ$ so wenig, dafs wir die Function schon weiter oben innerhalb dieser Grenzen als constant betrachten durften; und da diese Grenzen für den Fall, dafs die Sonne im Zenith steht, das ganze aufwärts gehende Licht einschliefsen, so nahmen wir dasselbe für diesen Fall als gleichförmig zerstreuet an. Nun ist es aber gerade dieser Stand der Sonne, wo eine Ungleichförmigkeit in der Zerstreuung den bedeutendsten Einflufs auf die Gröfse des Lichtverlustes haben würde. Mit allmälig wachsendem Zenith-Abstande kommen zu dem aufwärts gehenden Lichte mehr und mehr von der Gleichförmigkeit abweichende Strahlen; zugleich nähert man sich aber auch mehr und mehr dem Stande, wo die Ungleichförmigkeit von geringem Einflusse ist. Bei dem Stande der Sonne nämlich, wo das gesammte zerstreuete Licht den mittleren Verlust erleidet, wird auch in dem aufwärtsgehenden Lichte, für sich betrachtet, keine bedeutende Differenz Statt finden. Und da dieser Zenith-Abstand beinahe 70° ist, während die ganze Rechnung nur bis 75° oder 80° gilt, so ist das noch bleibende Intervall zu klein, als dafs in ihm noch Abweichungen vorkommen sollten, die eine besondere Betrachtung verdienen. Man kann also für das nach oben gehende Licht bei jedem Stande der Sonne ohne bedeutenden Fehler den Verlust annehmen, der bei gleichförmiger Zerstreuung Statt finden würde, und der durch die Gleichung (25.) allgemein bestimmt und für einige Werthe von γ in der dritten Columne der Tabelle (I.) angeführt ist. Die in dem gesammten Lichtverluste Statt findenden Ungleichheiten sind nur auf Rechnung des nach unten gehenden Lichtes zu schreiben, und man erhält den Verlust dieses letzteren leicht, wenn man den des nach oben gehenden von dem ganzen Verluste abziehet.

Hat man auf solche Weise die Lichtmengen, welche eine verschiedene Behandlung erfordern, von einander gesondert, so kann man nun weiter zur Bestimmung des gesammten aus der Atmosphäre zu uns gelangenden Lichtes und der Helligkeit an einzelnen Puncten des Himmels schreiten. Dabei wird man im Allgemeinen denselben Gang verfolgen können, den *Lambert* bei diesen Untersuchungen eingeschlagen hat, wird aber zu viel genaueren Resultaten gelangen, als es bei der von *Lambert* zu Grunde gelegten Annahme möglich war.

Übrigens sind hierbei noch zwei Umstände zu berücksichtigen. Der erste ist die schon erwähnte Absorption des Lichtes in der Luft, wodurch eine Schwächung der Helle des Himmels entsteht. Der zweite bringt im Gegentheil eine Verstärkung derselben hervor. Die Erdoberfläche selbst nämlich, als erleuchtete Fläche, strahlt eine gewisse Menge des empfangenen Lichtes wieder aus, wovon ein Theil in den Weltenraum verloren geht, ein anderer von der Atmosphäre abermals zurückgeschickt wird. Diese letztere Lichtmenge wird sich, sobald man über die Helligkeit, mit der die Erdoberfläche leuchtet, eine bestimmte Annahme gemacht hat, durch ähnliche Rechnungen, wie die obigen, ohne Schwierigkeit finden lassen.

7.

Note sur les hyperdéterminants.

(Par Mr. *A. Cayley* de Cambridge.)

I. **S**oit V une fonction homogène de x, y de $2p^{\text{ième}}$ ordre. En égalant à zéro les coefficients différentiels du $p^{\text{ième}}$ ordre de cette fonction, pris par rapport à x, y, et en éliminant ces variables, on obtiendra entre les coefficients de la fonction un nombre p d'équations. Or parmi ces équations il y aura toujours une seule du second ordre, savoir

$$B(U, U) = 0$$

(suivant la notation dans mon mémoire sur les hyperdéterminants tome 30 cah. 1). Par exemple, en écrivant t au lieu de $x:y$ on a identiquement

$$\begin{aligned} & c\cdot(at+b) \\ & -b\cdot(bt+c) \\ & = (ac-b^2)t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (et \qquad\quad)(at^2+2bt+c) \\ & -(4dt+2e)(bt^2+2ct+d) \\ & +(3ct+2d)(ct^2+2dt+e) \\ & = (ae-4bd+3c^2)t^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (gt^2 \qquad\qquad\quad)(at^3+3bt^2+3ct+d) \\ & -\;(6ft^2+\;3gt \qquad)(bt^3+3ct^2+3dt+e) \\ & +\;(15et^2+18ft+6g)(ct^3+3dt^2+3et+f) \\ & -(10dt^2+15et+6f)(dt^3+3et^2+3ft+g) \\ & = (ag-6bf+15ec-10d^2)t^5, \end{aligned}$$

et ainsi de suite: il ne reste qu'à déterminer la loi des coefficients numériques des facteurs à gauche. Pour cela, représentons par $A, B, C, \ldots$ les coefficients de $(1+s)^{2p}$, et par $A', B', C', \ldots$ les coefficients de $(1-s)^{-p}$. On aura pour ces nombres le système suivant:

$$\begin{aligned} & +A'A \\ & -A'B,\; -B'A \\ & +A'C,\; +B'B,\; +C'A \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm I,\; \pm K,\; \pm L\,\ldots \end{aligned}$$

Les nombres I, K, L .. de la dernière ligne seront à déterminer au moyen d'une autre règle: il faut faire évanouir les sommes des nombres dans la même ligne verticale, ces nombres étant pris avec leurs signes actuels. Je suis parvenu par *induction* à ces formules, mais il ne serait pas, je crois, trop difficile de les démontrer directement.

Il me parait possible que tous les hyperdéterminants qui se rapportent à la fonction V, puissent être trouvés en éliminant entre les équations (en nombre de p) dont il s'agit, et cela dans le cas où U est de l'ordre $2p$ ou $2p+1$; au moins cette règle se vérifie pour les fonctions de deuxième, troisième et quatrième ordres, et cela paraissait (à priori) moins probable pour les derivées d'un degré plus élévé que pour celles du second degré, pour lesquelles, comme on vient de le voir, il est effectivement vrai.

Cela étant, il y aura seulement un nombre p de derivées indépendantes pour les fonctions du $2p^{\text{ième}}$ et du $(2p+1)^{\text{ième}}$ ordre: conclusion que je ne peux pas démontrer.

II. Soit $\nabla = 6abcd + 3b^2c^2 - a^2d^2 - 4ac^3 - 4db^3$, et représentons par ∇_1 le déterminant formé avec les coefficients différentiels du second ordre de ∇ par rapport à a, b, c, d, on aura

$$\nabla_1 = 3\nabla^2$$

(propriété qui a un rapport singulier avec celle qu'à démontrée M. *Eisenstein* par rapport aux coefficients du premier ordre de la même fonction ∇). La démonstration que je peux donner de ce théorème est à la vérité assez compliquée, mais je n'en vois pas d'autres. En mettant

$$p = \tfrac{1}{3}(bd - c^2), \quad q = \tfrac{1}{9}(bc - ad), \quad r = \tfrac{1}{3}(ac - b^2),$$

on obtient

$$\nabla_1 = 81 . \begin{vmatrix} a^2, & ab, & ac-3r, & ad+9q \\ ba, & b^2+2r, & bc-q, & bd-3p \\ ca-3r, & cb-q, & c^2+2p, & cd \\ da+9q, & db-3p, & dc, & d^2 \end{vmatrix}$$

où le déterminant ne contient que les termes du quatrième ou troisième degré en p, q, r, et en développant on a

$$\nabla_1 = 81 . \{9(pr-q^2)^2 - 2a^2p^3 - 2d^2r^3 - 12q(abp^2 + cdr^2) - 18q^2(b^2p + c^2r) \\ - 6(pr+q^2)(acp+bdr) - 2adq(3pr-q^2) - 18bcq(pr+q^2)\},$$

d'où, en réduisant au moyen des expressions

$$ap = -(2bq + cr), \quad dr = -(2cq + bp), \quad ad = bc - 3q,$$

on tire

$$\nabla_1 = 81.\{9(pr-q^2)^2+4(b^2p+2bcq+c^2r)(pr+q^2)+6q^2.(3pr-q^2)\},$$

ou enfin, au moyen de $2(b^2p+2bcq+c^2r) = -3pr$:

$$\nabla_1 = 243(pr-q^2)^2 = 3\nabla^2.$$

Voilà l'équation qu'il s'agissait à démontrer.

III. En considérant $a:d$, $b:d$, $c:d$ comme représentants des trois coordonnés d'un point, ou si l'on veut, des fonctions linéaires de ces coordonnés, l'équation $\nabla = 0$ appartient évidemment à une surface développable (de quatrième ordre). Mais la condition pour que l'équation $U = 0$ (V étant une fonction homogène de quatre variables) appartienne à une surface développable, est, que le déterminant formé avec les coefficients différentiels du second ordre de la fonction, s'évanouisse (Théorème de M. *Hesse* tome 28 p. 97 „Mém. sur les points d'inflexion des courbes du troisième ordre"). Donc il faut que ∇ s'évanouisse au moyen de $\nabla = 0$, c'est-à-dire, il faut que ∇ contienne le facteur ∇; ce qui s'accorde parfaitement avec l'équation qui vient d'être présentée. Mais il ne peut être prouvé de cette manière que l'autre facteur doit aussi se réduire à ∇, et même cela n'est pas vrai si ∇ vient d'une fonction d'un plus haut degré que le quatrième.

Il suit de cela qu'en supposant toujours que les coefficients soient des fonctions linéaires des coordonnées, le résultat $\Theta = 0$ de l'élimination de x, y entre $\frac{dU}{dx} = 0$, $\frac{dU}{dy} = 0$ appartient toujours à une surface développable. De même l'élimination de x, y entre les trois équations $\frac{d^2U}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2U}{dx\,dy} = 0$, $\frac{d^2U}{dy^2} = 0$ conduit aux équations de l'arête de rebroussement de la surface, et de plus, en éliminant entre les équations $\frac{d^3U}{dx^3} = 0$, $\frac{d^3U}{dx^2dy} = 0$, $\frac{d^3U}{dx\,dy^2} = 0$, $\frac{d^3U}{dy^3} = 0$, on obtient les points de rebroussement de l'arête de rebroussement. Cela conduit à quelques résultats remarquables.

Par exemple, la surface développable dont l'équation est

$$\nabla = 6abcd + 3b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d - a^2d^2,$$

a pour arête de rebroussement la courbe dont les équations équivalentes à deux équations seulement sont $bd - c^2 = 0$, $ad - bc = 0$, $ac - b^2 = 0$, ce qui est une *courbe du troisième ordre* seulement. Car en considérant deux quelconques de ces trois équations, par exemple celles-ci: $bd - c^2 = 0$, $ad - bc = 0$; ces équations appartiennent à deux surfaces du second ordre

qui ont eu commun la droite $d=0$, $c=0$: cela s'accorde avec un résultat que j'ai donne dans mon mémoire sur les surfaces développables dans le journal de Mr. *Liouville.*

Également, en considérant une équation de quatrième degré en t, on obtient une surface développable

$$(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3)^2=0,$$

qui a pour arête de rebroussement la courbe du sixième ordre exprimée par les équations $ae-4bd+3c^2=0$, $ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3=0$. Je n'ai pas complètement reussi à expliquer pourquoi cette courbe du sixième ordre a une osculatrice développable, seulement du sixième ordre, mais cette réduction s'opère en partie au moyen des points de rebroussement de la courbe, qui se trouvent au moyen des équations $at+b=0$, $bt+c=0$, $ct+d=0$, $dt+e=0$. Pour savoir en combien de points ces équations se correspondent, il faut remarquer que, a, b, c, d, e étant des fonctions linéaires des coordonnés, on aura toujours entre ces quantités une équation linéaire telle que

$$Aa+Bb+Cc+Dd+Ee=0,$$

où A, B, .. sont des constantes. Donc, en éliminant a, b, c, d, e, on obtient $A-Bt+Ct^2-Dt^3+Et^4=0$: équation du quatrième ordre, et à chaque valeur de t il correspond un des points dont il s'agit; donc la courbe du sixième ordre a quatre points de rebroussement

Également la surface développable qui correspond à une équation du $m^{\text{ième}}$ ordre, est de l'ordre $2(m-1)$; l'arête de rebroussement est de l'ordre $3(m-2)$, et il y a dans cette courbe un nombre $4(m-3)$ de points de rebroussement. Il faut toujours se rappeler que ces surfaces développables ne sont pas les surfaces développables les plus générales qui existent de l'ordre $2(m-1)$, excepté le cas des surfaces développables du quatrième ordre.

IV. Il vaut peut-être la peine de donner en passant une démonstration de ce théorème de M. *Chasles:* „Le plan qui passe par trois points qui se meuvent avec des vitesses uniformes dans trois droites quelconques, enveloppe une surface développable du quatrième degré." En effet, en supposant que $\alpha:\delta$, $\beta:\delta$, $\gamma:\delta$; $\alpha':\delta'$, $\beta':\delta'$, $\gamma':\delta'$; $\alpha'':\delta''$, $\beta'':\delta''$, $\gamma'':\delta''$, soient des fonctions linéaires du temps (δ, δ', δ'' peuvent être constants, ou, si l'on veut, des fonctions linéaires du temps, ce qui correspond à un cas un peu plus général que celui de M. *Chasles*, on peut prendre ces valeurs pour coordonnés des trois points mobiles. Donc, en prenant $x:w$, $y:w$, $z:w$

20 *

pour coordonnés d'un point quelconque du plan, on obtient l'équation de ce plan, en égalant à zéro le déterminant formé avec les valeurs x, y, z, w; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$; ce qui donne une équation de la forme $a+3bt+3ct^2+dt^3=0$, a, b, c, d étant des fonctions linéaires de x, y, z, w, et cela suffit pour démontrer le théorème dont il s'agit.

V. En finissant j'indiquerai un principe de classification des courbes à double courbure qui me parait être de quelque importance; savoir, on pourra distinguer les courbes qui ne peuvent pas être l'intersection *complète* de deux surfaces, de celles qui peuvent l'être. Par exemple, en fesant passer par une courbe donnée du troisième ordre deux surfaces du second ordre, la courbe n'est pas l'intersection complète des deux surfaces; celles-ci se coupent dans cette courbe et dans une certaine droite. Quel est le théorème analogue pour les courbes du $n^{\text{ième}}$ ordre? Peut on, par exemple, toujours combiner avec une courbe donnée d'un ordre quelconque, une autre courbe qui est l'intersection complète de deux surfaces, de manière que l'ensemble des deux courbes soit une intersection complète de deux surfaces? Et si non: de quelle manière trouvera t'on les équations générales d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ ordre? Quel est le degré de généralité de ces équations? Il y a une foule d'autres questions qu'on pourrait ici proposer. J'ai proposé une question analogue dans le point de vue analytique, mais elle est restée sans réponse.

Blackheath, 14 novembre 1846.

8.

Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Hrn. Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Br.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 16. im dritten, No. 21. im vierten Heft 26ten, No. 17. im dritten und No. 22. im vierten Heft 30ten Bandes.)

---

§. 29.

In einer Urne befinden sich n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln. m Kugeln, deren Zeichen die Reihenfolge der gewöhnlichen Zahlen haben, werden besonders beachtet. Man zieht $p$mal, nimmt jedesmal eine Kugel heraus und legt sie nach der Ziehung in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs von diesen m gesonderten Kugeln irgend eine Kugel $k$mal hintereinander erscheinen werde?

Die Berechnung der Zahl der günstigen Fälle hangt mit der Lösung folgenden Problems zusammen. Die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe werden gebildet: wie grofs ist die Anzahl der Gruppen, in welchen irgend ein Element aus m ausgewählten Elementen wenigstens $k$mal hintereinander erscheinen wird? Die Gruppen, welche der Aufgabe genügen, sind

$$
\begin{aligned}
1. \quad G_1 = \; & a_1\, a_1\, a_1 \ldots . a_1 = (a_1)^k \\
& a_2\, a_2\, a_2 \ldots . a_2 = (a_2)^k \\
& a_3\, a_3\, a_3 \ldots . a_3 = (a_3)^k \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_m a_m a_m \ldots . a_m = (a_m)^k,
\end{aligned}
$$

wenn man sich die m ersten Elemente gesondert vorstellt. Ihre Zahl ist m. Der Aufgabe wird genügt, wenn eine dieser Gruppen von der ersten, zweiten, dritten, etc., oder von der $(p-k+1)$ten Stelle an erscheint.

a. Erscheint eine der Gruppen von der *ersten* Stelle an, so können ihr alle möglichen Gruppen aus n Elementen zur $(p-k)$ten Classe folgen. Die hieraus sich ergebende Anzahl ist

$$A_1 = m . n^{p-k}.$$

b. Erscheint eine der Gruppen von der *zweiten* Stelle an, so wird es zur nothwendigen Bedingung, dafs das Element mit der nämlichen Stellenzahl nicht an der ersten Stelle erscheinen darf, weil dieser Fall schon unter *a*

begriffen ist. Folgen kann jede mögliche Zusammenstellung. Nimmt man nun die vorausgehenden Elemente dennoch vollständig an, so sind die zuviel eingeführten Gruppen wieder abzuziehen. Dies giebt

$$\begin{array}{l|r|r|rr|l}
a_2 & (a_1)^k + a_1 & (a_2)^k + a_1 & (a_3)^k \ldots\ldots & a_1 & (a_m)^k \\
a_3 & a_3 & a_2 & & a_2 & \\
a_4 & a_4 & a_4 & & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & a_{m-1} & \\
a_n & a_n & a_n & & a_{m+1} & \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & a_n &
\end{array}$$

$$= P'(a_1, a_2, \ldots . a_n)^1 \left| \begin{array}{l} (a_1)^k - a_1 | (a_1)^k \\ (a_2)^k - a_2 | (a_2)^k \\ (a_3)^k - a_3 | (a_3)^k \\ \ldots\ldots\ldots \\ (a_m)^k - a_m | (a_m)^k \end{array} \right. = m G_1 - S_1.$$

Hier bezeichnet, wie früher, G_1 Gruppen von der $k$ten und S_1 Gruppen von der $(k+1)$ten Dimension. Beide Zeichen, G_1 und S_1, deuten auf m Gruppen. Die aufzuführende Gruppen-Anzahl ist in Rücksicht auf die $p-k-1$ nachfolgenden Stellen:

$$A_2 = (n.m - m)n^{p-k-1} = mn^{p-k} - mn^{p-k-1}.$$

c. Erscheint eine der auflösenden Gruppen von der *dritten* Stelle an, so darf kein Element mit der nämlichen Bezeichnung an der vorhergehenden Stelle erscheinen. Nimmt man auch hier die vorstehenden Elemente vollständig an, so ergiebt sich

$$P'(a_1, a_2, \ldots . a_n)^1 [P'(a_1, a_2, \ldots . a_n) G_1 - S_1].$$

Hieraus erhält man, in Beziehung auf die ergänzenden Gruppen:

$$A_3 = n[n.m - m]n^{p-k-2} = m.n^{p-k} - m.n^{p-k-1}.$$

Setzt man diese Schlüsse weiter fort, so findet sich für das Schlufsglied:

$$A_{p-k+1} = m \cdot n^{p-k} - m.n^{p-k-1}.$$

Durch Summirung der Werthe A_1, A_2, A_3, ... A_{p-k+1} ergiebt sich folgende Zahl auszuscheidender Gruppen:

$$2. \qquad B = (p-k+1)m.n^{p-k} - (p-k)m.n^{p-k-1}.$$

Diese Schlüsse sind so lange richtig, bis die auflösenden Gruppen auf die $(k+1)$te Stelle gerückt sind. Ist dies geschehen, so tritt, nach Analogie des in den beiden vorhergehenden Paragraphen Gesagten, folgendes Schema ein:

$$3.\quad \begin{aligned} &+[P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^k G_1 - P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k-1} S_1] P'(a_1,a_n)^{p-2k} \\ &+[P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k+1} G_1 - P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^k S_1] P'(a_1,a_n)^{p-2k-1} \\ &+[P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k+2} G_1 - P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^k S_1] P'(a_1,a_n)^{p-2k-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+[P'(a_1,a_1,\ldots a_n)^{p-k} G_1 - P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^k S_1] P'(a_1,a_n)^0. \end{aligned}$$

Die Anzahl der wegen der ersten Verticalreihe auszuscheidenden Gruppen ergiebt sich aus (2.), wenn der Reihe nach k, $k+1$, $k+2$, ... $p-k$ statt p gesetzt, m statt G_1 eingeführt wird und die ergänzenden Gruppen gezählt werden. Es findet sich

$$\begin{aligned} C_1 = &\; m\cdot m\cdot n^{p-2k} \qquad = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^2 n^{p-2k} - \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^2 n^{p-2k-1} \\ &+ n\,[2mn-1\cdot m]\,m n^{p-2k-1} \\ &+ n^1[3mn-2m]\,m n^{p-2k-2} \\ &+ n^2[4mn-3m]\,m n^{p-2k-3} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &+ n^{p-2k-1}[(p-2k+1)mn-(p-2k)m]\,m. \end{aligned}$$

d. Ganz auf dieselbe Weise werden die Ausdrücke der zweiten Scheitelreihe vom zweiten Gliede an behandelt. Es ist der Reihe nach k, $k+1$, $k+2$, ... $(p-k-1)$ statt p in (2.) und m statt S_1 zu setzen. Die entstehenden Reihen sind um je ein Glied kürzer als die eben gefundenen, stimmen aber im Übrigen mit ihnen überein. Es findet sich also

$$-C_2 = -\frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} m^2 n^{p-2k-1} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} m^2 n^{p-2k-2}.$$

e. Die Glieder der zweiten Scheitelreihe müssen nun noch einer zweiten Behandlung unterworfen werden, welche sich aus folgender Darstellung ergiebt:

$$\begin{aligned} P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k-1} S_1 &+ P'(a_1,a_1,\ldots a_n)^1\cdot P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k-1} S_1 \\ &+ P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^2\cdot P(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k-1} S_1 + \ldots \\ &\ldots + P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{p-2k}\cdot P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k-1} S_1. \end{aligned}$$

Die Verbindung der Ausdrücke $P'(a_1,a_2,\ldots a_n)^{k-1} S_1$ führt zu Gruppen von der $2k$ten und $(2k+1)$ten Dimension, die sich als Ganzes characterisiren. Der erste Ausdruck giebt

$$\begin{aligned} (a_1)^{k-1} a_1 \,|\, (a_1)^k &= (a_1)^{2k}, \\ (a_2)^{k-1} a_2 \,|\, (a_2)^k &= (a_2)^{2k}, \\ (a_3)^{k-1} a_3 \,|\, (a_3)^k &= (a_3)^{2k}, \\ &\cdots\cdots \\ (a_m)^{k-1} a_m \,|\, (a_m)^k &= (a_m)^{2k}. \end{aligned}$$

Die Anzahl dieser Gruppen ist m. In Rücksicht auf die begleitenden Gruppen ergiebt sich folgende Anzahl:

$$D_1 = m \cdot n^{p-2k}.$$

f. Der Ausdruck $P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^1 \cdot P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^{k-1} S_1$ giebt nach dem eben Gesagten und nach Analogie der frühern Bemerkungen, wenn die vortretende Elementen-Anzahl vollständig angenommen wird, Folgendes:

$$\begin{aligned} P'(a_1, a_2, \ldots a_n)^1 G_2 & - a_1 \,|\, (a_1)^{2k} = n G_2 - S_2. \\ & - a_2 \,|\, (a_2)^{2k} \\ & - a_3 \,|\, (a_3)^{2k} \\ & \quad \cdots\cdots \\ & - a_m \,|\, (a_m)^{2k} \end{aligned}$$

Dies führt zu folgender Gruppen-Anzahl:

$$D_2 = [n \cdot m - m]\, n^{p-2k-1}.$$

Werden diese Schlüsse fortgesetzt, so ergiebt sich für die Gruppen-Anzahl des letzten Gliedes:

$$D_{p-2k+1} = m n^{p-2k} - m n^{p-2k-1}.$$

Durch Vereinigung von D_1, D_2, D_3, ... D_{p-2k+1} ergiebt sich

$$-C_3 = -[(p-2k+1) m \cdot n^{p-2k} - (p-2k) m \cdot n^{p-2k-1}].$$

Wird $C_1 - C_2 - C_3$ zusammengezählt, so ist die von (2.) auszuscheidende Zahl von Gruppen:

$$4.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-2k} - 2 \cdot \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-2k-1} + \frac{(p-2k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-2k-2}$$
$$-[(p-2k+1) m \cdot n^{p-2k} - (p-2k) m \cdot n^{p-2k-1}].$$

Gehen wir auf demselben Wege weiter, so zeigt sich leicht die Übereinstimmung der hiesigen Entwicklungsart mit denen in den beiden vorhergehenden Fällen. Es gelten deshalb auch die nämlichen Schemata, wie früher, deren Anwendung sich aber dadurch vereinfacht, dafs alle die Symbole G_1, G_2, G_3, ... und S_1, S_2, S_3, ... ohne Unterschied auf m deuten. Demnach ist die Zahl der von C auszuscheidenden Gruppen:

$$5.\quad D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m^3 \cdot n^{p-3k} - 3 \cdot \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m^3 \cdot n^{p-3k-1}$$
$$+ 3 \cdot \frac{(p-3k-1)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m^3 \cdot n^{p-3k-2} - \frac{(p-3k-2)^{3|1}}{1^{3|1}} \cdot m \cdot n^{p-3k-3}$$
$$-2\left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-3k} - 2 \cdot \frac{(p-3k)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-3k-1} + \frac{(p-3k-1)^{2|1}}{1^{2|1}} \cdot m^2 \cdot n^{p-3k-2}\right]$$
$$+(p-3k+1) m n^{p-3k} - (p-3k) m n^{p-3k-1}.$$

Das Fortgangsgesetz, welches diesen Gebilden zu Grunde liegt, läfst sich deutlich erkennen. Es fällt mit dem in (4. und 5.) im vorigen Paragraph zusammen, wenn gehörigen Orts Potenzen statt Facultäten geschrieben werden. Es ist allgemein

$$6.\quad R = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-rk} - \frac{r}{1} \cdot \frac{(p-rk)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-3k-1}$$

$$+ \frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{(p-rk-1)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-rk-2} - \ldots (-1)^r \cdot \frac{(p-rk-r+1)^{r|1}}{1^{r|1}} \cdot m^r \cdot n^{p-(k+1)r}$$

$$- \frac{r-1}{1} \Big[\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \cdot m^{r-1} \cdot n^{p-rk} - \frac{r-1}{1} \cdot \frac{(p-rk)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \cdot m^{r-1} \cdot n^{p-rk-1} \ldots$$

$$\ldots (-1)^{r-1} \cdot \frac{(p-(k+1)r+2)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \cdot m^{r-1} \cdot n^{p-(k+1)r+1} \Big]$$

. . . .

$$(-1)^{r-1} \frac{(r-1)^{r-1|-1}}{1^{r-1|1}} [(p-rk+1)m \cdot n^{p-rk} - (p-rk)m \cdot n^{p-rk-1}].$$

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ist

$$7.\quad A = B - C + D - E + \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit ist

$$8.\quad w = \frac{(p-k+1)m}{n^k} - \frac{(p-k)m}{n^{k+1}}$$

$$- \Big[\frac{(p-2k+1)^{2|1} m^2}{1^{2|1} n^{2k}} - 2 \cdot \frac{(p-2k)^{2|1} m^2}{1^{2|1} n^{2k+1}} + \frac{(p-2k-1)^{2|1} m^2}{1^{2|1} n^{2k+2}} \Big]$$

$$+ \frac{(p-2k+1)m}{n^{2k}} - \frac{(p-2k)m}{n^{2k+1}}$$

$$+ \frac{(p-3k+1)^{3|1} m^3}{1^{3|1} n^{3k}} - 3 \cdot \frac{(p-3k)^{3|1} m^3}{1^{3|1} m^{3k+1}} + 3 \cdot \frac{(p-3k-1)^{3|1} m^3}{1^{3|1} m^{3k+2}} - \frac{(p-3k-2)^{3|1} m^3}{1^{3|1} m^{3k+3}}$$

. . . .

In einer Urne befinden sich m, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... m bezeichnete Kugeln. Man zieht $p$mal, nimmt jedesmal eine Kugel heraus und legt sie in die Urne nach der Ziehung zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs irgend eine Kugel $k$mal hintereinander erscheinen werde?

Die dem Erfolge günstige Gruppen-Anzahl ergiebt sich, wenn man in den Werthen von B, C, D, E, ... m statt n setzt. Geschieht dies, so ergeben sich für B, C, D, E, ... sehr kurze Ausdrücke, wenn die schiefliegenden Glieder auf dieselbe Weise wie in (8. 9. und 10.) summirt werden. Es findet sich

$$9.\quad C = \frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^{p-2k+2} - 2\cdot\frac{(p-2k+1)(p-2k+1)}{1\cdot 2}\cdot m^{p-2k+1}$$

$$-\frac{(p-2k)(p-2k+1)}{1\cdot 2}\cdot m^{p-2k}$$

$$10.\quad D = \frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^{p-3k+3} - 3\cdot\frac{p-3k+2}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^{p-3k+2}$$

$$+3\cdot\frac{p-3k+1}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^{p-3k+1} - \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^{p-3k}$$

u. s. w. Allgemein

$$11.\quad R = \frac{(p-rk+1)^{r|1}}{1^{r|1}}\cdot m^{p-(k-1)r} - \frac{r}{1}\cdot\frac{p-(k-1)r-2}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot m^{p-(k-1)r-1}$$

$$+\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{p-(k-1)r-3}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot m^{p-(k-1)r-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^r\frac{r^{r|-1}}{1^{r|1}}\cdot\frac{p-rk}{r}\cdot\frac{(p-rk+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}\cdot m^{p-rk}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich noch weiter abkürzen, wenn die Facultäten in (9. 10. und 11.) anders geordnet werden; wie es sich an der Gleichung (10.) zeigen wird. Es ist, wenn man die Potenz m^{p-3k} aus sämmtlichen Gliedern scheidet,

$$\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^3 = \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m^3 + \frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^3,$$

$$-3\cdot\frac{p-3k+2}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m^2 = -\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot 3m^2 - \frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot 2m^2,$$

$$+3\cdot\frac{p-3k+1}{3}\cdot\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m = +(p-3k)^{3|1}\cdot 3m + \frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m,$$

$$-\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}} = -\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}.$$

Werden die zwei verticalen Reihen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vereinigt, so ist

$$\frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}[m^3-3m^2+3m-1] = \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot(m-1)^3,$$

$$\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}[m^2-2m+1]m = \frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot(m-1)^2 m.$$

Demnach ist

$$12.\quad D = \left[\frac{(p-3k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m(m-1)^2 + \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}(m-1)^3\right]m^{p-3k}.$$

Auf gleiche Weise lassen sich die übrigen Glieder E, F, ... behandeln, und die Zahl der günstigen Gruppen ist

$$13.\quad A = [(p-k+1)^{0|1}\cdot m + (p-k)(m-1)]m^{p-k}$$
$$-\left[(p-2k+1)^{1|1}\cdot m(m-1) + \frac{(p-2k)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot(m-1)^2\right]m^{p-2k}$$
$$+\left[\frac{(p-2k+1)^{2|1}}{1^{2|1}}\cdot m(m-1)^2 + \frac{(p-3k)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot(m-1)^3\right]m^{p-3k}$$
$$-\left[\frac{(p-3k+1)^{3|1}}{1^{3|1}}\cdot m(m-1)^3 + \frac{(p-3k)^{4|1}}{1^{4|1}}\cdot(m-1)^4\right]m^{p-4k}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$14.\quad w = \frac{m+(p-k)(m-1)}{m^k} - \frac{(p-2k+1)m(m-1)}{m^{2k}} - \frac{(p-2k)^{2|1}(m-1)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k}}$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{2|1}m(m-1)^2}{1\cdot 2\cdot m^{3k}} + \frac{(p-3k)^{3|1}(m-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^{3k}}$$
$$-\frac{(p-4k+1)^{3|1}m(m-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^{4k}} - \frac{(p-4k)^{4|1}(m-1)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot m^{4k}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

oder auch

$$15.\quad w = \frac{(p-k+1)^{0|1}(m-1)}{m^k}\left[p-k+\frac{1\cdot m}{m-1}\right] - \frac{(p-2k+1)^{1|1}(m-1)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k}}\left[p-2k+\frac{2m}{m-1}\right]$$
$$+\frac{(p-3k+1)^{2|1}(m-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^{2k}}\left[p-3k+\frac{3m}{m-1}\right]$$
$$-\frac{(p-4k+1)^{3|1}(m-1)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot m^{4k}}\left[p-4k+\frac{4m}{m-1}\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Behält man die gewählte Bezeichnung bei, so giebt

$$16.\quad A_k^{r,s} = A_k^r - A_k^{s+1}$$

die Zahl der Gruppen, wenn eine Kugel wenigstens $k$mal hintereinander erscheinen, und dieses wiederholte Erscheinen wenigstens $r$mal und höchstens $s$mal eintreten soll.

Die Wahrscheinlichkeiten, dafs unter den obigen Bedingungen eine Kugel $k$mal hintereinander erscheinen, und dafs dieses Erscheinen wenigstens r und höchstens $s$mal eintreten werde, ist unter den oben angegebenen Bedingungen:

$$17.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{n^p},$$

$$18.\quad w = \frac{A_k^r - A_k^{s+1}}{m^p}.$$

Setzt man in (15.) $m=2$, so ergiebt sich

$$19.\quad w=\frac{p-k+2}{2^k}-\frac{(p-2k+1)(p-2k+2\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 2^{2k}}+\frac{(p-3k+1)(p-3k+2)(p-3k+3\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3k}}-\dots$$

Diese Gleichung beantwortet folgendes Problem.

A trachtet gegen *B* ein Ereignifs $k$mal hintereinander herbeizuführen. Das Gleiche unternimmt *B* gegen *A*. Die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle zu siegen, ist für *A* und *B* gleich grofs. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Versuchen einer von beiden gesiegt haben werde?

Die Aufgabe läfst sich auch in folgender Form ausdrücken.

$(k+1)$ Personen spielen miteinander, unter der Bedingung, dafs Derjenige gewinnen soll, welcher der Reihe nach alle seine Gegner besiegt haben wird. Die Wahrscheinlichkeit für jeden Spieler, im einzelnen Falle zu siegen, sobald er zum Spiele gelangt, ist $\frac{1}{2}$. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in p Versuchen geendet sein werde?

N. Bernoulli hat diese Aufgabe in der eben angegebenen Form in einem Briefe an *Montmort* aufgestellt (Analyse sur les jeux d'haz. II éd. Par. 1714. Pg. 382). *Laplace* hat es nach ihm (Théor. anal. d. prob. Nro. 11. Pg. 241) durch die „Fonct. génératr." gelöset, ohne die Arbeit des Erfinders anzuführen. Hier erscheint es als ein besonderer Fall einer sehr allgemeinen Aufgabe.

Häufig kommt dies Spiel unter drei Personen vor, und zwar so, dafs diejenige, welche im einzelnen Falle verliert, eine bestimmte Summe an den Gegner und in eine gemeinschaftliche Casse zahlen mufs. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in p Versuchen geendet sein werde, ergiebt sich, wenn in (19.) $k=2$ gesetzt wird. Bei 2, 3, 4, 5, 6, ... Versuchen sind die Wahrscheinlichkeiten

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{7}{8},\ \tfrac{15}{16},\ \tfrac{31}{32},\ \tfrac{63}{64},\ \tfrac{127}{128},\ \dots$$

Anm. Das hier befolgte Verfahren ist zu Entwicklungen sehr dienlich. Es hat sich dies schon in (§. 26.) gezeigt und wird sich immer zeigen, auch wenn nur specielle Fälle zu behandeln sind. Soll die Gleichung (19.) entwickelt und die zuletzt gegebene Darstellung der Aufgabe beibehalten werden, so wird man die Gleichung auf folgende Art finden.

Damit das Spiel geendet werde, mufs irgend ein Spieler $k$mal hintereinander gewinnen. Er kann aber nur gewinnen, wenn ihn die Reihe des Eintritts getroffen hat. Der erste und zweite Spieler kann also nur in den r ersten Versuchen gewinnen, der dritte nur von dem zweiten Versuche an, der vierte von dem dritten Versuche an, u. s. w., der $(k+1)$te von dem

$(p-k+1)$ten Versuche an. Demnach sind $[(p-k+1)+1]$ Fälle möglich, in welchen dies geschehen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignifs in jedem einzelnen Falle eintreffen werde, ist $\frac{1}{2^k}$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$20. \quad w_1 = \frac{p-k+1}{2^k} + \frac{1}{2^k}.$$

Diese Schlüsse sind richtig, bis das Spiel bis zu dem $(k+1)$ten Versuche vorgerückt ist; dann sind k Versuche vorausgegangen, worin das Ereignifs schon eingetreten sein kann. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit mufs bestimmt und von der eben gefundenen ausgeschieden werden. Sie findet sich, wenn die Zahl der günstigen Fälle nach der Formel

$$21. \quad A_1 = \frac{p-k+1}{1} + 1$$

bestimmt und mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit des einzelnen Falles verbunden wird. Wird daher in (21.) $p=k$ gesetzt, so ergiebt sich für die abzuziehende Gröfse:

$$w_2 = \left[\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Ist das Spiel bis zum $(k+2)$ten Versuche vorgerückt, so ist in (21.) $p=k+1$ zu setzen und es ergiebt sich für die auszuscheidende Gröfse:

$$w_3 = \left[\frac{2}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Ist das Spiel bis zum $(k+3)$ten Versuche vorgerückt, so ist in (21.) $p=k+2$ zu setzen und der auszuscheidende Ausdruck ist

$$w_4 = \left[\frac{3}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}$$

u. s. w. Endlich ist

$$w_{p-2k+2} = \left[\frac{p-2k+1}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Die Verbindung dieser Ausdrücke führt zu folgender Formel:

$$U_1 = \left[\frac{(p-2k+1)(p-2k+2)}{1.2.2^k} + \frac{(p-2k+1)}{2^k}\right]\frac{1}{2^k}.$$

Die Schlüsse sind so lange gültig, bis das Spiel bis zum $(2k+1)$ten Versuche vorgeschritten ist. Dann treten ähnliche Fälle ein, wie die vorigen; welche dann wieder Ausscheidungen veranlassen. Diese Ausscheidungen ergeben sich, wenn in dem Zähler der eben gefundenen Formel

$$A_2 = \frac{(p-2k+1)(p-2k+2)}{1.2} + \frac{p-2k+1}{1}$$

der Reihe nach $p = 2k$, $2k+1$, $2k+2$, ... $p-k$ gesetzt wird und die Resultate mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verbunden werden. Daraus entsteht folgender Ausdruck:

$$U_2 = \frac{(p-3k+1)(p-3k+2)(p-3k+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^{3k}} + \frac{(p-3k+1)(p-3k+2)}{1\cdot2\cdot2^{3k}}.$$

Die Schlüsse lassen sich leicht fortsetzen und es ergiebt sich durch schickliche Verbindung die Reihe

$$22.\quad w = \frac{p-k+2}{2^k} - \frac{(p-2k+1)(p-2k+2\cdot2)}{1\cdot2\cdot2^{2k}} + \frac{(p-3k+1)(p-3k+2)(p-3k+3\cdot2)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^{3k}} - \dots,$$

die schon in (19.) aufgestellt wurde.

§. 30.

Ein besonderer Fall der Aufgabe im vorigen Paragraph soll hier näher betrachtet werden; und zwar unter folgender veränderter Form.

A trachtet, gegen B ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet wird, $r$mal hintereinander in p Versuchen herbeizuführen. Die Wahrscheinlichkeit, welche das Eintreffen des für B günstigen Ereignisses bedingt, werde durch b bezeichnet. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A, seinen Zweck zu erreichen?

A erreicht seinen Zweck, wenn das ihm günstige Ereignifs $r$mal hintereinander, entweder gerade vom 1ten, oder vom 2ten, oder vom 3ten u. s. w., oder endlich vom $(p-r+1)$ten Versuche an eintrifft.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal hintereinander vom ersten Versuche an eintreffen werde, ist

$$w_1 = a^r.$$

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs es vom zweiten Versuche an eintreffen werde, setzt voraus, dafs dafs für A günstige Ereignifs im ersten Versuche nicht eintreffen werde, weil dieser Fall schon unter a vorgesehen ist. Die hieraus sich ergebende Wahrscheinlichkeit ist

$$w_2 = b a^r.$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das für A günstige Ereignifs vom dritten Versuche an eintreffen werde, setzt voraus, dafs das entgegengesetzte Ereignifs gerade im zweiten Versuche eintreffen werde. Im ersten Versuche kann jedes von den beiden fraglichen Ereignissen eingetroffen sein. Die hiedurch bedingte Wahrscheinlichkeit ist

$$w_3 = (a+b) b a^r.$$

d. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das für A günstige Ereignifs vom vierten Versuche an eintreffen werde, setzt voraus, dafs das Entgegengesetzte gerade im dritten Versuche eintreffen werde. In den beiden ersten Versuchen kann jedes Ereignifs eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist

$$w_4 = (a+b)^2 b a^r.$$

Werden diese Schlüsse weiter fortgesetzt, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignifs gerade vom $(p-r+1)$ten Versuche an eintreffen werde:

$$w_{p-r+1} = (a+b)^{p-r-1} b a^r.$$

Durch Vereinigung aller auf die vorstehende Weise gefundenen Ausdrücke ergiebt sich

$$1. \quad w_0 = a^r + b a^r [1 + a + b + (a+b)^2 + (a+b)^3 + \dots (a+b)^{p-r-1}]$$
$$= a^r + b a^r \frac{1-(a+b)^{p-r}}{1-(a+b)}.$$

Die Schlüsse sind so lange gültig, als die Potenzen des vorausgehenden Binomiums $a+b$ sich nicht bis zur $r$ten erheben. Erheben sie sich bis zu dieser Höhe, so enthalten die Glieder der Reihe Fälle, die für A günstig sind und welche ausgeschieden werden müssen. Die Glieder, welche hiebei in Betracht kommen, sind

$$(a+b)^r b a^r, \quad (a+b)^{r+1} b a^r, \quad (a+b)^{r+2} b a^r, \quad \dots \quad (a+b)^{p-r-1} b a^r.$$

Die Ausscheidung geht nach den Bemerkungen in (a, b, c) vor sich und es sind die Schlüsse, welche dort auf $p-r+1$ Fälle angewendet wurden, auf $r, r+1, r+2, \dots p-1$ Fälle anzuwenden. Dies giebt

$$u_1 = a^r b a^r,$$
$$u_2 = (a^r + b a^r) b a^r,$$
$$u_3 = (a^r + b a^r + (a+b) b a^r) b a^r,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{p-2r} = (a^r + b a^r + (a+b) b a^r + (a+b)^2 b a^r \dots (a+b)^{p-2r-2} b a^r) b a^r.$$

Dieser Ausdruck läfst sich leicht in folgenden umformen:

$$2. \quad u_0 = (p-2r) a^r b a^r + (b a^r)^2 [(p-2r-1) + (p-2r-2)(a+b)$$
$$+ (p-2r-3)(a+b)^2 + \dots (a+b)^{p-2r-2}].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe läfst sich nach (No. 417. §. 84. S. 180) meiner „Aufsteigenden Functionen" summiren. Sie giebt folgenden Ausdruck:

$$3. \quad u_0 = (p-2r) a^r b a^r + (b a^r)^2 \left[\frac{(a+b)^{p-2r} - (a+b)}{(a+b-1)^2} - \frac{p-2r-1}{a+b-1}\right].$$

Der Ausdruck (2.) oder (3.) giebt so lange ein richtiges Resultat, als die

Potenzen von $a+b$ unter r stehen. Erheben sie sich auf r, oder darüber, so sind Ausscheidungen nöthig, die man auf ähnliche Weise wie bisher erhält. Benutzt man hiezu die obigen Gleichungen, so findet sich

$$\begin{aligned}
4.\quad t = \ & (p-3r-1)a^r(ba^r)^2, \\
& +(p-3r-2)a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3(p-3r-2) \\
& +(p-3r-3)a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3[(p-3r-3)+(p-3r-3)(a+b)] \\
& +(p-3r-4)a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3[(p-3r-4)+(p-3r-4)(a+b) \\
& \qquad\qquad +(p-3r-4)(a+b)^2] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +a^r(ba^r)^2 \qquad +(ba^r)^3[1+(a+b)+(a+b)^2+(a+b)^3+\ldots.(a+b)^{p-3r-3}] \\
= & \frac{(p-3r-1)^{2|1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2a^r+(ba^r)^3\Big[\frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}}+\frac{(p-3r-3)^{2|1}}{1^{2|1}}(a+b) \\
& \qquad +\frac{(p-3r-4)^{2|1}}{1^{2|1}}(a+b)^2+\ldots.\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}(a+b)^{p-3r-3}\Big].
\end{aligned}$$

Wird hier die eingeklammerte Reihe nach der oben angegebenen Art summirt, so geht (4.) in folgende Formel über:

$$5.\quad t =$$

$$\frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2a^r+(ba^r)^3\Big[\frac{(a+b)^{p-3r}-(a+b)^2}{(a+b-1)^3}-\frac{(p-3r-2)(a+b)}{(a+b-1)^2}-\frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}(a+b-1)}\Big].$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich folgender, von (5.) auszuscheidender Ausdruck:

$$6.\quad s =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(p-4r)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot a^r(ba^r)^3-(ba^r)^4\Big[\frac{(a+b)^{p-4r}-(a+b)^3}{(a+b-1)^4}-\frac{(p-4r-3)(a+b)^2}{(a+b-1)^3}-\frac{(p-4r-3)^{2|1}(a+b)}{1^{2|1}(a+b-1)^2} \\
& \qquad -\frac{(p-4r-3)^{3|1}}{1^{3|1}(a+b-1)}\Big].
\end{aligned}$$

Das Fortgangsgesetz liegt klar vor Augen. Die Gröfsen a und b stehen in keiner nähern Beziehung zu einander, sondern sind gegenseitig unabhängig. Hieraus ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w =$$

$$\begin{aligned}
& a^r+ba^r\frac{(a+b)^{p-r}-1}{a+b-1} \\
& -(p-2r)a^r\cdot ba^r-(ba^r)^2\Big[\frac{(a+b)^{p-2r}-(a+b)}{(a+b-1)^2}-\frac{p-2r-1}{a+b-1}\Big] \\
& +\frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot a^r(ba^r)^2+(ba^r)^3\Big[\frac{(a+b)^{p-3r}-(a+b)^2}{(a+b-1)^3}-\frac{(p-3r-2)(a+b)}{(a+b-1)^2}-\frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}(a+b-1)}\Big] \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Werden die Gröfsen a und b in eine bestimmte Beziehung zu einander gebracht und wird $a+b=1$ gesetzt, so schliefsen die für A und B günstigen

Wahrscheinlichkeiten sich gegenseitig aus. Für diesen Fall nimmt die Reihe (7.) eine einfachere Gestalt an. Es entstehen nämlich Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$, welche leicht bestimmbare Werthe liefern; wie man sich aus der 3ten Abhandlung m. Different. Calculs überzeugen kann. Demnach ergiebt sich aus (7.) folgender Ausdruck:

$$8.\quad w = a^r + (p-r)ba^r - (p-2r)a^r ba^r - \frac{(p-2r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2 + \frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot a^r(ba^r)^2 - \frac{(p-3r)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^3 - \frac{(p-4r)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot a^r(ba^r)^3 - \frac{(p-4r)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^4 \;\ldots$$

oder

$$9.\quad w = ba^r\left[\frac{p-r}{1}+\frac{1}{b}\right] - \frac{p-2r}{1}(ba^r)^2\left[\frac{p-2r-1}{2}+\frac{1}{b}\right] + \frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^3\left[\frac{p-3r-2}{3}+\frac{1}{b}\right] - \ldots$$

Hieraus findet sich auch die Wahrscheinlichkeit, dafs B ein Ereignifs wenigstens $s$mal hintereinander, mit der für ihn günstigen Wahrscheinlichkeit b in p Versuchen herbeizuführen im Stande sein werde. Sie ist

$$10.\quad w = ab^s\left[\frac{p-s}{1}+\frac{1}{a}\right] - (p-2s)(ab^s)^2\left[\frac{p-2s-1}{2}+\frac{1}{a}\right] + \frac{(p-3s)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ab^s)^3\left[\frac{p-3s-2}{3}+\frac{1}{a}\right] - \ldots$$

Zieht man die Gleichungen (8. oder 9.) von der Einheit ab, so ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dafs A im Stande sein werde, das fragliche Ereignifs unter den genannten Bedingungen höchstens $(r-1)$mal hintereinander herbeizuführen.

Die vorgelegte Aufgabe läfst sich leicht verallgemeinern, wenn den Gröfsen a und b bestimmte Werthe beigelegt werden. Sie stellt sich unter folgender Form dar,

A_1 trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bestimmt ist, gegen die Personen A_2, A_3, ... A_m in p Versuchen wenigstens $r$mal hintereinander herbeizuführen. Die Wahrscheinlichkeiten, welche das Unternehmen der Gegner begünstigen, sind der Reihe nach b, c, d, ... m. Jede der andern Personen versucht das Nämliche

gegen die übrigen. Die ihnen zukommenden Zahlen von Versuchen sind $s, t, u, \ldots z$. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Personen?

Die Wahrscheinlichkeit für A_1 findet sich leicht aus den Gleichungen dieses Paragraphs, indem die Gesammtzahl der Gegner durch Einen vertreten werden kann, für welchen die *Summe* sämmtlicher Wahrscheinlichkeiten Statt findet. Setzt man demnach in (7.) $b = b+c+d+\ldots+m$, so ist die Wahrscheinlichkeit für A_1:

$$11. \quad w =$$

$$a^r + (b+c+\ldots m)a^r \frac{(a+b+\ldots m)^{p-r}-1}{a+b+\ldots m-1}$$

$$-(p-2r)(b+c+\ldots m)a^{2r} - (b+c+\ldots m)^2 a^{2r}\left[\frac{(a+b+\ldots m)^{p-2r}-(a+b+\ldots m)}{(a+b+\ldots m-1)^2}\right.$$

$$\left. - \frac{p-2r-1}{a+b+c+\ldots m-1}\right]$$

$$+\frac{(p-2r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(b+c+\ldots m^2)a^{3r} + (b+c+\ldots m)^3 a^{3r}\left[\frac{(a+b+\ldots m)^{p-3r}-(a+b+\ldots m)^2}{(a+b+\ldots m-1)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{(p-3r-2)(a+b+\ldots m)}{(a+b+\ldots m-1)^2} - \frac{(p-3r-2)^{2|1}}{1^{2|1}(a+b+\ldots m-1)}\right]$$

. . . .

Auf gleiche Weise findet sich die Wahrscheinlichkeit für jeden andern Theilnehmer. Die Gleichung (11.) vereinfacht sich sehr, wenn

$$a+b+c+\ldots+m = 1$$

gesetzt wird. Für diesen Fall hat man, aus den gleichen Gründen wie früher, folgende Gleichung zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für A_1:

$$12. \quad w = (1-a)a^r\left[\frac{p-r}{1}+\frac{1}{1-a}\right]$$

$$-\frac{p-2r}{1}(1-a)^2 a^{2r}\left[\frac{p-2r-1}{2}+\frac{1}{1-a}\right]$$

$$+\frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(1-a)^3 a^{3r}\left[\frac{p-3r-2}{3}+\frac{1}{1-a}\right]$$

. . . .

Die Wahrscheinlichkeit für A_2 ist

$$13. \quad w = (1-b)b^s\left[\frac{p-s}{1}+\frac{1}{1-b}\right]$$

$$-\frac{p-2s}{1}(1-b)^2 b^{2s}\left[\frac{p-2s-1}{2}+\frac{1}{1-b}\right]$$

$$+\frac{(p-3s)^{2|-1}}{1^{2|1}}(1-b)^3 b^{3s}\left[\frac{p-3s-1}{3}+\frac{1}{1-b}\right] \text{ u. s. w.}$$

. . . .

Die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich leicht. Die in diesem Paragraph gefundenen Gleichungen lassen sich zu Anwendungen auf die Combinations-Lehre benutzen. Entfernt man nämlich den Nenner aus den vorstehenden Gleichungen, so kann man aus der Gleichung für die Wahrscheinlichkeit auf die Zahl der dem Unternehmen günstigen Fälle übergehen. Dabei ist jedoch zu beachten, dafs die Gröfsen, welche die Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, nicht quantitativ verschieden, sondern untereinander gleich angenommen werden müssen, weil sie in diesem Falle Elemente vertreten. Es ist demnach in (12.) $a=\frac{1}{m}$, $b=\frac{1}{m}$, $c=\frac{1}{m}$, ... $m=\frac{1}{m}$ zu setzen und dann mit m^p zu multipliciren. Hieraus ergiebt sich die Anzahl der Gruppen, in welchen ein bestimmtes Element wenigstens $r$mal hintereinander erscheinen wird, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden. Sie ist

$$14.\quad A = m^{p-r} + (p-r)(m-1)m^{p-r-1}$$
$$-(p-2r)(m-1)m^{p-2r-1} - \frac{(p-2r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-1)^2 m^{p-2r-2}$$
$$+\frac{(p-3r)^{2|-1}}{1^{2|1}}(m-1)^2 m^{p-2r-2} + \frac{(p-3r)^{3|-1}}{1^{3|1}}(m-1)^3 m^{p-3r-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

oder auch, in veränderter Form,

$$15.\quad A = [(p-r)(m-1)+m]m^{p-r-1}$$
$$-\frac{(p-2r)[(p-2r)(m-1)+m+1]}{1\cdot 2}(m-1)m^{p-2r-2}$$
$$+\frac{(p-3r)(p-3r-1)[(p-3r)(m-1)+m+2]}{1\cdot 2\cdot 3}(m-1)^2 m^{p-3r-3}$$
$$-\frac{(p-4r)(p-4r-1)(p-4r-2)[(p-4r)(m-1)+m+3]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(m-1)^3 m^{p-4r-4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hieraus läfst sich auch die Anzahl derjenigen Gruppen finden, in welchen ein bestimmtes Element höchstens $r$mal hintereinander u. s. w. erscheinen wird, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen gebildet werden. Die vorstehende Aufgabe ist ein besonderer Fall der allgemeinen im vorigen Paragraph; wie leicht zu sehen. Aus (7. §. 29.) läfst sie sich gleichfalls ableiten.

Von den in diesem Paragraph entwickelten Gleichungen hat *Laplace* (Théor. anal. d. prob. Nro. 12. Pg. 249) den in Nro. 9. dieses Paragraphs gegebenen Ausdruck in etwas veränderter Gestalt abgeleitet und sich dabei auf

den besondern Fall beschränkt, wenn sich die Wahrscheinlichkeiten der beiden Gegner A und B zur Einheit ergänzen.

§. 31.

A wünscht ein Ereignifs $r$mal eher hintereinander herbeizuführen, als B im Stande ist, ein für ihn günstiges Ereignifs $s$mal hintereinander zu erlangen. Die für A günstige Wahrscheinlichkeit im einzelnen Falle ist a; die für B günstige ist b. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für A?

Die Benutzung der im vorigen Paragraph gefundenen Gleichungen dient zur Beantwortung der vorliegenden Frage. Wir legen die Gleichung (8.) zu Grunde, worin $a+b=1$ ist, weil eine andere Voraussetzung die ohnehin weitläufige Rechnung noch weitläufiger machen würde. Die genannte Gleichung bleibt so lange in Kraft, als die Zahl der angestellten Versuche $r+s-1$ nicht überschreitet. Wird sie gröfser, so können Fälle eintreten, welche für B entscheiden. Sie müssen ausgeschieden werden. Die für B entscheidenden Fälle beginnen mit dem $(r+s)$ten und endigen mit dem letzten Versuche. Es kommen daher die Versuche vom $(r+s)$ten, $(r+s+1)$ten u. s. w. bis zum $(p-r-s+1)$ten in Betracht. In allen diesen Fällen sind die Schlüsse für B eben so zu machen, wie sie bei Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für A gemacht wurden. Es kommen folgende Fälle vor.

a. Das für B günstige Ereignifs tritt in den s ersten Versuchen hintereinander ein. Die Wahrscheinlichkeit dafür verbindet sich mit derjenigen, welche angiebt, wie oft das für A günstige Ereignifs $r$mal in $p-s$ nachfolgenden Versuchen eintreffen kann. Die letztere ergiebt sich, wenn in (8. §. 30.) $p-s$ statt p gesetzt wird. Man erhält

$$1.\quad w_1 = b^s a^r\Big(1-(p-2r-s)\,ba^r+\frac{(p-3r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\dots\Big)$$
$$+\,b^s ba^r\Big(\frac{p-r-s}{1}-\frac{(p-2r-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\dots\Big).$$

b. Das für B günstige Ereignifs kann in $s+1$ Versuchen $s$mal hintereinander eintreten. Dies setzt voraus, dafs das für A günstige Ereignifs im ersten Versuche vorausgegangen ist. Hiefür ist die Wahrscheinlichkeit ab^s. $p-s-1$ Versuche können folgen, bei welchen das für A günstige Ereignifs $r$mal hintereinander eintreten kann. Die Wahrscheinlichkeit, dafs dies geschehe, ergiebt sich, wenn in (8. §. 30.) $p-s-1$ statt p gesetzt wird. Die Verbindung

beider Wahrscheinlichkeiten giebt

$$2.\quad w_2 = ab^s a^r\left(1-(p-2r-s-1)ba^r+\frac{(p-3r-s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$
$$+ab^s ba^r\left(\frac{p-r-s-1}{1}-\frac{(p-2r-s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right).$$

c. Eben so findet sich für die nachfolgenden, auszuscheidenden Fälle:

$$3.\quad w_3 =$$
$$(a+b)ab^s a^r\left(1-\frac{(p-2r-s-2)}{1}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$
$$+(a+b)ab^s ba^r\left(\frac{p-r-s-2}{1}-\frac{(p-2r-s-2)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s-2)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right),$$

$$4.\quad w_4 =$$
$$(a+b)^2 ab^s a^r\left(1-\frac{(p-2r-s-3)}{1}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$
$$+(a+b)^2 ab^s ba^r\left(\frac{p-r-s-3}{1}-\frac{(p-2r-s-3)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-2r-s-3)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^3-\ldots\right)$$

u. s. w. Wird in diesen Formeln der Annahme nach $a+b=1$ gesetzt, so lassen sich die ersten, zweiten, u. s. w. Glieder der ersten und zweiten horizontalen Reihen in (2, 3, 4, ...), welche gleichen Potenzen von ba^r zugehören, vereinigen, welches

$$5.\quad w_0 = ab^s a^r\left(\frac{p-r-s}{1}-\frac{(p-2r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$
$$+ab^s ba^r\left(\frac{(p-r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{(p-2r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$

giebt. Die Formel (1.) läfst keine Vereinigung zu. Der Ausdruck (5.) liefert so lange ein richtiges Resultat, als die Potenzen des begleitenden Binomiums $a+b$ kleiner sind als die $s$te. Erheben sie sich bis zu s, und darüber, so enthalten sie Vielfache von b, welche gegen A entscheiden und schon ausgeschieden wurden. Ihre Zahl ist zu suchen und auszuscheiden. Dies geschieht, wenn man die eben gemachten Schlüsse mit denen im Anfange des vorigen Paragraph vereinigt und dabei die Gleichung (8. §. 30.) benutzt. Die hiernach auszuscheidenden Werthe sind

$$6.\quad u_1 =$$
$$b^s ab^s a^r\left(\frac{(p-r-2s)}{1}-\frac{(p-2r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2-\ldots\right)$$
$$+b^s ab^s ba^r\left(\frac{(p-r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}}-\frac{(p-2r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot ba^r+\frac{(p-3r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2-\ldots\right),$$

$$7.\quad u_2 =$$

$$ab^s ab^s a^r\Big(\frac{p-r-2s-1}{1} - \frac{(p-2r-2s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s-1)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

$$+ab^s ab^s ba^r\Big(\frac{(p-r-2s-1)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-2s-1)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s-1)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

u. s. w. Setzt man diese Ableitungen fort, so führen sie wieder zu summirbaren Reihen. Der Ausdruck (7.) und die ihm folgenden lassen sich in nachstehenden vereinigen:

$$8.\quad u_0 = ab^s ab^s a^r\Big[\frac{(p-r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big]$$

$$+ab^s ab^s ba^r\Big[\frac{(p-r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{5|-1}}{1^{5|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big].$$

Stellt man die Ausdrücke (1. und 5.), (6. und 8.) zusammen, und bemerkt, dafs die zweite horizontale Reihe in (1.) mit der ersten in (5.) übereinstimmt, nur dafs jene mit a und diese mit b multiplicirt ist, so lassen sich beide in einen vereinigen, da $a+b=1$ ist. Das Gleiche gilt von (6. und 8.). Dies führt zu folgenden, von der Gleichung (8. §. 30.) auszuscheidenden Reihen:

$$9.\quad u = b^s a^r\Big(1 - \frac{(p-2r-s)}{1} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

$$+b^s a^r\Big(\frac{p-r-s}{1} - \frac{(p-2r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

$$+ab^s ba^r\Big(\frac{(p-r-s)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-s)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

$$-ba^s b^s a^r\Big(\frac{(p-r-2s)}{1} - \frac{(p-2r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

$$-ab^s b^s a^r\Big(\frac{(p-r-2s)^{2|-1}}{1^{2|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big)$$

$$-ab^s ab^s ba^r\Big(\frac{(p-r-2s)^{3|-1}}{1^{3|1}} - \frac{(p-2r-2s)^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot ba^r + \frac{(p-3r-2s)^{5|-1}}{1^{5|1}}(ba^r)^2 - \ldots\Big).$$

Das Fortgangsgesetz ist deutlich. Die in den Klammern eingeschlossenen Reihen zeigen hinsichtlich der begleitenden *Potenzen* von ba^r ein einfaches und gleiches Gesetz an. In den *Facultäten* aber sind sie verschieden. Das Fortgangsgesetz der Facultäten hangt von dem Grundfactor der ersten Facultät und ihrem Exponenten ab. Kennt man diese, so sind auch die der übrigen Glieder bekannt. Die Exponenten der Facultäten wachsen der Reihe nach um die Einheit, und der Grundfactor nimmt um die Gröfse r ab. Demzufolge lassen sich der Kürze und Übersicht wegen die Reihen in (9.) auf

folgende Weise bezeichnen:

$$R_{p-r-s,0};\quad R_{p-r-s,1};\quad R_{p-r-s,2};$$
$$R_{p-r-2s,1};\quad R_{p-r-2s,2};\quad R_{p-r-2s,3}.$$

Die allgemeine Form hiefür ist

$$10.\qquad M = R_{p-xr-zs,u};$$

u bedeutet den Exponenten der Bruchfacultät des ersten Gliedes und $p-xr-zs$ den Grundfactor der Facultät. Demnach nimmt (9.) folgende Form an:

$$11.\qquad u = b^s a^r R_{p-r-s,0} + b^s a^r R_{p-r-s,1} + ab^s ba^r R_{p-r-s,2}$$
$$-(b^s ab^s a^r R_{p-r-2s,1} + ab^s b^s a^r R_{p-r-2s,2} + ab^s ab^s ba^r R_{p-r-2s,3}).$$

Nächst dieser Ausscheidung ist noch eine andere hinsichtlich des für A günstigen Ereignisses nöthig. Die Ausdrücke (3. und 4.), und die ihnen zugehörigen enthalten die Potenzen von $a+b$. Erheben sich diese bis zur gehörigen Höhe, so enthalten sie Fälle, die für A entscheiden, während sie als gegen A entscheidend aufgeführt wurden. Diese müssen gesucht und ausgeschieden werden. Sie beginnen mit dem $(2r+s)$ten Versuche, und gehen bis zu Ende. Ihre Bestimmung unterliegt der bisherigen Schlufsweise.

Das für A günstige Ereignifs kann $r$mal hintereinander eintreten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist a^r. Sie verbindet sich mit der Wahrscheinlichkeit, welche angiebt, wie oft ein Ereignifs $s$mal mit seinem Gegentheil zusammentreffen könne. Demnach ist in den drei ersten Reihen von (9. oder 11.) $p-r$ statt p zu setzen. Es ergiebt sich

$$12.\qquad t = a^r b^s a^r R_{p-2r-s,0} + a^r b^s a^r R_{p-2r-s,1} + a^r ab^s ba^r R_{p-2r-s,2}.$$

Das für A günstige Ereignifs kann in den folgenden Versuchen $r$mal hintereinander eintreffen; welches

$$13.\qquad t_2 = ba^r b^s a^r R_{p-2r-s-1,0} + ba^r b^s a^r R_{p-2r-s-1,1} + ba^r ab^s ba^r R_{p-2r-s-1,2},$$
$$t_3 = (a+b)\, ba^r b^s a^r [R_{p-2r-s-2,0} + R_{p-2r-s-2,1} + ab R_{p-2r-s-2,2}],$$
$$t_4 = (a+b)^2\, ba^r b^s a^r [R_{p-2r-s-3,0} + R_{p-2r-s-3,1} + ab R_{p-2r-s-3,2}],$$

. . . .

giebt. Diese Reihen lassen sich summiren und sind, da $a+b=1$ ist, in folgender Reihe enthalten:

$$14.\qquad t_0 = ba^r b^s a^r R_{p-2r-s,1} + ba^r b^s a^r R_{p-2r-s,2} + ba^r ab^s ba^r R_{p-2r-s,3}.$$

Die Formeln (12. und 14.) vereinigen sich zu folgender:

$$15.\qquad t = a^r b^s a^r R_{p-2r-s,0} + (1+b) a^r b^s a^r R_{p-2r-s,1} + (1+a) a^r b^s ba^r R_{p-2r-s,2}$$
$$+ ba^r ab^s ba^r R_{p-2r-s,3}.$$

Die Ausscheidungen in (13.) gelten so lange, als die Potenzen des begleitenden Binomiums niedriger als vom $r$ten Grade sind. Werden sie so grofs, oder

gröfser als die $r$te, so enthalten sie Fälle, welche für A entscheiden und schon zugezählt wurden. Sie sind dann auszuscheiden. Ihre Ausscheidung führt zu folgender Formel:

$$16.\quad v = a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,1} + (1+b) a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,2} + (1+b) a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,3} + b a^r b a^r b^s a^r R_{p-3r-s,4}.$$

Zugleich mufs eine Ausscheidung aus (15.) hinsichtlich b erfolgen, wenn die Potenzen von $a+b$ zu der gehörigen Höhe gestiegen sind. Die Ausscheidung giebt folgenden Ausdruck:

$$17.\quad z = b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,0} + 2 b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,1} + (1+2ab) b^{2s} b^{2r} R_{p-2r-2s,2} + 2 b b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,3} + a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4}.$$

Eben so mufs eine Ausscheidung aus (8.) hinsichtlich a gemacht werden. Sie giebt

$$18.\quad x = a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,1} + (1+b) a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,2} + (1+a) b a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,3} + a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4}.$$

Die Rechnung bewegt sich zwar in grofsen Kreisen, unterliegt jedoch einem festen Gange. Eine Ausscheidung führt die andere nach sich. Vereinigt man die gefundenen Resultate, so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}19.\quad w = {} & a^r R_{p-r,0} + b a^r R_{p+r,1} \\ & - b^s a^r R_{p-r-s,0} - b^s a^r R_{p-r-s,1} - ab a^r b^s R_{p-r-s,2} \\ & + a b^{2s} a^r R_{p-r-2s,1} + a b^{2s} a^r R_{p-r-2s,2} + a^2 b a^r b^{2s} R_{p-r-2s,3} \\ & - a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,1} - (1+b) a a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,2} - (1+a) ab a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,3} \\ & - a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4} \\ & \ldots\ldots \\ & + a^{2r} b^s R_{p-2r-s,0} + (1+b) a^{2r} b^s R_{p-2r-s,1} + (1+a) b a^{2r} b^s R_{p-2r-s,2} \\ & + b^2 a a^{2r} b^s R_{p-2r-s,3} \\ & - b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,0} - 2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,1} - (1+2ab) b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,2} \\ & - 2 b^{2s} a^{2r} R_{p-2r-2s,3} - a^2 b^2 a^{2r} b^{2s} R_{p-2r-2s,4} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Obgleich diese Entwicklung in einem weiten Kreise sich bewegt, läfst sich doch das Fortgangsgesetz erkennen. Mit den Potenzen a^r, b^s sind öfters die Factoren b und a verbunden. Das Gesetz, welches diesen Verbindungen zum Grunde liegt, fällt mit der entwickelten Darstellung folgender Producte zusammen:

$$1+b = 1+b,$$

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab = 1+1+ab,$$

$$(1+b)(1+a)(1+b) = 1+(1+b)+(1+a)b+bab,$$

$$(1+a)(1+b)(1+a)(1+b) = 1+2+(1+2ab)+2ab+abab$$

u. s. w., wenn nämlich allenthalben, wo es geschehen kann, $a+b=1$ gesetzt wird. So weitläufig die Gleichung (19.) ist, so läfst sie sich doch bedeutend reduciren, wenn man $a=b=\frac{1}{2}$ setzt. Dann giebt sie folgende einfache Formel:

$$20.\quad w=\frac{p-r+2}{2^{r+1}}-\frac{(p-2r+1)(p-2r+2\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 2^{2r+1}}+\frac{(p-3r+1)(p-3r+2)(p-3r+3\cdot 2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{3r+1}}-\ldots.$$

Diese Gleichung bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dafs A ein Ereignifs $r$mal eher in p Versuchen herbeiführen wird, als B das Gegentheil in r Versuchen zu thun im Stande ist, wenn A und B die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, im einzelnen Falle zu siegen. Die Gleichung (20.) läfst sich auch aus den Gleichungen (19. oder 22. §. 29.) ableiten, wenn letztere durch 2 dividirt wird.

Vergleicht man die Entwicklungen in (§. 29.) mit denen in (§. 30. und 31.), so zeigt sich, dafs die letztern dann dienlich sind, wenn für die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen im einzelnen Falle bedingen, besondere Werthe nöthig werden, dagegen die von (§. 29.), wenn die Wahrscheinlichkeiten, welche das Eintreffen im einzelnen Falle bedingen, einander gleich sind. Beide Betrachtungsarten haben ihr Eigenthümliches.

Bemerkt man dies, erwägt, dafs jedes der in (§. 29.) vorkommenden Elemente durch die Einheit dargestellt werden kann, wenn man dieser Einheit die Gesammtzahl der Elemente zum Nenner giebt, wodurch der Werth der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen im einzelnen Falle bestimmt wird, und bringt hiemit in Verbindung, dafs das wiederholte Aneinanderreihen eines Elements bei den Versetzungen mit Wiederholungen eben so oft in den Gruppen einer bestimmten Classe vorkommt, als das eines zweiten oder dritten Elements, so führt dies zur Beantwortung folgender Frage.

m Personen spielen mit gleicher Wahrscheinlichkeit im einzelnen Falle zu gewinnen, und unter folgender Bedingung. In einer Urne sind m verschieden bezeichnete Marken, von welchen jede für eine bestimmte Person gilt. Es wird $p$mal aus der Urne gezogen und jedesmal eine Marke herausgenommen, die nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt wird. Derjenige bekommt eine bestimmte Summe, dessen Marke $k$mal hintereinander erscheint. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für jeden Theilnehmer?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich aus (14.) oder aus (15. §. 29.), wenn eine dieser Gleichungen durch die Zahl der Theilnehmer dividirt wird; denn nach den obigen Bemerkungen ist die Zahl der günstigen Fälle für jeden gleich grofs. Dieses giebt

$$21. \quad w = \frac{(m-1)}{m^{k+1}}\left[p-k+\frac{m}{m-1}\right] - \frac{(p-2k+1)(m-1)^2}{1\cdot 2\cdot m^{2k+1}}\left[p-2k+\frac{2m}{m-1}\right] + \frac{(p-3k+1)^{2|1}(m-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot m^{3k+1}}\left[p-3k+\frac{3m}{m-1}\right] \dots$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel nach p Versuchen geendet sein werde, ist in (14.) oder in (15. §. 29.) gegeben.

Hieraus ergiebt sich auch die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel gerade im $p$ten Versuche beendigt sein werde. Denn es ist die Wahrscheinlichkeit, dafs es in den unmittelbar vorhergehenden Versuchen nicht geendigt sein werde, mit derjenigen zu verbinden, dafs es in einer bestimmten Anzahl endigen werde.

§. 32.

In einer Urne befinden sich r verschiedene Gruppen von Kugeln, jede von n Kugeln, die mit 1, 2, 3, ... n bezeichnet sind. m Kugeln jeder Art, mit den nämlichen Zeichen, werden besonders beachtet. Man zieht p Kugeln einzeln heraus, legt die gezogene Kugel nicht in die Urne zurück, und wiederholt dieses Verfahren $s$mal. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in irgend p zusammengehörigen, hintereinander folgenden Ziehungen, lauter Kugeln erscheinen werden, welche das gleiche Zeichen haben?

Um die den Resultaten günstige Gruppen-Anzahl zu finden, ist zu bemerken, dafs der Aufgabe genügt wird, wenn Kugelgruppen von einerlei Zeichen gerade in der ersten, oder zweiten, dritten, u. s. w., oder endlich in den letzten p Ziehungen erscheinen. p hintereinander folgende zusammengehörige Ziehungen soll eine Ziehungsreihe heifsen. Die Zahl der Ziehungsreihen ist s. Die Gruppen, welche in den einzelnen Ziehungsreihen dem Erfolge günstig sind, gehören r verschiedenen Arten an. Jede Art bringt $r(r-1)(r-2)\dots(r-p+1) = r^{p|-1}$ verschiedene Fälle hervor. Diese Kugel-Arten haben m verschiedene Zeichen. Es können demnach in jedem einzelnen Wiederholungsfalle

$$1. \quad A_1 = m\cdot r^{p|-1}$$

auflösende Gruppen vorkommen. Nun sind s verchiedene Ziehungsreihen möglich: also werden folgende Fälle zu untersuchen sein.

a. Das Unternehmen gelingt in der *ersten* Ziehungsreihe. Jeder auflösenden Gruppe kann jede beliebige Zusammenstellung aus den ergänzenden Kugelgruppen in den nachfolgenden $ps-p$ Ziehungen folgen. Die hieraus sich ergebende Gruppen-Anzahl ist, in Rücksicht auf (1.),

$$B_1 = m\cdot r^{p|-1}(nr-p)^{sp-p|-1}.$$

b. Das Unternehmen gelingt in der *zweiten* Ziehungsreihe. Jeder von den in (1.) angegebenen Gruppen können alle beliebigen Gruppen aus der ergänzenden Kugel-Anzahl zur $p$ten Classe vorausgehen, und die zur $(ps-2p)$ten kann folgen. Die hieraus sich ergebende Gruppen-Anzahl ist

$$B_2 = (nr-p)^{p|-1} m \cdot r^{p|-1} (nr-2p)^{sp-2p|-1} = m \cdot r^{p|-1} (rn-p)^{(s-1)p|-1}.$$

c. Eben so findet sich für die Zahl der günstigen Gruppen, welche in der *dritten* Ziehungsreihe erscheinen,

$$B_3 = (nr-p)^{2p|-1} m \cdot r^{p|-1} (nr-3p)^{sp-3p|-1} = m \cdot r^{p|-1} (rn-p)^{(s-1)p|-1}$$

u. s. w. Auf gleiche Weise ergiebt sich für die Zahl der in der letzten Ziehungsreihe möglichen oder günstigen Gruppen:

$$B_3 = (nr-p)^{ps-p|-1} m \cdot r^{p|-1}.$$

Werden die Werthe für B_1, B_2, B_3, ... B_s zusammengezählt, so ergiebt sich für die Summe der auflösenden Gruppen in sämmtlichen Ziehungsreihen:

$$2. \quad B = s \cdot m \cdot r^{p|-1} (rn-p)^{ps-p|-1}.$$

Dieser Ausdruck wird zu weitern Anwendungen dienen. Die Schlüsse, welche zu (2.) führten, geben nur bis zur zweiten Ziehungsreihe ein richtiges Resultat. Der zweiten und den spätern Ziehungsreihen gehen nämlich Kugelgruppen von p, $2p$, $3p$, ... $(s-1)p$ Dimensionen vorher, in welchen schon auflösende Gruppen erschienen sein können. Sie müssen gesucht und ausgeschieden werden. Ist nun eine auflösende Gruppe in der zweiten Ziehungsreihe, oder in einer spätern erschienen, so kann ihr eine auflösende Gruppe vorhergegangen sein. Hierbei kommen folgende zwei Fälle vor:

α. Die Kugeln der vorhergehenden Ziehungsreihe haben das nämliche Zeichen.

β. Sie haben ein anderes Zeichen.

Nach den Bedingungen des ersten Falles sind schon p Kugeln mit dem nämlichen Zeichen erschienen: daher sind noch $r-p$ Kugeln mit diesem Zeichen in der Urne zurück. Die hieraus sich ergebende Gruppen-Anzahl ist

$$(r-p)(r-p-1)(r-p-2) \ldots (r-2p+1) = (r-p)^{p|-1}.$$

Diese Anzahl mufs sich mit der Zahl aller der Gruppen verbinden, welche entstehen, wenn die auflösende Gruppe in der zweiten, dritten, ... $s$ten Ziehungsreihe erscheint und die vorausgehende während dieses allmäligen Zurückschreitens alle möglichen Ziehungsreihen durchläuft. Die Zahlen der Gruppen, welche aus diesem Grunde ausgeschieden werden müssen, finden sich, wenn in (2.), der Reihe nach 1, 2, 3, ... $s-1$ statt s, $r-p$ statt r in der Facultät $r^{p|-1}$, $rn-2p$ statt $rn-p$ gesetzt und m vernachlässigt wird, weil Kugeln vom gleichen Zeichen in Betracht kommen. Verbindet man damit die

Kugelgruppen an den ergänzenden Stellen, so ergiebt sich Folgendes:

$$C_1 = 1\cdot(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{0|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{ps-2p|-1} = 1\cdot m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$
$$C_2 = 2(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} = 2m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$
$$C_3 = 3(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{2p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-4p)^{(s-4)p|-1} = 3m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

. . . .

$$C_{s-1} = (s-1)(r-p)^{p|-1}(rn-2p)^{sp-2p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(rn-(s-2)p)^{0|-1}$$
$$= (s-1)\, m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Dies läfst sich in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$C_s = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot m\cdot r^{2p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Nach den Bedingungen im zweiten Falle sind p Kugeln erschienen, die ein anderes Zeichen haben. Jede Gruppe, mit Kugeln von einem bestimmten Zeichen, kann sich mit allen möglichen Gruppen von Kugeln mit einem der übrigen $m-1$ Zeichen verbinden und alle möglichen Ziehungsreihen von der zweiten an durchlaufen, während eine der vorhergehenden auflösenden Gruppen jede vorhergehende Stelle einnehmen kann. Aufserdem treten mit diesen Gruppen verschieden-bezeichneter Kugeln alle möglichen Gruppen aus der ergänzenden Kugel-Anzahl in Verbindung. Man findet die Zahlen auszuscheidender Gruppen, wenn man in (2.) der Reihe nach $s=1, 2, 3, \ldots\, s-1$, $m-1$ statt m, $rn-2p$ statt $rn-p$ setzt und jeden Ausdruck mit (1.) und der ergänzenden Gruppen-Anzahl verbindet. Diese Bemerkungen geben folgende Reihen:

$$D_1 = 1\cdot(m-1)\,r^{p|-1}(rn-2p)^{0|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(nr-2p)^{ps-2p|-1}$$
$$= 1\cdot m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{p(s-2)|-1},$$
$$D_2 = 2\cdot(m-1)\,r^{p|-1}(rn-2p)^{p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(nr-3p)^{p(s-3)|-1}$$
$$= 2\cdot m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$
$$D_3 = 3\cdot(m-1)\,r^{p|-1}(rn-2p)^{2p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}(nr-4p)^{p(s-4)|-1}$$
$$= 3\cdot m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1},$$

. . . .

$$D_{s-1} = (s-1)(m-1)\,r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}\, m\cdot r^{p|-1}$$
$$= (s-1)\, m^{2|-1} r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Sie lassen sich in folgenden Ausdruck vereinigen:

$$D_s = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-2p)^{p(s-2)|-1}.$$

Werden die Werthe von C_s und D_s zusammengezählt, so ergiebt sich folgende, von (2.) auszuscheidende Gruppen-Anzahl:

$$3.\quad C = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}\left[m\cdot r^{2p|-1} + m^{2|-1}\cdot r^{p|-1}\cdot r^{p|-1}\right](rn-2p)^{(s-2)p|-1}.$$

Dieser Ausdruck läfst sich, wie in (§. 27.), durch ein Schema vorstellen. Wir wählen dazu Folgendes:

$$4.\quad C_0 = \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}[m G_2 + m^{2|-1} G_1 H_1](rn - 2p)^{ps-2p|-1}.$$

Hier bezeichnet G_2 Gruppen von $2p$ Dimensionen, in welchen nur Kugeln von einerlei Zeichen vorkommen, G_1 Gruppen von p Dimensionen, in welchen Kugeln von einerlei Zeichen, und H_1 gleichfalls Gruppen von p Dimensionen, in welchen nur Kugeln von einerlei Zeichen vorkommen, die aber ein anderes Zeichen als die unter G_1 begriffenen haben.

Die Schlüsse, welche zu den Formeln (3. und 4.) führten, sind so lange richtig, bis die zweite der zwei auflösenden Gruppen auf die dritte Ziehungsreihe gerückt ist und dann allmälig alle möglichen spätern Ziehungsreihen durchläuft. In jedem dieser Fälle kann noch eine dritte auflösende Gruppe den beiden in (3.) bezeichneten vorangehen. Demnach treten drei auflösende Gruppen, jede als Ganzes betrachtet, zu einander in Beziehung. Die letzte bestimmt die Stellungen, von der dritten Ziehungsreihe an. Sie durchläuft allmälig $s-2$ Ziehungsreihen. In jeder einzelnen Stellung können die beiden vorhergehenden unter sich alle Ziehungsreihen durchlaufen. Dieses Durchlaufen fällt mit den Zerstreuungen von zwei Elementen in die gehörige Fächerzahl zusammen. Es treten folgende Fälle ein:

γ. Die drei auflösenden Gruppen enthalten Kugeln mit nur einem Zeichen;

δ. Sie enthalten Kugeln mit zweierlei Zeichen;

ε. Sie enthalten Kugeln mit dreierlei Zeichen.

Diese drei Fälle lassen sich nach der Analogie von (4.) auf folgende Weise darstellen:

$$G_1 G_1 G_1,\quad G_1 G_1 H_1,\quad G_1 H_1 K_1.$$

Nun ist leicht zu sehen, dafs die auflösenden Gruppen, welche Kugeln mit verschiedenen Zeichen enthalten, unter sich verschiedene Stellungen einnehmen können, und dafs der Ausdruck $G_1 G_1 H_1$ auf folgende Stellungen dieser Gruppen deuten kann:

$$G_1 G_1 H_1 + G_1 H_1 G_1 + H_1 G_1 G_1 = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1}\cdot G_2 H_1,$$

und der Ausdruck $G_1 H_1 K_1$ auf folgende Stellungen:

$$G_1 H_1 K_1 + G_1 K_1 H_1 + H_1 G_1 K_1 + H_1 K_1 G_1 + K_1 G_1 H_1 + K_1 H_1 G_1$$
$$= 3\cdot 2\cdot 1\cdot G_1 H_1 K_1.$$

Die Gruppen-Anzahl, welche durch den Ausdruck $G_1 G_1 G_1 = G_3$, der nur

Kugeln von einerlei Zeichen enthält, bedingt wird, ist $m\cdot r^{3p|-1}$; wie sich durch eine einfache Erörterung zeigen läfst. Die verschiedenen Stellungen, welche die zwei vorangehenden auflösenden Gruppen in Beziehung auf die dritte einnehmen können, führen zu folgendem Ausdruck, wenn dabei die Kugelgruppen auf den ergänzenden Ziehungsreihen in die Rechnung aufgenommen werden:

$$\begin{aligned}
E_1 = & \frac{2\cdot1}{1\cdot2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
& +\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
& +\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
& \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& +\frac{(s-1)(s-2)}{1\cdot2}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
= & \frac{s^{3|-1}}{1^{3|-1}}\cdot m\cdot r^{3p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}.
\end{aligned}$$

Die Gruppen-Anzahl, welche durch den Ausdruck $\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1}\cdot G_2 H_1$ bedingt wird, ist von Kugeln mit zwei verschiedenen Zeichen veranlafst. Die des einen Zeichens sind $2p$ Kugeln, die des andern p. Die Zahl der Fälle, welche durch alle möglichen Zusammenstellungen dieser Kugeln unter sich erzeugt werden, ist

$$M_1 = \frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1}\cdot m(m-1)r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}.$$

Die verschiedenen Stellungen, welche die zwei vorhergehenden auflösenden Gruppen in allen Ziehungsreihen in Beziehung auf die dritte einnehmen können, führen zu folgender Formel, wenn die ergänzenden Kugelgruppen in den übrigen Ziehungsreihen in Rechnung gezogen werden:

$$\begin{aligned}
E_2 = & \frac{2\cdot1}{1\cdot2}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
& +\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
& +\frac{4\cdot3}{1\cdot3}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
& \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& +\frac{(s-1)(s-2)}{1\cdot2}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1} \\
= & \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}\cdot\frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}}\cdot m^{2|-1}\cdot r^{2p|-1}\cdot r^{p|-1}(rn-3p)^{(s-3)p|-1}.
\end{aligned}$$

Die Gruppen, welche der Ausdruck $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot G_1 K_1 H_1$ andeutet, gehören drei verschiedenen Zeichen zu. Die Versetzungen, welche in den drei verschiedenen Kugel-Arten nöthig werden, sind schon vorgesehen; daher sind sie in der Facultät von m wieder zu entfernen. Es gelten hier ähnliche Bemerkungen, wie in (§. 25.). Die Anzahl der Kugelgruppen, welche hierher gehören, sind in dem Ausdrucke

$$3^{3|-1} \cdot \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1}$$

enthalten. Die Stellungen, welche die zwei vorhergehenden auflösenden Gruppen in allen Ziehungsreihen in Beziehung zur dritten einnehmen können, führen zu folgender Formel, wenn die ergänzenden Kugelgruppen auf den übrigen Ziehungsreihen in Rechnung gezogen werden:

$$\begin{aligned} E_3 = & \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} (rn - 3p)^{p(s-3)|-1} \\ & + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} (rn - 3p)^{p(s-3)|-1} \\ & + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} (rn - 3p)^{p(s-3)|-1} \\ & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ & + \frac{(s-1)(s-2)}{1 \cdot 2} \cdot 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} (rn - 3p)^{p(s-3)|-1} \\ = & \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} (rn - 3p)^{p(s-3)|-1} \end{aligned}$$

Werden nun die Werthe von E_1, E_2, E_3 zusammengezählt, so ergiebt sich folgende Zahl von (3.) auszuscheidender Gruppen:

$$5. \quad D = \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}} \left[m \cdot r^{3p|-1} + \frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1} + 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} (r^{p|-1})^3 \right] (rn - 3p)^{(s-3)p|-1}$$

Auch diesen Ausdruck kann man durch ein Schema geben. Es ist

$$6. \quad D = \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}} \left[m G_3 + \frac{3^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot m^{2|-1} G_2 H_1 + 3^{3|-1} \frac{m^{3|-1}}{1^{3|1}} G_1 H_1 K_1 \right] (rn - 3p)^{(s-3)p|-1}.$$

Die Vorzahlen der Exponenten p, welche den Facultäten von r zugehören, bilden Summen der Verbindungen mit Wiederholungen zur 1ten, 2ten, 3ten, ... Classe. Die begleitenden Facultäten von m haben so viele Factoren, als die Verbindungsclasse angiebt, und werden durch eine steigende Facultät von 1 gemessen, die so viele Factoren zählt, als gleiche Exponenten von r vorkommen; die begleitende Facultät $3^{3|-1}$ wird durch so viele steigende Facultäten

von 1 dividirt, als Exponenten der Facultäten von r vorkommen. Die Vorzahlen der Exponenten p geben die Dimensionen dieser Facultäten an.

Die zur Entwicklung der Gleichung (5.) gemachten Schlüsse sind so lange richtig, bis die letzte der auflösenden Gruppen in die vierte Ziehungsreihe gerückt ist. Ist dies geschehen, so müssen wieder Ausscheidungen gemacht werden, weil eine vierte auflösende Gruppe unter den vorausgehenden Kugelgruppen enthalten sein kann. Die vier auflösenden Gruppen machen unter sich Versetzungen und nehmen alle möglichen Stellungen vor der letzten an, während diese von einer Ziehungsreihe zur andern zurücktritt. Es können folgende Fälle eintreten:

ζ. Die vier auflösenden Gruppen haben gleiche Zeichen;

η. Drei haben einerlei, die vierte ein anderes Zeichen;

$\varkappa$. Zwei und zwei haben einerlei Zeichen;

λ. Zwei haben einerlei, die dritte ein zweites, die vierte ein drittes Zeichen;

μ. Die vier Gruppen haben vier verschiedene Zeichen.

Hienach ergeben sich folgende Formen:

$$G_1 G_1 G_1 G_1 = G_4, \quad G_1 G_1 G_1 H_1 = G_3 H_1, \quad G_1 G_1 H_1 H_1 = G_2 H_2,$$
$$G_1 G_1 H_1 K_1 = G_2 H_1 K_1, \quad G_1 H_1 K_1 L_1 = G_1 H_1 K_1 L_1.$$

Wendet man auf diese Darstellungen die obigen Bemerkungen an und berücksichtigt dabei die in (§. 25.) ausgesprochenen Gesetze, welche aus ähnlichen Betrachtungen abgeleitet wurden, so erhält man folgende Zahlen-Ausdrücke:

$$G_4 = \frac{4^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot m \cdot r^{4p|-1}, \qquad G_3 H_1 = \frac{4^{4|-1}}{1^{3|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{3p|-1} \cdot r^{p|-1},$$

$$G_2 H_2 = \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{2|1}} \cdot \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{2p|-1}, \quad G_2 H_1 K_1 = \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{1|1} \cdot 1^{1|1}} \cdot \frac{m^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1},$$

$$G_1 H_1 K_1 L_1 = 4^{4|-1} \cdot \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1}.$$

Werden die verschiedenen Stellungen berücksichtigt, welche die vier auflösenden Gruppen in s Ziehungsreihen untereinander einnehmen können, nebst der Zahl der ergänzenden Gruppen auf den übrigen $s-4$ Ziehungsreihen, so ergiebt sich folgende Zahl von (5.) auszuscheidender Gruppen:

$$7. \quad E = \frac{s^{4|-1}}{1^{4|1}} \Big[m \cdot r^{4p|-1} + \frac{4^{4|-1}}{1^{3|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{3p|-1} \cdot r^{p|-1} + \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{2|1}} \cdot \frac{m^{2|-1}}{1^{2|1}} (r^{2p|-1})^2$$
$$+ \frac{4^{4|-1}}{1^{2|1}} \cdot \frac{m^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{2p|-1} (r^{p|-1})^2 + 4^{4|-1} \cdot \frac{m^{4|-1}}{1^{4|1}} (r^{p|-1})^4 \Big] (rm - 4p)^{(s-4)p|-1},$$

Auch hier erkennt man leicht das oben angegebene Gesetz. Ihm zufolge ergiebt sich für die auszuscheidende Gruppen-Anzahl folgender Ausdruck:

$$8. \quad F = \frac{s^{5|-1}}{1^{5|1}}\Big[m \cdot r^{5p|-1} + \frac{s^{5|-1}}{1^{4|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{4p|-1} \cdot r^{p|-1} + \frac{s^{5|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{3|1}} \cdot m^{2|-1} \cdot r^{3p|-1} \cdot r^{2p|-1}$$
$$+ \frac{s^{5|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{m^{3|-1}}{1^{2|1}} \cdot r^{3p|-1}(r^{p|-1})^2 + \frac{s^{5|-1}}{1^{2|1} \cdot 1^{2|1}} \cdot \frac{m^{3|-2}}{1^{2|1}}(r^{2p|-1})^2 r^{p|-1}$$
$$+ \frac{s^{5|-1}}{1^{5|1}} \cdot \frac{m^{4|-1}}{1^{3|1}} \cdot r^{2p|-1}(r^{p|-1})^3 + \frac{s^{5|-1}}{1^{5|1}}(r^{p|-1})^5\Big](rn - 5p)^{(s-5)p|-1}$$

u. s. w. Demnach ist die gesuchte Gruppen-Anzahl

$$9. \quad A = B - C + D - E + F - \ldots, \text{ oder}$$

$$10. \quad A = s \cdot m \cdot r^{p|-1}(rn - p)^{(s-1)p|-1}$$
$$- \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}}[m \cdot r^{2p|-1} + m^{2|-1} \cdot r^{p|-1} \cdot r^{p|-1}](rn - 2p)^{(s-2)p|-1}$$
$$+ \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}}[m \cdot r^{3p|-1} + 3m^{2|-1} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1} + m^{3|-1}(r^{p|-1})^3](rn - 3p)^{(s-3)p|-1}$$

. . . .

Wird durch die Zahl aller Gruppen dividirt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$11. \quad w = \frac{s \cdot m \cdot r^{p-1}}{(rn)^{p|-1}} - \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}(rn)^{2p|-1}}[m \cdot r^{2p|-1} + m^{2|-1}(r^{p|-1})^2]$$
$$+ \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}(rn)^{3p|-1}}[m \cdot r^{3p|-1} + 3m^{2|-1} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1} + m^{3|-1}(r^{p|-1})^3]$$

. . . .

Wird in der Gleichung (11.) $m = n$ gesetzt, so beantwortet sie folgende Aufgabe.

In einer Urne befindet sich s verschiedene Arten von Kugeln, von welchen jede m Kugeln zählt, die mit 1, 2, 3, ... m bezeichnet sind. p Kugeln werden einzeln hintereinander herausgenommen und die gezogene Kugel wird nicht in die Urne zurückgelegt. Dies Verfahren wird $s$mal wiederholt: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in irgend p zusammengehörigen, hintereinander folgenden Ziehungen lauter Kugeln erscheinen werden, die das gleiche Zeichen haben?

Durch Einführung des angezeigten Werths findet sich aus (11.)

$$12. \quad w = \frac{s \cdot m \cdot r^{p|-1}}{(rm)^{p|-1}} - \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}(rm)^{2p|-1}}[m \cdot r^{2p|-1} + m^{2|-1}(r^{p|-1})^2]$$
$$+ \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}(rm)^{3p|-1}}[m \cdot r^{3p|-1} + 3m^{2|-1} \cdot r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1} + m^{3|-1}(r^{p|-1})^3]$$

. . . .

Ist $m = 1$, so sollen unter den angegebenen Bedingungen nur Kugeln von einem bestimmten Zeichen erscheinen. Es verschwinden also dann alle Glieder, welche höhere Facultäten von m als die erste enthalten und die Wahrscheinlichkeit ist aus (11.):

$$13. \quad w = \frac{s \cdot r^{p|-1}}{(rn)^{p|-1}} - \frac{s^{2|-1} \cdot r^{2p|-1}}{1^{2|1}(rn)^{2p|-1}} + \frac{s^{3|-1} \cdot r^{3p|-1}}{1^{3|1}(rn)^{3p|-1}} - \frac{s^{4|-1} \cdot r^{4p|-1}}{1^{4|1}(rn)^{4p|-1}} \cdot$$

Für $k = 2$ ist

$$14. \quad w = \frac{2s \cdot r^{p|-1}}{(rn)^{p|-1}} - \frac{s^{2|-1}}{1^{2|1}(rn)^{2p|-1}}[2r^{2p|-1} + 2(r^{p|-1})^2]$$

$$+ \frac{s^{3|-1}}{1^{3|1}(rn)^{3p|-1}}[2r^{3p|-1} + 6r^{2p|-1} \cdot r^{p|-1}]$$

. . . .

In (§. 25.) wurde eine der gegenwärtigen ähnliche Frage beantwortet. Die hier gefundenen Resultate unterscheiden sich von den dortigen dadurch, dafs hier Kugeln mit mehreren Zeichen erscheinen können, dort nur mit einem, und dafs hier Kugeln mit demselben Zeichen schon vor der auflösenden Gruppe erschienen sein können, dort nicht.

Behält man die Bezeichnungsart wie (§. 26. u. ff.) bei, so ergiebt sich für die Anzahl derjenigen Gruppen, in welchen lauter gleichbezeichnete Kugeln in p Ziehungen wenigstens $t$mal und höchstens $x$mal erscheinen, wenn m verschiedene Zeichen in Betrachtung kommen und s Ziehungsreihen gemacht werden:

$$15. \quad A_p^{t,x} = A_p^t - A_p^{x+1}.$$

Demnach ist die Reihe (9.) mit dem $t$ten Gliede zu beginnen und die vom $(x+1)$ten Gliede an abzuziehen. Die Zahl der Gruppen, in welchen unter den eben angegebenen Bedingungen lauter gleichbezeichnete Kugeln gerade $t$mal, nicht mehr und nicht weniger oft, erscheinen werden, ist

$$16. \quad A_p^{t,t+1} = A_p^t - A_p^{t+1}.$$

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind

$$17. \quad w = \frac{A_p^t - A_p^{x+1}}{(rn)^{sp|-1}},$$

$$18. \quad w = \frac{A^t - A^{t+1}}{(rn)^{sp|-1}},$$

Diese Reihen brechen in bestimmten Fällen bald ab, wie sich aus den Gleichungen (19. und 20. §. 27.) ergiebt, und führen oft zu ganz kurzen Ausdrücken.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist aus (17.)

$$19. \quad w = 1 - \frac{A_p^t - A_p^{x+1}}{(rn)^{ep|-1}}.$$

§. 33.

Jemand trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet wird, in p Versuchen so oft herbeizuführen, dafs es immer $r$mal öfter als das Gegentheil zutrifft, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit b ausgedrückt wird: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Unternehmen gelingen werde?

Der Unternehmer erreicht seinen Zweck, wenn das ihm günstige Ereignifs in den r ersten Versuchen eintrifft; er erreicht ihn, wenn das ihm günstige Ereignifs $r+1$mal und das ihm ungünstige darunter einmal eintrifft; er erreicht ihn, wenn das ihm günstige Ereignifs $r+2$mal und darunter das ihm ungünstige zweimal eintrifft u. s. w. Dies giebt folgende Zusammenstellung:

$$a^r, \; a^{r+1}b, \; a^{r+2}b^2, \; a^{r+3}b^3, \; a^{r+4}b^4, \; \ldots . \; a^{r+\frac{1}{2}(p-r)}b^{\frac{1}{2}(p-r)},$$

wo die Exponenten von a und b das wiederholte Eintreffen der bezüglichen Ereignisse bezeichnen. Die einzelnen Fälle werden in ihrer Verbindung untereinander besondere Gruppen bilden, deren Anzahl zu suchen ist. $\frac{1}{2}(p-r)$ wird immer eine ganze Zahl sein.

a. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r$mal hintereinander in r Versuchen eintreffen werde, ist a^r.

b. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+1$mal und das ungünstige einmal in $r+2$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den ersten r Versuchen eintreten werde. Das Eintreten dieses Ereignisses in einem der zwei letzten Versuche ist schon in (*a.*) vorgesehen. Berücksichtigt man (§. 41. m. Comb. Lehre), so ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall:

$$w_1 = r a^{r+1} b.$$

c. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+2$mal und das ungünstige zweimal in $r+4$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den ersten r Versuchen wenigstens einmal und, wenn es später (einmal höchstens) eintritt, nicht später als im $(r+2)$ten Versuche eintreten werde. Untersucht man die dem Ereignifs günstigen Fälle, so ergiebt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$w_2 = \left[\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + 2 \cdot r\right] a^{r+2} b^2 = \frac{r(r+3)}{1 \cdot 2} \cdot a^{r+2} b^2.$$

d. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+3$mal und das ungünstige dreimal in $r+6$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den ersten r Versuchen wenigstens einmal und, wenn es später (zweimal höchstens) eintritt, nicht später als im $(r+4)$ten Versuche eintreten werde. Untersucht man die dem Ereignisse günstigen Fälle, so ergiebt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$w_3 = \left[\frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot2\cdot3}+4\cdot\frac{r(r-1)}{1\cdot2}+\left(\frac{4\cdot3}{1\cdot2}-1\right)r\right]a^{r+3}b^3 = \frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}\cdot a^{r+3}b^3.$$

e. Die Wahrscheinlichkeit, dafs das fragliche Ereignifs $r+4$mal und das ungünstige viermal in $r+8$ Versuchen eintreffen werde, setzt voraus, dafs das ungünstige Ereignifs in den r ersten Versuchen wenigstens einmal und, wenn es später (dreimal höchstens) eintritt, nicht später als im $(r+6)$ten Versuche eintreten werde. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

$$w_4 = \left[\frac{r^{4|-1}}{1^{4|1}}+6\cdot\frac{r^{3|-1}}{1^{3|1}}+\left(\frac{6\cdot5}{1\cdot2}-1\right)\frac{r^{2|-1}}{1^{2|1}}+\left(\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}-6\right)r\right]a^{r+4}b^4$$
$$= \frac{r(r+5)(r+6)(r+7)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot a^{r+4}b^4$$

u. s. w. Das Fortschreitungsgesetz ist leicht erkennbar. Man erhält für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgenden Ausdruck durch Vereinigung der eben angegebenen Fälle:

$$1.\quad w = a^r\left[1+rab+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{r(r+m+1)(r+m+2)\dots(r+2m-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots m}(ab)^m+\dots\right].$$

m kann sich bis zu $\frac{1}{2}(p-r)$ erheben.

Setzt man in (1.) $a=b=\frac{1}{2}$ und multiplicirt den Ausdruck mit 2^p, so giebt die Gleichung die Anzahl derjenigen Gruppen, in welchen ein bestimmtes Element immer $r$mal mehr, unmittelbar hintereinander oder im Überschusse über das zweite erscheint, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus zwei Elementen zur $p$ten Classe gebildet werden. Es ist

$$2.\quad A = 2^{p-r}+r\cdot2^{p-r-2}+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}\cdot2^{p-r-4}+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^{p-r-6}+\dots$$

Setzt man aber in (1.) $a=\frac{1}{m}$ und $b=\frac{m-1}{m}$ und multiplicirt mit m^p, so ergiebt

$$3.\quad A =$$
$$m^{p-r}+\frac{r}{1}(m-1)m^{p-r-2}+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}(m-1)^2m^{p-r-4}+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}(m-1)^3m^{p-r-6}+\dots$$

Diese Gleichung bestimmt die Anzahl der Gruppen, in welchen ein bestimmtes Element $r$mal so oft, entweder unmittelbar hintereinander oder im Überschufs über die übrigen Elemente, welche einzeln oder in beliebiger Verbindung untereinander auftreten, erscheinen wird, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe gebildet und die Gruppen von einer bestimmten Richtung aus betrachtet werden.

A trachtet ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bedingt ist, in p Versuchen so oft herbeizuführen, dafs es $r$mal öfter eintrifft, als B und C vereint im Stande sind, gleichheitlich unter sich die ihnen günstigen Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten b und c herbeizuführen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs A seinen Zweck erreichen werde.

A wird seinen Zweck erreichen, wenn das ihm günstige Ereignifs $r$mal hintereinander in den r ersten Versuchen eintritt, oder wenn das ihm günstige Ereignifs $r+2$mal und das jedem seiner Gegner günstige Ereignifs je einmal, oder wenn das ihm günstige $r+4$mal und das jedem seiner Gegner günstige je zweimal eintritt u. s. w. Dies führt zu folgender Zusammenstellung:

$$a^r, \quad a^{r+2}bc, \quad a^{r+4}b^2c^2, \quad a^{r+6}a^3b^3.$$

Untersuchen wir nun die einzelnen Fälle nach den Bemerkungen in $(a, b, c, \ldots.)$ und berücksichtigen, dafs die durch b und c bezeichneten Ereignisse in jeder beliebigen Zusammenstellung unter sich bei den möglichen Versuchen mit dem für A günstigen Ereignisse in Verbindung treten können, so ergiebt sich folgender leicht zu rechtfertigende Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$4. \quad w = a^r\Big[1+\frac{r(r+3)}{1\cdot 1}\cdot a^2bc+\frac{r(r+5)(r+6)(r+7)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\cdot a^4b^2c^2+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{r(r+2m+1)^{2m-1|1}}{1^{m|1}\cdot 1^{m|1}}\cdot a^{2m}b^mc^m+\ldots.\Big].$$

Auf ganz gleiche Weise findet sich die Wahrscheinlichkeit für B, gegenüber von A und C; eben so die für C, gegenüber von A und C.

Diese Schlüsse lassen sich wieder leicht verallgemeinern. Trachtet A_0, mit der ihm günstigen Wahrscheinlichkeit a, gegen n Theilnehmer A_1, A_2, A_3, ... A_n, denen die Wahrscheinlichkeiten a_1, a_2, ... a_n zugehören, ein Ereignifs so oft herbeizuführen, dafs es $r$mal öfter eintrifft, als seine Gegner im Stande sind, gleichheitlich die ihnen günstigen Ereignisse zu erlangen, so ist die Wahrscheinlichkeit für A:

$$5.\qquad w = a^r\Big[1 + \frac{r(r+n+1)^{n-1|1}}{(1^{1|1})^n}\cdot a^n\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdot a_n$$
$$+ \frac{r(r+2n+1)^{2n-1|1}}{(1^{2|1})^2}\cdot a^{2n}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdot a_n)^2$$
$$+ r(r+3n+1)^{3n-1|1}\cdot a^{3n}(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdot a_n)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big].$$

Die Reihe bricht ab, wenn die Zahl der Versuche, welche der Eigenthümlichkeit der Aufgabe entsprechen, erschöpft ist. Auf ähnliche Weise wird die für jeden andern Theilnehmer gültige Wahrscheinlichkeit bestimmt.

§. 34.

A trachtet, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit a bezeichnet wird, in p Versuchen wenigstens $r$mal eher, entweder hintereinander, oder im Überschusse über das Gegentheil, herbeizuführen, als *B* im Stande ist, ein Ereignifs, dessen Eintreffen im einzelnen Falle durch die Wahrscheinlichkeit b angedeutet wird, $s$mal, entweder hintereinander, oder im Überschusse über das erste Ereignifs zu erlangen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit für *A*?

Durch die in (1. §. 33.) aufgestellte Reihe ist die Beantwortung dieser Frage vorbereitet. Jene Reihe bleibt nämlich so lange in Kraft, als die Potenzen von a und b sich nicht bis zur $s$ten erheben. Erheben sie sich bis zur $s$ten, und darüber, so werden Fälle vorkommen, die *gegen* das Unternehmen entscheiden. Diese müssen gesucht und ausgeschieden werden. Um einen bessern Überblick zu haben, bezeichnen wir die den Potenzen von ab vorausgehenden Vorzahlen in (1. §. 33.) der Reihe nach durch A_0, A_1, A_2, ... Dieses giebt

$$1.\qquad w = a^r[A_0 + A_1 ab + A_2(ab)^2 + A_3(ab)^3 + \ldots + A_{s-1}(ab)^{s-1}$$
$$+ A_s(ab)^s + A_{s+1}(ab)^{s+1} + A_{s+2}(ab)^{s+2} + \ldots].$$

Die Glieder der ersten Horizontalreihe in (1.) entscheiden sämmtlich *für A*, die der zweiten enthalten Fälle, welche *gegen A* entscheiden. Der erste Ausdruck in der zweiten horizontalen Reihe bietet nur einen Fall dar, welcher zum Nachtheil des Unternehmens entscheidet. Dieser tritt ein, wenn das ungünstige Ereignifs $s$mal hintereinander vom ersten Versuche an eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit, dafs dies geschehe, ist

$$w_1 = b^s a^r a^s = b^s a^{r+s}.$$

Der zweite Ausdruck der zweiten horizontalen Reihe hat die Form

$$a^{r+s+1}b^{s+1} = a^{r+s}b^{s}\cdot ab.$$

Man löse, um die Zahl der auszuscheidenden Fälle zu finden, den Ausdruck in seine Bestandtheile auf und zeige die Wiederholungen durch unten angehängte Zahlen statt durch Exponenten an, so dafs

$$a^{r+s+1}b^{s+1} = b_1b_2b_3\ldots\ldots b_{s-1}b_s a_1a_2\ldots\ldots a_s a_1a_2\ldots\ldots a_r ab$$

wird. Alle die Fälle werden zum Nachtheil des Unternehmens entscheiden, worin b von vorn herein $s$mal hintereinander zu stehen kommt. Dies geschieht so oft, als b zwischen a^{r+s} verschiedene Stellungen einnehmen kann, also $r+s$mal; denn diejenigen Fälle sind auszuschliefsen, in welchen b die letzte oder vorletzte Stelle annimmt, weil sie schon in dem vorhergehenden Falle vorgesehen sind.

Hat b alle Stellen durchlaufen, so reiht es sich an die b an. Dadurch erscheinen diese in der $(s+1)$ten Dimension. Demnach kann ein a auf s Stellen zwischen den b erscheinen. Dies wird durch

$$a^{r+s+1}b^{s+1} = b_1b_2b_3\ldots\ldots b_{s-1}ab_sb\,.\,a^sa^r$$
$$b_1b_2b_3\ldots\ldots ab_{s-1}b_sb\,.\,a^sa^r$$

ausgedrückt; woraus ein Ausscheiden von noch weitern s Fällen entsteht. Der nach diesen Bemerkungen auszuscheidende Ausdruck ist

$$w_2 = (r+2s)\,a^{r+s+1}b^{s+1}.$$

Um die Zahl der Fälle, welche der dritte Ausdruck in der zweiten horizontalen Reihe auszuscheiden veranlafst, zu finden, dient folgende Zerlegung:

$$a^{r+s+2}b^{s+2} = b_1b_2\ldots\ldots b_sa_1a_2\ldots\ldots a_sa_1a_2\ldots\ldots a_raabb.$$

Die Anwendung der in (c. §. 33.) gemachten Bemerkungen führt auch hier zum Ziel. Die beiden am Ende des Ausdrucks erscheinenden b nehmen von der $(r+2s)$ten Stelle an alle Stellungen zwischen den a ein. Haben sie sich an die ersten b angeschlossen, so treten zwei a ein und wiederholen das Gleiche. Die Zahl der hieraus sich ergebenden Fälle ist

$$\frac{(r+2s)(r+2s-1)}{1\cdot2}.$$

Aufserdem kann noch ein b an die $(r+2s+1)$te und $(r+2s+2)$te Stelle rücken. Während nun dieses Element die beiden Stellen annimmt, durchläuft zuerst ein b $r+s$ und ein a darauf s Stellen. Die Zahl dieser Fälle ist

$$2(r+s).$$

Hieraus ergiebt sich für den auszuscheidenden Ausdruck:

$$w_3 = \frac{(r+2s)(r+2s+3)}{1\cdot2}\cdot a^{r+s+2}b^{s+2}.$$

Wenden wir die in (*d.* §. 33.) gemachten Bemerkungen auf den vierten Ausdruck in der zweiten horizontalen Reihe an, so ergiebt sich folgende Formel:

$$w_4 = \frac{(r+2s)(r+2s+4)(r+2s+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{r+s+3} b^{s+3}$$

u. s. w. Die Verbindung dieser Ausdrücke führt zu folgender Formel:

$$2. \quad w_5 = a^{r+s} b^s \Big[1 + \frac{r+2s}{1} \cdot ab + \frac{(r+2s)(r+2s+3)}{1 \cdot 2} (ab)^2 + \frac{(r+2s)(r+2s+4)(r+2s+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (ab)^3 + \frac{(r+2s)(r+2s+5)(r+2s+6)(r+2s+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (ab)^4 \; \ldots \ldots$$

Auch hier bezeichnen wir die Vorzahlen auf einfachere Weise und setzen für sie der Reihe nach B_0, B_1, B_2, B_3, ... Dadurch geht der Ausdruck in folgenden über:

$$3. \quad w_5 = a^{r+r} b^s (B_0 + B_1 ab + B_2 (ab)^2 + B_3 (ab)^3 + \ldots + B_{r-1} (ab)^{r-1} + B_r (ab)^r + B_{r+1} (ab)^{r+1} + B_{r+2} (ab)^{r+2} + \ldots).$$

Die Glieder dieser Reihe liefern so lange ein richtiges Resultat, als sich die Exponenten von ab nicht bis zu r erheben. Erheben sie sich bis zu r, und darüber, so entstehen Fälle, welche *für A* entscheiden, während sie, als *gegen A* entscheidend, aufgeführt und ausgeschieden wurden. Sie müssen gesucht, zusammengezählt und von (2.) ausgeschieden werden. Wenden wir die Schlüsse, welche zu (2.) und in (*a, b, c, d,* .... §. 33.) gemacht wurden, auf die Glieder der zweiten horizontalen Reihe in (3.) an, so giebt der erste Ausdruck derselben folgende Ausscheidung:

$$w_1 = a^{2r+s} b^{r+s},$$

der zweite folgende:

$$w_2 = \frac{3r+2s}{1} \cdot a^{2r+s+1} b^{r+s+1},$$

der dritte folgende:

$$w_3 = \frac{(3r+2s)(3r+2s+3)}{1 \cdot 2} \cdot a^{2r+s+2} b^{r+s+2}$$

u. s. w. Dies giebt:

$$4. \quad w_4 = a^{2r+s} b^{r+s} \Big(1 + (3r+2s) ab + \frac{(3r+2s)(3r+2s+3)}{1 \cdot 2} (ab)^2 + \frac{(3r+2s)(3r+2s+4)(3r+2s+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (ab)^3 \; \ldots \ldots \Big).$$

Auch diese Reihe giebt so lange ein günstiges Resultat, als sich die Exponenten von ab nicht bis zu s erheben. Erheben sie sich bis dahin, und darüber, so fängt eine neue Ausscheidung an, welche auf gleiche Weise behandelt werden mufs. Sie giebt folgendes Resultat:

$$5.\quad w_t = a^{2r+2s} b^{r+2s}\Big(1 + (3r+4s)ab + \frac{(3r+4s)(3r+4s+3)}{1\cdot 2}(ab)^2 + \dots\Big).$$

Das Gesetz, nach welchem diese Entwicklungen fortschreiten, ist deutlich. Wählen wir der Kürze wegen für das Gesetz, welches den Reihen (1. 2. 4. und 5.) zum Grunde liegt, die Bezeichnung

$$6.\quad a^{mr+ns} b^{(m-1)r+ns} Q_{(2m-1)r+2ns,\,ab} =$$

$$a^{mr+ns} b^{(m-1)r+ns}\Big((1 + ((2m-1)r+2ns)ab + \frac{((2m-1)r+2ns)((2m-1)r+2ns+3)}{1\cdot 2}ab$$

$$+ \frac{((2m-1)r+2ns)((2m-1)r+2ns+4)((2m-1)r+2ns+5)}{1\cdot 2\cdot 3}(ab)^2$$

. . . .

so ergiebt sich folgender Ausdruck für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$7.\quad w = a^r Q_{r,ab} - a^{r+s} b^s Q_{r+2s,ab} + a^{2r+s} b^{r+s} Q_{3r+2s,ab} - a^{2r+2s} b^{r+2s} Q_{3r+2s,ab} + \dots$$

Diese Gleichung findet sich leicht aus (6.), wenn man der Reihe nach $m = 1, 2, 3, \dots$ und $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, aber abwechselnd (zuerst für m, dann für n u. s. w.) in (6.) setzt. Aus (7.) findet sich die Wahrscheinlichkeit für B sehr leicht, wenn das entgegengesetzte Ereignifs $s$mal eher herbeigeführt werden soll, als A im Stande ist das für ihn günstige Ereignifs $r$mal zu erlangen. Zu diesem Ende ist b statt a, und s statt r zu setzen. Es ergiebt sich aus (6.)

$$8.\quad w = b^s Q_{s,ab} - b^{s+r} a^r Q_{s+2r,ab} + b^{2s+r} a^{s+r} Q_{3s+2r,ab} - b^{2s+2r} a^{s+2r} Q_{3s+4r,ab} + \dots$$

Die hier gefundenen Resultate bereiten auch die Beantwortung folgender Frage vor. A will ein Ereignifs mit der ihm günstigen Wahrscheinlichkeit a $r$mal eher herbeiführen als B ein Ereignifs mit der ihm günstigen Wahrscheinlichkeit b $s$mal herbeizuführen im Stande ist. B will das ihm günstige Ereignifs $s$mal eher herbeiführen als A im Stande ist das ihm günstige $r$mal herbeizuführen: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Versuchen A oder B seinen Zweck erreichen werde?

In (7.) ist die für A, in (8.) die für B günstige Wahrscheinlichkeit ausgedrückt. Tritt einer der in beiden Gleichungen vorgesehenen Fälle ein, so sind die Versuche geendet. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$9.\quad w = a^r Q_{r,ab} - a^{r+s} b^s Q_{r+2s,ab} + a^{2r+s} b^{r+s} Q_{3r+2s,ab} - \dots$$
$$+ b^s Q_{s,ab} - b^{s+r} a^r Q_{s+2r,ab} + b^{2s+r} a^{s+r} Q_{3s+2r,ab} - \dots$$

Diese Aufgabe kann auch unter folgender Form dargestellt werden.

Zwei Spieler A und B, von welchen der erste s, der zweite r Marken hat, spielen unter der Bedingung, dafs derjenige, der ein Spiel verliert, seinem Gegner eine Marke geben mufs und dafs derjenige der Sieger ist, der alle Marken des Gegners gewonnen hat. Die ihnen zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, im einzelnen Falle zu gewinnen, sind a und b: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs das Spiel in p Versuchen geendet sein werde?

Ist in (7. 8. und 9.) $r=s$, so ergeben sich einfachere Ausdrücke. Aus (9.) wird in diesem Falle, in entwickelter Form:

$$10.\quad w = (a^r+b^r)\left[1+rab+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right]$$
$$-(a^r+b^r)(ab)^r\left[1+3rab+\frac{3r(3r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{3r(3r+4)(3r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right]$$
$$+(a^r+b^r)(ab)^{2r}\left[1+5rab+\frac{5r(5r+3)}{1\cdot2}(ab)^2+\frac{5r(5r+4)(5r+5)}{1\cdot2\cdot3}(ab)^3+\dots\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Sind auch die Wahrscheinlichkeiten im einzelnen Falle gleich und ist $a=b=\frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus (10.)

$$11.\quad w = \frac{1}{2^{r-1}}\left[1+\frac{r}{2^2}+\frac{r(r+3)}{1\cdot2\cdot2^4}+\frac{r(r+4)(r+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^6}+\dots\right]$$
$$-\frac{1}{2^{3r-1}}\left[1+\frac{3r}{2^2}+\frac{3r(3r+3)}{1\cdot2\cdot2^4}+\frac{3r(3r+4)(3r+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^6}+\dots\right]$$
$$+\frac{1}{2^{5r-1}}\left[1+\frac{5r}{2^2}+\frac{5r(5r+3)}{1\cdot2\cdot2^4}+\frac{5r(5r+4)(5r+5)}{1\cdot2\cdot3\cdot2^6}+\dots\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Setzt man in der Gleichung (7.) $a=\frac{1}{m}$ und $b=\frac{m-1}{m}$ und multiplicirt mit m^p, so ergiebt sich

$$12.\quad A = m^{p-r}+r(m-1)m^{p-r-2}+\frac{r(r+3)}{1\cdot2}(m-1)^2m^{p-r-4}+\dots$$
$$-(m-1)^s m^{p-r-2s}-\frac{r+2s}{1}(m-1)^{s+1}m^{p-r-2s-2}$$
$$-\frac{(r+2s)(r+2s+3)}{1\cdot2}(m-1)^{s+2}m^{p-r-2s-4}-\dots$$
$$+(m-1)^{r+s}m^{p-3r-2s}+\frac{3r+2s}{1}(m-1)^{r+s+1}m^{p-3r-2s-2}$$
$$+\frac{(3r+2s)(3r+2s+3)}{1\cdot2}(m-1)^{r+s+2}m^{p-3r-2s-4}-\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Diese Gleichung löset folgende Aufgabe aus der Lehre von den Combinationen.

Bildet man die Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $p$ten Classe, verfolgt ein bestimmtes Element nach einer bestimmten Richtung hin, in allen Gruppen, in welchen es vorkommt, und zählt von der ersten Stelle an, wie oft es hintereinander oder im Überschusse über die übrigen Elemente (diese mögen einzeln, wiederholt oder zusammen in willkürlicher Verbindung mit einander stehen) vorkommt: so giebt die Gleichung (12.) die Anzahl der Gruppen an, in welchen das genannte Element wenigstens $r$mal eher vorkommt, als die übrigen (einzeln oder in Verbindung miteinander) $s$mal hintereinander oder im Überschusse über das bestimmte Element vorkommen. Hiebei ist zu bemerken, dafs die Stellenzahl eines Elements immer nur als Einheit gezählt wird. Die Gleichung (12.) und die Gleichungen (2. und 3. §. 33.) geben die Gruppen-Anzahl der Versetzungen mit Wiederholungen von bestimmten Unterschieden, worauf ich in meiner Lehre von den Combinationen hingewiesen habe (§. 23.). Die hier gegebenen Bestimmungen sollen das dort Angedeutete ergänzen.

Die in diesem und dem vorigen Paragraph behandelten Aufgaben stehen untereinander in genauem Zusammenhang. Die Verschiedenheit der Bedeutung der Gleichung (7.) und der Gleichung (1.) im vorigen Paragraph, zeigt sich deutlich und ist leicht zu erkennen. Bringen wir sie, um die Verschiedenheit stärker hervorzuheben, auf die Form, in welcher sie nach (10.) in diesem Paragraph dargestellt wurde, so ist die Aufgabe folgende.

Zwei Personen A und B spielen mit den beziehlichen Wahrscheinlichkeiten a und b, im einzelnen Falle zu gewinnen, miteinander. A hat eine unbestimmte Zahl von Marken, B hat r Marken. Wer verliert, giebt seinem Gegner eine Marke. A gewinnt, wenn er in p Spielen alle Marken seines Gegners erhalten hat: wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs A in p Spielen die Marken seines Gegners gewonnen haben werde?

Die Bedingung, dafs A eine unbestimmte oder unerschöpfliche Anzahl Marken habe, ist unerläfslich. Denn hätte er eine bestimmte Anzahl, etwa 5 Marken, so könnte leicht in p Spielen der Fall eintreten, dafs A alle seine Marken verlöre, wodurch er dann aufser Stand gesetzt wäre, das Spiel fortzusetzen. Von dieser unrichtigen Ansicht ging *Laplace* aus; denn er giebt Pg. 235 seiner „Théor. analyt. d. probl." die Gleichung (1. §. 33.), in der Meinung, dafs sie die Aufgabe auflöse, welche hier durch die Gleichung (7.) in diesem Paragraph gelöset wird. Von der Unhaltbarkeit der von *Laplace* aufgestellten Ansicht kann man sich leicht überzeugen, wenn man einzelne und

ganz einfache Fälle näher untersucht. Sie tritt schon deutlich hervor, wenn man in den genannten Gleichungen z. B. $p = 8$ setzt. Die in (§. 33. und 34.) behandelten Aufgaben wurden auch von *Trembley* in „Commentat. Soc. reg. scient. Götting. ad A. 1793 et 1794. Vol. XII. Pg. 99 sqq." behandelt (1. §. 33. und 7. §. 34.). *Laplace* aber scheint diese Arbeit nicht gekannt oder nicht beachtet zu haben. *Moivre* hat in seinem Werke „Doctr. of Chances III. Ed. Lond. 1756. Probl. 64. Pg. 204" die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit wegen Beendigung der Versuche unter den (§. 34.) angegebenen Bedingungen als Aufgabe aufgestellt und giebt die Gleichung (1. §. 33.) als Antwort auf die Frage, da doch die Gleichung (9. §. 34.) sie beantwortet. Er erhält das nämliche unhaltbare Resultat, welches *Laplace* nach ihm aufstellte.

Überblicken wir nun die in (§. 24 — 34) gefundenen Resultate, so zeigt sich, daſs sie eine Reihe zusammengehöriger Aufgaben lösen. Hiemit ist jedoch die Reihe derselben bei weitem noch nicht geschlossen; sie läſst sich noch um andere vermehren, die wir nicht weiter verfolgen, weil wir es schon in einer besondern Schrift: „Die Reihenfolge der Elemente bei den Versetzungen mit und ohne Wiederholungen aus einer oder mehreren Elementenreihen, und ihre Anwendung auf Wahrscheinlichkeits-Rechnung" gethan haben. Besondere Fälle dieser Aufgaben (§. 26. 29. 30. etc.) wurden von *N. Bernoulli, Moivre, Laplace, Trembley* und von Mehreren in den Annalen von *Gergonne* behandelt; wie wir es am gehörigen Orte angemerkt haben.

(Die Fortsetzung folgt.)

Fac-simile einer Handschrift von Ferroni.

…a Soluzion del Problema resa generale per l'istesso metodo condurrebbe all'Equazion canonica Bernoulliana:
$dy = \frac{s\,dx}{\sqrt{(a^2 + s^2)}}$ per qualunque Ipotesi di gravità variabile. Nell'Ipotesi delle direzioni convergenti dei gra=
vi, e della resistenza dei mezzi il Problema cederebbe all'istesso metodo.

…n so se il metodo sia così limpido e luminoso da reggere all'esame del di Lei veloce intendimento, d……
gante nei progressi scientifici coglie le palme delle moltiplici sue produzioni. Qualunque egli sia
la lieve penna che l'offre ne aspetta il buon decisivo della sua risposta.

…rivendo a un Geometra ò seguito l'ordine inverso dello stile epistolare. L'infinite dimostrazioni di cuore del
degnissimo di Lei Fratello, il suono della di Lei fama, l'avidità delle sue invenzioni vincendo
affatto la mia naturale inerzia mi spronano a dar di mano alla pigra penna. Non so, se il Sig.=
Fratello le abbia comunicata la mia Soluzione, parto più d'un accordo singolare, che d'una estrema
contenzione di spirito. Il comunicarmi le sue invenzioni sarà per me la caratteristica più brillan=
te dell'acquisto della di Lei amicizia. Mi vedrei fortunato abbastanza in scrivermi

di V. S. –

Firenze = 14 = Sett.re = 1764 =

Obblig.mo Serv.re
Pietro Ferroni

All M. R. P. P.re Gregorio Fontana delle S.e Pie
Lettor Pubblico
Milano

9.

Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9ten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dafs eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel x_k giebt, so dafs gleichzeitig:

$$x_\varkappa = \theta(x_\lambda, x_\mu), \quad x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\varkappa), \quad x_\mu = \theta(x_\varkappa, x_\lambda).$$

(Von Herrn Dr. *Otto Hesse*, Professor extraord. an der Universität zu Königsberg.)

Zu den algebraisch auflösbaren Gleichungen gehört nach *Abel's* Ausspruch (S. dieses Journal Bd. 5. S. 343) auch jede irreductible Gleichung, von welcher drei Wurzeln in einer solchen Verbindung stehen, dafs jede derselben eine gegebene rationale Function der beiden andern ist; unter der Voraussetzung, dafs die Zahl, welche den Grad der Gleichung angiebt, eine Primzahl sei. An diesen noch nicht bewiesenen Satz will ich einige Bemerkungen anschliefsen, indem ich die Bestimmung aufhebe, dafs die Zahl, welche den Grad der Gleichung angiebt, eine Primzahl sein müsse.

Es seien

$$\text{I.} \quad X(x) = 0$$

eine gegebene irreductible Gleichung und x_1, x_2, x_3 drei Wurzeln derselben, welche mit einander so verbunden sind, dafs

$$\text{II.} \quad x_3 = \theta(x_1, x_2)$$

ist, wo $\theta(x_1, x_2)$ eine gegebene rationale Function der beiden Wurzeln x_1 und x_2 bezeichnet. Alsdann hat man

$$\text{III.} \quad X(\theta(x_1, x_2)) = 0, \quad X(x_2) = 0, \quad X(x_1) = 0.$$

Betrachten wir nun die beiden ersten Gleichungen (III.) und in ihnen x_2 als die Unbekannte, so kann, erstens, der Fall eintreten, dafs den beiden Gleichungen nur durch die einzige Wurzel x_2 der Gleichung (I.) zu gleicher Zeit genügt wird, oder, zweitens, können mehrere Wurzeln, für x_2 gesetzt, den beiden Gleichungen zu gleicher Zeit genügen; oder mit andern Worten: unter

den Werthen, die der Ausdruck $\theta(x_1, x_2)$ annimmt, indem man für x_2 nach einander alle Wurzeln der Gleichung (I.) setzt, kommen, erstlich, nur eine einzige Wurzel der Gleichung (I.), oder, zweitens, mehrere Wurzeln vor.

Im ersten Falle gehört, wie ich nachweisen werde, die Gleichung (I.) zu der Classe von Gleichungen, von welchen eine Wurzel eine gegebene rationale Function einer andern ist; welche Gleichungen *Abel* in dem 4ten Bande dieses Journals S. 131 untersucht hat.

Es seien

$$\text{IV.} \quad \varphi(x) = 0, \quad X(x) = 0$$

die beiden ersten Gleichungen (III.), nachdem man in denselben x statt x_2 gesetzt und sie nach Potenzen dieser Variabeln geordnet hat. Diese Gleichungen seien respective vom $m$ten und vom $n$ten Grade. Die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x in der ersten Gleichung werden bekannte rationale Functionen der Wurzel x_1 sein. Bezeichnen wir nun durch $F(x)$ eine beliebige ganze Function von x vom $(m+n-2)$ten Grade, welche für x_2 nicht verschwindet, so kann man immer folgende identische Gleichungen aufstellen:

$$\text{V.} \quad \begin{cases} A_0 F(x) + B_0 \varphi(x) + C_0 X(x) = 1, \\ A_1 F(x) + B_1 \varphi(x) + C_1 X(x) = x, \\ A_2 F(x) + B_2 \varphi(x) + C_2 X(x) = x^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{m+n-2} F(x) + B_{m+n-2} \varphi(x) + C_{m+n-2} X(x) = x^{m+n-2}, \end{cases}$$

in welchen die verschiedenen Gröfsen A, B, C ganze, zu bestimmende Functionen, respective vom 0, $(n-2)$, $(m-2)$ten Grade der Variabeln x und rationale Functionen der Gröfse x_1 sind, welche in den Coëfficienten der Function $\varphi(x)$ rational vorkommt. Denn setzt man, nachdem man eine der aufgestellten Gleichungen nach Potenzen von x geordnet hat, die Coëfficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleich, so erhält man $m+n-1$ lineäre Gleichungen in Rücksicht auf die zu bestimmenden Coëfficienten in A, B, C, deren Zahl auch gleich der der Gleichungen ist. Löset man diese lineären Gleichungen auf, so erhält man die Werthe der Coëfficienten in A, B, C als rationale Functionen von x_1 und kann die gesuchten Functionen A, B, C selbst mit Hülfe derselben zusammensetzen. Dividiren wir die $(k+1)$te Gleichung durch die nächst vorhergehende, so erhalten wir:

$$x = \frac{A_k F(x) + B_k \varphi(x) + C_k X(x)}{A_{k-1} F(x) + B_{k-1} \varphi(x) + C_{k-1} X(x)}.$$

Setzen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung x_2 statt x, so wird, da $\varphi(x_2)=0$ und $X(x_2)=0$ ist:

$$\text{VI.} \qquad x_2 = \frac{A_k}{A_{k-1}}.$$

Der Theil rechts dieser Gleichung ist aber eine rationale Function der Wurzel x_1: mithin haben wir eine Wurzel x_2 der Gleichung (I.) als rationale Function einer andern Wurzel x_1 dargestellt. Da k eine beliebige unter den Zahlen $1, 2 \ldots . m+n-2$ bedeutet, so ist noch zu bemerken, dafs wir $m+n-2$ verschiedene rationale Functionen der Wurzel x_1 gefunden haben, welche gleich der Wurzel x_k sind.

Die Untersuchung des zweiten Falles, wenn unter den Werthen, die der Ausdruck $\theta(x_1, x_2)$ annimmt, indem man für x_2 nach einander alle Wurzeln (I.) mit Ausschlufs von x_1 setzt, mehrere Wurzeln dieser Gleichung vorkommen (wenn nemlich $\theta(x, x_1)$ eine Wurzel der Gleichung (I.) ist, so hat man eine gegebene rationale Function einer Wurzel, welche gleich einer andern Wurzel derselben Gleichung ist), scheint ungleich schwieriger zu sein. Ich werde mich vorläufig damit begnügen, als Beispiel zu diesem Falle die algebraische Auflösung einer Gleichung vom 9ten Grade durchzuführen, auf welche die Untersuchung der Wendepuncte einer Curve vom dritten Grade führt.

§. 1.

Es sei

$$1. \qquad X(x) = 0$$

eine gegebene Gleichung vom 9ten Grade, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dafs eine gegebene rationale und symmetrische Function $\theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel $x_\varkappa$ giebt, in der Art, dafs gleichzeitig

$$2. \qquad x_\varkappa = \theta(x_\lambda, x_\mu), \quad x_\lambda = \theta(x_\mu, x_\varkappa), \quad x_\mu = \theta(x_\varkappa, x_\lambda) \text{ ist.}$$

Die 9 Wurzeln $x_1, x_2, \ldots . x_9$ der gegebenen Gleichung (1.) bilden, wenn man je drei derselben zusammenstellt, 84 Combinationen, von welchen die einen *conjugirte* Wurzeln enthalten, das heifst solche, die in der durch die Gleichungen (2.) angedeuteten Verbindung stehen, die andern aber *nicht conjugirte* Wurzeln oder solche, welche nicht auf die genannte Weise mit einander verbunden sind. Die Zahl der ersten Art Combinationen beträgt 12, die der letzten Art 72.

Um dieses nachzuweisen und die 12 Combinationen erster Art zu bilden, bemerken wir, dafs sich sämmtliche Wurzeln der Gleichung (1.) durch irgend drei nicht conjugirte Wurzeln rational ausdrücken lassen. Denn angenommen,

es seien x_1, x_4, x_7 drei nicht conjugirte Wurzeln, so müssen $\theta(x_4, x_7)$, $\theta(x_1, x_7)$, $\theta(x_1, x_4)$ drei neue, ebenfalls nicht conjugirte Wurzeln sein, welche wir durch

$$3. \qquad x_2 = \theta(x_4, x_7), \qquad x_5 = \theta(x_1, x_7), \qquad x_8 = \theta(x_1, x_4)$$

bezeichnen wollen. Wären diese neuen Wurzeln conjugirte, so hätte man folgende 4 Combinationen conjugirter Wurzeln:

$$x_2,\ x_4,\ x_7; \qquad x_5,\ x_1,\ x_7; \qquad x_8,\ x_1,\ x_4; \qquad x_2,\ x_5,\ x_8.$$

Die zu x_7 und x_8 conjugirte Wurzel kann nur eine von den drei letzten Wurzeln x_3, x_6, x_9 sein, weil ebensowohl x_7 als x_8 mit jeder der übrigen Wurzeln schon combinirt ist. Die zu x_7 und x_8 conjugirte Wurzel sei nun x_9, also x_7, x_8, x_9 eine neue Combination conjugirter Wurzeln. Ebenso kann die zu x_8 und x_3 conjugirte Wurzel nur x_6 sein. Mithin ist x_8, x_3, x_6 wieder eine Combination conjugirter Wurzeln. Endlich kann die zu x_7 und x_3 conjugirte Wurzel nur x_6 sein. Man hat also die Combination x_7, x_3, x_6 conjugirter Wurzeln. Diese und die vorhergehende Combination können aber nicht neben einander bestehen, weil nicht gleichzeitig

$$x_7 = \theta(x_3, x_6) \qquad \text{und} \qquad x_8 = \theta(x_3, x_6)$$

sein kann. Die Annahme dafs x_2, x_5, x_8 conjugirte Wurzeln seien, was auf die aufgestellten widersprechenden Gleichungen führt, ist also unstatthaft. Im Allgemeinen geben die Ausdrücke $\theta(x_\lambda, x_\mu)$, $\theta(x_\mu, x_\varkappa)$, $\theta(x_\varkappa, x_\lambda)$ entweder die Wurzeln $x_\varkappa$, x_λ, x_μ, oder neue, von diesen verschiedene, nicht conjugirte Wurzeln, je nachdem $x_\varkappa$, x_λ, x_μ conjugirte oder nicht conjugirte Wurzeln der Gleichung (1.) sind.

Demnach sind auch die Ausdrücke $\theta(x_5, x_8)$, $\theta(x_8, x_2)$, $\theta(x_2, x_5)$ von x_2, x_5, x_8 verschiedene und nicht conjugirte Wurzeln. Sie können aber auch nicht die Wurzeln x_1, x_4, x_7 sein, von welchen wir ausgingen. Denn wäre z. B. $x_1 = \theta(x_5, x_8)$, so wären x_1, x_5, x_8 conjugirte Wurzeln. Es sind aber nach (3.) schon x_1, x_4, x_8 conjugirte Wurzeln. Mithin hätte man $x_5 = \theta(x_1, x_8)$ und zugleich $x_4 = \theta(x_1, x_8)$. Eben so wenig kann $x_4 = \theta(x_8, x_2)$ oder $x_7 = \theta(x_5, x_2)$ sein; denn aus diesen Annahmen würde man die Folgerung ziehen können, dafs $x_5 = \theta(x_4, x_8)$ sei, während die Gleichungen (3.) $x_1 = \theta(x_4, x_8)$ geben, oder dafs $x_8 = \theta(x_5, x_7)$ sei, während man aus (3.) $x_1 = \theta(x_5, x_7)$ erhält.

Die obigen Ausdrücke geben also die drei letzten Wurzeln x_3, x_6, x_9 in der Art, dafs

$$4. \qquad x_3 = \theta(x_5, x_8), \qquad x_6 = \theta(x_8, x_2), \qquad x_9 = \theta(x_2, x_5).$$

Es ist leicht zu sehen, dafs man wieder auf die drei ersten Wurzeln x_1, x_4, x_7 zurückkommt, wenn man aus den letzten Wurzeln auf die angegebene Weise neue Wurzeln bildet. Man erhält nämlich:

$$5.\quad x_1 = \theta(x_6, x_9), \quad x_4 = \theta(x_9, x_3), \quad x_7 = \theta(x_3, x_6).$$

Denn vertauscht man die Wurzeln x_4 und x_7 mit einander, läfst aber die Wurzel x_1 ungeändert, so hat man nach (3.) die Wurzeln x_2 und x_8 mit einander zu vertauschen und x_2 ungeändert zu lassen, und nach (4.) x_6 und x_9 zu vertauschen und x_3 ungeändert zu lassen. Da nun x_6 und x_9 mit einander vertauscht werden können, ohne dafs sich x_1 und x_3 ändern, so mufs $\theta(x_6, x_9)$ gerade gleich x_1 und nicht gleich x_4 oder x_7 sein, etc.

Die 12 Combinationen der conjugirten Wurzeln der Gleichung (1.) kann man nun in folgende 4 Gruppen vertheilen, deren jede sämmtliche Wurzeln enthält:

$$6.\quad \begin{cases} x_1 x_2 x_3 \quad \ldots \quad x_4 x_5 x_6 \quad \ldots \quad x_7 x_8 x_9 \\ x_2 x_4 x_7 \quad \ldots \quad x_3 x_5 x_8 \quad \ldots \quad x_1 x_6 x_9 \\ x_5 x_7 x_1 \quad \ldots \quad x_6 x_8 x_2 \quad \ldots \quad x_4 x_9 x_3 \\ x_8 x_1 x_4 \quad \ldots \quad x_9 x_2 x_5 \quad \ldots \quad x_7 x_3 x_6. \end{cases}$$

Die 9 letzten Combinationen ergeben sich aus den Gleichungen (3. 4. 5.). Zu den 3 ersten gelangt man durch folgende Betrachtung: Je zwei Wurzeln der Gleichung (1.) haben eine ihnen zugehörige conjugirte dritte. In den 3 letzten Gruppen ist die Wurzel x_1 combinirt mit jeder andern Wurzel; mit Ausnahme von x_2 und x_3. Deshalb kann die zu x_1 und x_2 conjugirte Wurzel nur x_3 sein. Eben so ist in den 3 letzten Gruppen die Wurzel x_4 mit jeder andern combinirt, mit Ausnahme von x_5 und x_6, und die Wurzel x_7 ist mit jeder andern combinirt, mit Ausnahme von x_8 und x_9. Es müssen daher x_4, x_5, x_6, und ebenso x_7, x_8, x_9, conjugirte Wurzeln sein.

Es ist für die folgende Betrachtung von Wichtigkeit, zu bemerken, dafs die angegebene Vertheilung der 12 Combinationen der conjugirten Wurzeln in solche Gruppen, welche zugleich alle Wurzeln enthalten, die einzig mögliche ist. Von welchen drei nicht conjugirten Wurzeln der Gleichung (1.) wir also auch ausgehen: der angegebene Algorithmus führt immer auf die 4 Gruppen (6.).

Die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln bleiben übrig, wenn man von sämmtlichen Combinationen der 9 Wurzeln zur dritten Classe die 12 angeführten Combinationen der conjugirten Wurzeln wegläfst.

Unsere Gleichung (1.) vom 9ten Grade hat die Eigenschaft, dafs sich alle Wurzeln derselben durch drei nicht conjugirte Wurzeln ausdrücken lassen.

In der That: setzt man die Werthe von (3.) in (4.) und nimmt die Gleichungen (3.) hinzu, so hat man folgende Ausdrücke der 9 Wurzeln:

$$x_1 = x_1; \quad x_2 = \theta(x_4, x_7); \quad x_3 = \theta(\theta(x_7, x_1), \theta(x_1, x_4));$$
$$x_4 = x_4; \quad x_5 = \theta(x_7, x_1); \quad x_6 = \theta(\theta(x_1, x_4), \theta(x_4, x_7));$$
$$x_7 = x_7; \quad x_8 = \theta(x_1, x_4); \quad x_9 = \theta(\theta(x_4, x_7), \theta(x_7, x_1)).$$

Setzt man für die Wurzeln x_1, x_4, x_7 irgend drei andere $x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}$ nicht conjugirte Wurzeln, so wird jede Wurzel in eine andere übergehen. Nehmen wir an, dafs durch diese Änderung die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ respective in $x_\varkappa, x_\lambda, x_\mu; x_{\varkappa'}, x_{\lambda'}, x_{\mu'}; x_{\varkappa''}, x_{\lambda''}, x_{\mu''}$ übergehen, so stellen sich sämmtliche Wurzeln der Gleichung (1.) als Functionen der drei nicht conjugirten Wurzeln $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ dar, wie folgt:

$$7. \quad \begin{cases} x_\varkappa = x_\varkappa, & x_\lambda = \theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}), & x_\mu = \theta(\theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa), \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'})), \\ x_{\varkappa'} = x_{\varkappa'}, & x_{\lambda'} = \theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa), & x_{\mu'} = \theta(\theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}), \theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})), \\ x_{\varkappa''} = x_{\varkappa''}, & x_{\lambda''} = \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}), & x_{\mu''} = \theta(\theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}), \theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa)), \end{cases}$$

und die erste Gruppe (6.) geht über in:

$$8. \quad x_\varkappa x_\lambda x_\mu \quad \ldots\ldots \quad x_{\varkappa'} x_{\lambda'} x_{\mu'} \quad \ldots\ldots \quad x_{\varkappa''} x_{\lambda''} x_{\mu''},$$

welches wir als einen allgemeinen Ausdruck für die 4 Gruppen (6.) betrachten können. Denn er geht, indem wir auf die Reihenfolge der drei Combinationen keine Rücksicht nehmen, in die eine oder die andere der 4 Gruppen (6.) über, je nachdem man in (7.) statt $x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}$ diese oder jene nicht conjugirte Wurzeln setzt. Wenn man demnach statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ nach einander die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln setzt, so wird der allgemeine Ausdruck (8.) 18mal in jede der 4 Gruppen (6.) übergehen.

Es bleibt noch übrig, diejenigen Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln anzugeben, welche für $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ zu setzen sind, damit der allgemeine Ausdruck (8.) in eine und dieselbe Gruppe (6.), zum Beispiel in die erste übergehe. Diese Combinationen erhält man, wenn man auf jede mögliche Art aus jeder Combination der ersten Gruppe eine Wurzel heraushebt und diese drei Wurzeln zu einer neuen Combination zusammenstellt, wobei zu sorgen ist, dafs die 9 Combinationen conjugirter Wurzeln der drei anderen Gruppen, welche auf diese Weise mit entstehen, weggelassen werden. Denn setzt man z. B. $x_\varkappa = x_2$, $x_{\varkappa'} = x_4$, $x_{\varkappa''} = x_9$, welches drei nicht conjugirte Wurzeln aus der ersten Gruppe (6.) sind, jede aus einer andern Combination dieser Gruppe genommen, so geht der allgemeine Ausdruck (8.) über in:

[illegible]

und man überzeugt sich leicht durch die Ansicht der Tafel (6.), dafs von dieser Form nur die erste Gruppe sein kann, weil in den übrigen Gruppen von den Wurzeln x_2, x_4, x_6 nicht jede in einer andern Combination vorkommt, etc.

Wir bemerken noch, dafs der allgemeine Ausdruck (8.) der Gruppen (6.) in

$$x_x x_x x_x \quad \ldots \quad x_{x'} x_{x'} x_{x'} \quad \ldots \quad x_{x''} x_{x''} x_{x''},$$

übergeht, wenn für x_x, $x_{x'}$, $x_{x''}$ conjugirte Wurzeln gesetzt werden; was 12mal geschehen kann.

§. 2.

Die Auflösung der Gleichung (1.) vom 9ten Grade läfst sich auf die Auflösung einer Gleichung vom 4ten und mehrerer Gleichungen vom 3ten Grade zurückführen, also durch Wurzelgröfsen ausdrücken. Um diese Gleichungen zu bilden, nehmen wir von den 12 Combinationen (6.) der conjugirten Wurzeln eine beliebige heraus: z. B.

$$x_x x_\lambda x_\mu,$$

zwischen welchen Wurzeln der Annahme nach die Gleichungen (2.) Statt finden, und bilden folgende symmetrische Function der genannten 3 Wurzeln:

$$9. \quad y_{x,\lambda,\mu} = \alpha - x_x \,.\, \alpha - x_\lambda \,.\, \alpha - x_\mu$$

vom dritten Grade, in Rücksicht auf die unbestimmte Constante α. Diese Function nimmt, wenn man statt $x_x x_\lambda x_\mu$ nach einander die 12 Combinationen (6.) setzt, die jenen Combinationen entsprechenden Werthe an, nemlich:

$$10. \quad \begin{cases} y_{1,2,3} & \ldots & y_{4,5,6} & \ldots & y_{7,8,9} \\ y_{2,4,7} & \ldots & y_{3,5,8} & \ldots & y_{1,6,9} \\ y_{5,7,1} & \ldots & y_{6,8,2} & \ldots & y_{4,9,3} \\ y_{8,1,4} & \ldots & y_{9,2,5} & \ldots & y_{7,3,6}. \end{cases}$$

Wir bilden ferner folgende symmetrische Function der Elemente $y_{x,\lambda,\mu}$, $y_{x',\lambda',\mu'}$, $y_{x'',\lambda'',\mu''}$:

$$11. \quad z = \beta - y_{x,\lambda,\mu} \,.\, \beta - y_{x',\lambda',\mu'} \,.\, \beta - y_{x'',\lambda'',\mu''}$$

vom dritten Grade in Rücksicht auf die unbestimmte Constante β. Diese Function nehme, indem man für die Elemente $y_{x,\lambda,\mu}$, $y_{x',\lambda',\mu'}$, $y_{x'',\lambda'',\mu''}$ nach einander die 4 Reihen Werthe (10.) setzt, selbst die 4 Werthe

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; z_4$$

an. Bilden wir endlich die Gleichung

$$12. \quad z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0 = 0$$

4ten Grades, deren Wurzeln die genannten Werthe der Function z sind, so lassen sich die Coefficienten A dieser Gleichung mit Hülfe der symmetrischen

Functionen der Wurzeln der in Rede stehenden Gleichungen aus den Coëfficienten der gegebenen Gleichung (1.) und den in der Function $\theta(x_\varkappa, x_\lambda)$ steckenden, ebenfalls gegebenen Constanten zusammensetzen.

Denn setzen wir in dem Theile rechts der Gleichung (11.) für die Elemente ihre Werthe:

$$13. \quad \begin{cases} y_{\varkappa,\lambda,\mu} = \alpha - x_\varkappa \cdot \alpha - x_\lambda \cdot \alpha - x_\mu, \\ y_{\varkappa',\lambda',\mu'} = \alpha - x_{\varkappa'} \cdot \alpha - x_{\lambda'} \cdot \alpha - x_{\mu'}, \\ y_{\varkappa'',\lambda'',\mu''} = \alpha - x_{\varkappa''} \cdot \alpha - x_{\lambda''} \cdot \alpha - x_{\mu''} \end{cases}$$

und drücken mit Hülfe der Gleichungen (7.) die 9 Wurzeln $x_\varkappa, x_\lambda, \ldots \ldots x_{\mu''}$ der Gleichung (1.) durch die drei nicht conjugirten Wurzeln $x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}$ aus, so erhalten wir

$$14. \quad z = \psi(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}),$$

wenn durch $\psi(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ diejenige rationale und symmetrische Function der drei nicht conjugirten Wurzeln bezeichnet wird, in welche der Theil rechts der Gleichung (11.) dadurch übergeht. Erheben wir den Theil rechts dieser Gleichung zu einer beliebigen ganzen, z. B. zur $m$ten Potenz und bezeichnen durch $\Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ die Summe der Terme, welche aus dem einen $\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ hervorgehen, wenn man in demselben statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ nach einander die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln setzt; durch $\Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ die Summe der Terme, welche man aus dem genannten erhält, wenn man statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ nach einander die 12 Combinationen der conjugirten Wurzeln setzt; endlich durch $\Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ die Summe aller Terme, welche aus dem genannten Term hervorgehen, indem man statt $x_\varkappa x_{\varkappa'} x_{\varkappa''}$ sämmtliche Combinationen der 9 Wurzeln der Gleichung (1.) zur dritten Classe setzt, so erhält man:

$$15. \quad \Sigma''\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) + \Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) = \Sigma\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}).$$

Der Theil rechts dieser Gleichung ist eine rationale und symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (1.). Man kann ihn demnach durch die Coëfficienten der gegebenen Gleichung (1.) ausdrücken. Auch die Summe $\Sigma'\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''})$ läſst sich als eine symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (1.) darstellen. Denn da $x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}$ in dieser Summe conjugirte Wurzeln bedeuten, zwischen welchen die Gleichungen (2.) Statt finden, so ist

$$\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}) = \psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'})) = \psi^m(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}, \theta(x_{\varkappa'}, x_{\varkappa''}))$$
$$= \psi^m(x_{\varkappa''}, x_\varkappa, \theta(x_{\varkappa''}, x_\varkappa)).$$

Bezeichnen wir nun die Summe der 36 Terme, welche aus dem einen $\psi^m(x_\varkappa, x_{\varkappa'}, \theta(x_\varkappa, x_{\varkappa'}))$, der eine symmetrische Function der beiden Wur-

zeln x_x, $x_{x'}$ ist, entstehen, indem wir für x_x, $x_{x'}$ nach einander die Combinationen der 9 Wurzeln der Gleichung (1.) zur zweiten Classe setzen, durch $\Sigma\psi^m(x_x, x_{x'}, \theta(x_x, x_{x'}))$, so haben wir

$$16. \quad \Sigma'\psi^m(x_x, x_{x'}, x_{x''}) = \tfrac{1}{3}\Sigma\psi^m(x_x, x_{x'}, \theta(x_x, x_{x'})).$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber eine rationale symmetrische Function sämmtlicher Wurzeln der Gleichung (1.). Ziehen wir die Gleichung (16.) von (15.) ab, so erhalten wir:

$$17. \quad \Sigma''\psi^m(x_x, x_{x'}, x_{x''}) = \Sigma\psi^m(x_x, x_{x'}, x_{x''}) - \tfrac{1}{3}\Sigma\psi^m(x_x, x_{x'}, \theta(x_x, x_{x'})).$$

Die Summe $\Sigma''\psi^m(x_x, x_{x'}, x_{x''})$ stellt sich auf diese Weise als die Differenz zweier rationaler und symmetrischer Functionen der Wurzeln der Gleichung (1.) dar. Erwägt man nun, dafs für die 72 Combinationen der nicht conjugirten Wurzeln die Function $z^m = \psi^m(x_x, x_{x'}, x_{x''})$ nur die 4 Werthe z_1^m, z_2^m, z_3^m, z_4^m annimmt, und zwar jeden Werth 18mal, so läfst sich folgende Gleichung aufstellen:

$$18. \quad z_1^m + z_2^m + z_3^m + z_4^m = \tfrac{1}{18}\Sigma''\psi^m(x_x, x_{x'}, x_{x''}).$$

Den Theil rechts dieser Gleichung haben wir aber in (17.) als eine rationale und symmetrische Function der 9 Wurzeln der Gleichung (1.) dargestellt; wir können ihn also durch die Coëfficienten in der Gleichung (1.) und durch bekannte Gröfsen ausdrücken. Setzt man statt m in (18.) nach einander die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., so erhält man die Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung (12.). Da sich durch diese aber die Coëfficienten A der Gleichung (12.) rational ausdrücken lassen, so kann man auch die Coëfficienten in der Gleichung (12.) durch die Coëfficienten in der Gleichung (1.) und durch bekannte Gröfsen ausdrücken.

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung (1.) bestimmen wir nun auf folgende Art. Wir suchen eine beliebige Wurzel der Gleichung (12.). Diese wird, wie aus dem Vorhergehenden erhellet, eine ganze Function in Rücksicht auf die Constante β sein. Setzen wir diese Wurzel gleich 0, so erhalten wir eine Gleichung 3ten Grades in Rücksicht auf β. Die drei Wurzeln dieser Gleichung 3ten Grades sind drei in einer Horizontalreihe stehende Werthe (10.). Setzen wir eine dieser Wurzeln gleich 0, so erhalten wir eine zweite Gleichung 3ten Grades in Rücksicht auf die Constante α. Die drei Wurzeln α dieser Gleichung werden dann drei conjugirte Wurzeln der Gleichung (1.) sein.

Um alle conjugirten Wurzeln der Gleichung (1.) zu finden, darf man nur mit sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (12.) auf die angegebene Weise verfahren.

§. 3.

Das Problem der Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung, welches darin besteht, diejenigen Werthe der Variabeln zu bestimmen, welche zweien gegebenen, von einander abhängigen Gleichungen dritten Grades mit zwei Variabeln zu gleicher Zeit genügen, führt, wenn man eine Variable eliminirt, auf eine Gleichung 9ten Grades mit einer Unbekannten, deren Wurzeln dieselbe Eigenschaft haben, welche ich zwischen den Wurzeln der im Vorhergehenden behandelten Gleichung (1.) annahm *). Dieses werde ich im Folgenden nachweisen, indem ich mit der Ableitung der Gleichungen den Anfang mache, welche die Wendepuncte einer Curve $n$ter Ordnung bestimmen.

Wenn U eine beliebige ganze homogene Function zweier Variabeln x, y vom $n$ten Grade bedeutet, so ist $U=0$ eine beliebige Gleichung $n$ten Grades in Rücksicht auf die Unbekannte $\frac{x}{y}$. Als Bedingung, dafs diese Gleichung drei gleiche Wurzeln habe, pflegt man die drei Gleichungen anzugeben:

$$U=0, \quad \frac{\partial U}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,$$

welche für die gleiche Wurzel zugleich erfüllt werden müssen. Diese Gleichungen sind respective vom n, $n-1$ und $(n-2)$ten Grade. Man kann jedoch an ihrer Stelle drei Gleichungen vom $(n-2)$ten Grade substituiren, welche ganz Dasselbe leisten. Denn erwägt man, dafs die angegebenen Gleichungen sich auch so darstellen lassen:

$$U=\frac{1}{n\cdot n-1}\left\{x^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\}=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{n-1}\left\{x\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+y\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right\}=0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,$$

---

*) Aus einem vom Januar 1844 aus Rom datirten Schreiben des Herrn Professor *Jacobi*, dem ich die ersten Resultate meiner Untersuchung über die Wendepuncte mitgetheilt hatte, hebe ich folgende Stelle heraus. „Sie werden wahrscheinlich auch das „allgemeine Problem lösen können: eine Gleichung 9ten Grades aufzulösen, wenn eine „gegebene rationale symmetrische Function $F(x, x')$ je zweier Wurzeln x, x' immer wie„der eine dritte Wurzel giebt, in der Art, dafs wenn $F(x, x')=x''$, auch $F(x', x'')=x$, „$F(x'', x)=x'$ ist. Denn dieses ist hier bei den Gleichungen der Wendepuncte der Curven „dritter Ordnung der Fall. Es würde sich so eine neue Classe von auflösbaren alge„braischen Gleichungen eröffnen, welche von denen, auf die *Abel* die *Gaufs*sche Methode „ausgedehnt hat, total verschieden sind." Auf diese Andeutung hin habe ich die vorliegende Untersuchung der Gleichung 9ten Grades unternommen.

so folgt aus der zweiten, mit Berücksichtigung der letzten, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$, und mit Berücksichtigung dieser und der letzten, aus der ersten, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$. Die erwähnten Bedingungsgleichungen vom $(n-2)$ten Grade für die Gleichheit dreier Wurzeln der Gleichung $U = 0$ sind demnach:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Allgemein, wenn die Gleichung $U = 0$ m gleiche Wurzeln hat, werden durch die gleiche Wurzel folgende m Gleichungen vom $(n-m+1)$ten Grade erfüllt:

$$\frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-2} \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial x^{m-3} \partial y^2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial^{m-1} U}{\partial y^{m-1}} = 0.$$

Es sei nun u eine beliebige ganze homogene Function vom $n$ten Grade der drei Variabeln x, y, z. Wenn man durch $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten eines variablen Puncts bezeichnet, so ist $u = 0$ die Gleichung einer beliebigen Curve $n$ten Grades. Eine beliebige gerade Linie, deren Gleichung

$$z = ax + by$$

ist, schneidet die Curve u bekanntlich in n Puncten. Setzt man den Werth von z aus der Gleichung der geraden Linie in u, wodurch diese Function in eine homogene Function U von demselben Grade der Variabeln x, y übergeht, so werden die n Wurzeln der Gleichung $U = 0$, in welcher man $\frac{x}{y}$ als die Unbekannte betrachtet, die Verhältnisse der Coordinaten $\frac{x}{z} : \frac{y}{z}$ der Schnittpuncte der Curve u mit der geraden Linie sein. Die Gleichung der geraden Linie hat aber 2 Constanten a, b, welche mit in die Gleichung $U = 0$ eingehen. Man kann nun die eine von diesen Constanten als Function der andern so bestimmen, dafs 2 Wurzeln der Gleichung $U = 0$ gleich werden. In diesem Fall wird die gerade Linie eine Tangente der Curve. Theilt man aber den beiden Constanten solche Werthe zu, dafs 3 Wurzeln der $U = 0$ gleich werden, so wird die gerade Linie eine Wendetangente, und für den Wendepunct, in welchem die Wendetangente die Curve berührt, hat man die vorhin aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Da aber $U = u$, wenn $z = ax + by$, so lassen sich die drei Gleichungen, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{1,1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{2,2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{3,3},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = u_{2,3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = u_{3,1}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{1,2}$$

setzt, auch so darstellen:

$$u_{1,1} + 2a u_{1,3} + a^2 u_{3,3} = 0,$$
$$u_{1,2} + a u_{2,3} + b u_{1,3} + ab u_{3,3} = 0,$$
$$u_{2,2} + 2b u_{2,3} + b^2 u_{3,3} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen a und b, so erhält man die Gleichung einer Curve, welche die gegebene Curve u in den Wendepuncten schneidet. Um diese Elimination auszuführen, bestimmen wir den Werth von a aus der zweiten Gleichung

$$a = -\frac{u_{1,2} + b u_{1,3}}{u_{2,3} + b u_{3,3}}$$

und setzen diesen Werth in die erste Gleichung. Dadurch erhalten wir

$$u_{1,1}(u_{2,3} + b u_{3,3})^2 - 2 u_{1,3}(u_{1,2} + b u_{1,3})(u_{2,3} + b u_{3,3}) + u_{3,3}(u_{1,2} + b u_{1,3})^2 = 0,$$

oder, nach Potenzen von b geordnet:

$$u_{1,1} u_{2,3}^2 - 2 u_{1,2} u_{1,3} u_{2,3} + u_{3,3} u_{1,2}^2 + (u_{1,1} u_{3,3} - u_{1,3}^2)(2b u_{2,3} + b^2 u_{3,3}) = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der dritten mit dem Factor $(u_{1,1} u_{3,3} - u_{1,3}^2)$ multiplicirten Gleichung ab und setzen der Kürze wegen

$$v = u_{1,1} u_{2,2} u_{3,3} + 2 u_{1,2} u_{1,3} u_{2,3} - u_{1,1} u_{2,3}^2 - u_{2,2} u_{1,3}^2 - u_{3,3} u_{1,2}^2,$$

so ist das Resultat der Elimination:

$$v = 0;$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist, die die gegebene Curve $u = 0$ in den Wendepuncten schneidet. Da v vom Grade $3(n-2)$ ist, *so hat eine Curve nter Ordnung im Allgemeinen* $3n(n-2)$ *Wendepuncte.*

Wir werden im Folgenden nur Curven 3ter Ordnung betrachten. Setzen wir demnach $n = 3$, so werden die 9 Wendepuncte einer Curve $u = 0$ dritter Ordnung die 9 Schnittpuncte der beiden Curven dritter Ordnung

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

sein, deren Coordinaten wir durch $\frac{x_1}{z_1} . \frac{y_1}{z_1}$, $\frac{x_2}{z_2} . \frac{y_2}{z_2}$, ... $\frac{x_9}{y_9} . \frac{y_9}{z_9}$ bezeichnen wollen. Wie diese beiden Gleichungen auf symmetrische Weise *algebraisch* aufgelöset werden können, habe ich in der Abhandlung „Über die Elimination der

Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen 3ten Grades mit 2 Variabeln? (*Crelle's* Journal Bd. 28. S. 68 etc.) auseinandergesetzt. Eliminirt man aber aus den beiden Gleichungen eine Variable y, so erhält man eine Gleichung

$$w = 0$$

vom 9ten Grade in Rücksicht auf $\frac{x}{z}$, von welcher ich mit Hülfe des Satzes: *dafs jede gerade Linie, welche eine Curve dritter Ordnung in zwei Wendepuncten schneidet, auch durch einen dritten Wendepunct derselben Curve hindurchgeht,* den *Poncelet* in dem 8ten Bande des *Crelle*schen Journals S. 130 beweiset, nachweisen werde, dafs ihre Wurzeln $\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \ldots \frac{x_9}{z_9}$ die Eigenschaft der Wurzeln der Gleichung (1.) haben.

Zu diesem Ende bezeichne man die Coordinaten eines beliebigen Puncts derjenigen geraden Linie, welche zwei Wendepuncte verbindet, z. B. die beiden ersten, deren Coordinaten $\frac{x_1}{z_1}.\frac{y_1}{z_1}$, $\frac{x_2}{z_2}.\frac{y_2}{z_2}$ sind, mit $\frac{x}{z}.\frac{y}{z}$. Alsdann hat man zur Bestimmung der letzteren die Gleichungen:

$$x = x_1 + \lambda x_2, \quad y = y_1 + \lambda y_2, \quad z = z_1 + \lambda z_2.$$

Denn, theilt man der Gröfse λ nach einander alle möglichen Werthe zu, so geben diese Gleichungen die Coordinaten $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ aller möglichen Puncte auf der geraden Linie, von der Art, dafs jedem Werthe von λ die Coordinaten eines bestimmten Puncts der geraden Linie entsprechen. Die gerade Linie schneidet aber, wie der obige Satz lehrt, die Curve u in einem dritten Wendepuncte. Den diesem Puncte entsprechenden Werth von λ erhält man, wenn man die Werthe von x, y, z aus den obigen drei Gleichungen in die Gleichung $u = 0$ setzt und diese Gleichung nach λ auflöset. Durch die angegebene Substitution geht aber die Gleichung $u = 0$, wenn man nach Potenzen von λ ordnet, in

$$(u)_1 + \lambda\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\} + \lambda^2\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} + \lambda^3(u)_2 = 0$$

über, wo die Indices 1, 2 andeuten, dafs in den Ausdrücken, unter welchen sie stehen, x_1, y_1, z_1 oder x_2, y_2, z_2 statt x, y, z zu setzen sind. Läfst man in dieser Gleichung die verschwindenden Glieder $(u)_1$ und $\lambda^3(u)_2$ weg, dividirt durch λ und löset die Gleichung auf, so erhält man den gesuchten Werth:

$$\lambda = \frac{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1}{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2},$$

welcher dem dritten Wendepuncte entspricht. Wenn man die Coordinaten dieses Puncts durch $\frac{x_3}{z_3}$, $\frac{y_3}{z_3}$ bezeichnet, so erhält man aus den obigen drei Gleichungen durch Substitution des Werths von λ und der diesem Werthe entsprechenden Coordinaten des 3ten Wendepuncts:

$$\frac{x_3}{z_3} = \frac{x_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - x_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}}{z_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - z_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}},$$

$$\frac{y_3}{z_3} = \frac{y_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - y_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}}{z_1\left\{x_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 + y_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2 + z_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right\} - z_2\left\{x_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 + y_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1 + z_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right\}},$$

Diese Gleichungen bleiben ungeändert, wenn man x_1, y_1 und z_1 mit x_2, y_2 und z_2 vertauscht. Sie ändern sich zwar, wenn man x_1, y_1 und z_1 mit x_3, y_3 und z_3 oder x_2, y_2 und z_2 mit x_3, y_3 und z_3 vertauscht, bleiben aber doch richtige Gleichungen. Denn wenn man anstatt von dem ersten und zweiten, von dem zweiten und dritten oder von dem ersten und dritten Wendepuncte ausgegangen wäre, so würde man, da die drei Wendepuncte auf einer und derselben geraden Linie liegen, auf gleiche Weise zu den durch die angegebene Vertauschung geänderten Gleichungen gekommen sein. Bezeichnen wir nun den Theil rechts der ersten Gleichung (welcher sich, wenn man durch $z_1^2.z_2^2$ Zähler und Nenner dividirt, als eine rationale Function der Coordinaten $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$; $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$ der beiden ersten Wendepuncte darstellt, die, wie bemerkt, ungeändert bleibt, wenn man $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$ mit $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$ vertauscht) der Kürze wegen durch $f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right)$, so hat man, mit Rücksicht auf die obigen Bemerkungen folgende drei Relationen:

$$\frac{x_3}{z_3} = f\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right),$$

$$\frac{x_1}{z_1} = f\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}\right),$$

$$\frac{x_2}{z_2} = f\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}, \frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right).$$

Den Theilen rechts dieser Gleichungen kann man noch eine andere Gestalt geben, indem man mit Hülfe der Gleichungen $u=0$, $v=0$, welche für die Wendepuncte zugleich erfüllt werden, die Größen $\frac{y_1}{z_1}$, $\frac{y_2}{z_2}$, $\frac{y_3}{z_3}$ eliminirt. Die

homogenen Functionen u und v vom 3ten Grade gehen, wenn man sie durch z^3 dividirt, in Functionen der Gröfsen $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ von demselben Grade über. Stellt man sich letztere nach Potenzen von $\frac{y}{z}$ geordnet vor und bezeichnet durch $F\left(\frac{y}{z}\right)$ eine beliebige ganze Function 4ter Ordnung von $\frac{y}{z}$, welche weder für $\frac{y}{z}=\frac{y_1}{z_1}$, noch für $\frac{y}{z}=\frac{y_2}{z_2}$, noch für $\frac{y}{z}=\frac{y_3}{z_3}$ verschwindet, so kann man, wie am Anfange unserer Untersuchung, folgende identische Gleichungen aufstellen:

$$A_0F\left(\frac{y}{z}\right)+B_0\cdot\frac{u}{z^3}+C_0\cdot\frac{v}{z^3} = 1,$$

$$A_1F\left(\frac{y}{z}\right)+B_1\cdot\frac{u}{z^3}+C_1\cdot\frac{v}{z^3} = \frac{y}{z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_4F\left(\frac{y}{z}\right)+B_4\cdot\frac{u}{z^3}+C_4\cdot\frac{v}{z^3} = \frac{y^4}{z^4},$$

in welchen die zu bestimmenden Gröfsen A unabhängig von $\frac{y}{z}$ sind, die Gröfsen B und C aber zu bestimmende Functionen ersten Grades in Rücksicht auf $\frac{y}{z}$ bedeuten. Denn setzt man, nachdem man die Gleichungen nach Potenzen von $\frac{y}{z}$ entwickelt hat, die Coëfficienten gleicher Potenzen auf beiden Seiten der Gleichungen einander gleich, so erhält man gerade so viele lineäre Gleichungen, als unbekannte Gröfsen zu bestimmen sind. Bei dieser Bestimmung werden die genannten Gröfsen rationale Functionen von $\frac{x}{z}$. Dividirt man nun die $(k+1)$te Gleichung durch die nächst vorhergehende, so erhält man

$$\frac{y}{z} = \frac{A_k\,F\left(\frac{y}{z}\right)+\;\;B_k\cdot\frac{u}{z^3}+\;\;C_k\cdot\frac{v}{z^3}}{A_{k-1}F\left(\frac{y}{z}\right)+B_{k-1}\cdot\frac{u}{z^3}+C_{k-1}\cdot\frac{v}{z^3}}.$$

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{A_k}{A_{k-1}}$, welcher eine von $\frac{y}{z}$ unabhängige rationale Function von $\frac{x}{z}$ ist, durch $\vartheta\left(\frac{x}{z}\right)$ und setzt in die Gleichung für $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ nach einander die Coordinaten der drei betrachteten Wendepuncte, so erhält man

$$\frac{y_1}{z_1}=\vartheta\left(\frac{x_1}{z_1}\right),\quad \frac{y_2}{z_2}=\vartheta\left(\frac{x_2}{z_2}\right),\quad \frac{y_3}{z_3}=\vartheta\left(\frac{x_3}{z_3}\right).$$

Setzt man diese Werthe in die obigen drei umzugestaltenden Gleichungen und bezeichnet die Function $f\left(\frac{x_1}{z_1}, \vartheta\left(\frac{x_1}{z_1}\right), \frac{x_2}{z_2}, \vartheta\left(\frac{x_2}{z_2}\right)\right)$, in welche der Theil rechts der ersten Gleichung durch die Substitution übergeht und welche eine symmetrische Function der beiden Elemente $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{x_2}{z_2}$ ist, der Kürze wegen durch $\theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right)$, so nehmen die obigen Gleichungen die Gestalt

$$\frac{x_3}{z_3} = \theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right),$$

$$\frac{x_1}{z_1} = \theta\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}\right),$$

$$\frac{x_2}{z_2} = \theta\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{x_1}{z_1}\right)$$

an. Diese Gleichungen beweisen aber, dafs, wenn $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{x_2}{z_2}$ zwei Wurzeln der Gleichung $w = 0$ 9ten Grades sind, welche durch Elimination von y aus den beiden Gleichungen $u = 0$ und $v = 0$ hervorgeht, die symmetrische Function $\theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right)$ der beiden Wurzeln eine dritte Wurzel giebt, in der Art, dafs wenn $\frac{x_3}{z_3} = \theta\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}\right)$, auch $\frac{x_1}{z_1} = \theta\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}\right)$ und $\frac{x_2}{z_2} = \theta\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{x_1}{z_1}\right)$ ist.

Königsberg im October 1846.

10.

Die allgemeinen unendlichen Reihen in der Analysis und ihre Darstellung in geschlossenen Ausdrücken.

(Von Herrn *J. Dienger*, Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.)

Die Analysis soll es ihrem Wesen nach nur mit *continuirlichen* Functionen zu thun haben. Sobald also eine von ihr behandelte Function aufhört continuirlich zu sein, hört auch der Gebrauch dieser Function für die Analysis auf, und fernere, etwa gültige Lehrsätze müssen auf anderem Wege abgeleitet werden. Kein Lehrsatz also, der, wenn die Bedingung auch nur stillschweigend gemacht wurde, die Continuität einer Function voraussetzt, darf auf diejenigen Fälle ausgedehnt werden, wo die Function aufhört, continuirlich zu sein; wenigstens könnte dies nur durch einen besondern, diesem Falle angepafsten Beweis geschehen. Dieses alleinige und ausschliefsliche Anwenden von continuirlichen Functionen liegt in der Natur der Mathematik überhaupt, und der Analysis insbesondere. Es kann daher auch die Frage, ob *divergente* Reihen gebraucht werden dürfen, gar nicht gestellt werden, und wenn sie etwa aufgestellt werden sollte, nur entschieden mit Nein beantwortet werden. Denn divergente Reihen und discontinuirliche Functionen sind gleichbedeutende Ausdrücke; und so wenig die Analysis berechtigt ist, ihre Lehrsätze auch auf den Fall auszudehnen, wo die Functionen aufhören, continuirlich zu sein, ebensowenig dürfen ihre Lehrsätze die Fälle umfassen, wo etwa vorkommende Reihen aufhören *convergent* zu sein.

Es sind daher die Gesetze der Convergenz oder Divergenz unendlicher Reihen ein einzelner Fall der Gesetze der Continuität oder Discontinuität der Functionen überhaupt, und es würden jene unter diesen allgemeinern Gesetzen mitbegriffen sein.

In der vorliegenden Arbeit hat man speciell die in der Analysis gebräuchlichsten, unendlichen Reihen einer Prüfung ihrer Convergenz unterworfen, und dann gesucht, dieselben zu summiren, d. h. in geschlossenen Ausdrücken darzustellen. Es ist diese Aufgabe die umgekehrte der Entwicklung der Functionen in unendliche Reihen, scheint aber klarer und strenger zu sein, zumal in jedem Falle

die Bedingungen, unter welchen das Resultat gültig oder ungültig ist, scharf und bestimmt hervortreten. Man hat dann aus den erhaltenen Resultaten andere herzuleiten gesucht; immer die Bedingungen der Gültigkeit oder Nichtgültigkeit im Auge behaltend.

Von den als bekannt angenommenen Sätzen findet sich bekanntlich eine umfassende Darstellung in *Cauchy's* Differentialrechnung, Vorlesung 11.; so wie auch in *Ohms* „Geist der math. Analysis", obwohl vielleicht manche Resultate noch einfacher herzuleiten wären.

Es sind verwandte Arbeiten benutzt worden; deren aber nicht viele vorhanden sind.

§. 1.

Convergenz oder Divergenz unendlicher Reihen.

1. Eine beliebige Reihe

$$k_0+k_1+\ldots\ldots+k_n+\ldots\ldots$$

möge *convergent* genannt werden, wenn für immer zunehmende Werthe von n die Summe

$$k_0+k_1+\ldots\ldots+k_n$$

sich beständig einer bestimmten, endlichen Grenze nähert: im entgegengesetzten Falle soll sie *divergent* heifsen. Die Grenze, wenn sie besteht, nennt man Grenze der Reihe.

2. Diese Erklärung vorausgesetzt, können folgende Lehrsätze leicht bewiesen werden (S. die Arbeit von *Abel* im 1ten Bande, und von Dr. *Kummer* im 13ten Bande d. J.).

I. Lehrsatz. Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots\ldots$ eine Reihe positiver Gröfsen, und nähert sich $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}$, für stets wachsende Werthe von n, einer Gröfse α, die gröfser ist als 1, so wird die Reihe

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\ldots\ldots+\varepsilon_n\varrho_n+\ldots\ldots,$$

wenn ε_n eine Gröfse ist, die für stets wachsende Werthe von n sich der Null nicht nähert, nothwendig *divergiren*.

II. Lehrsatz. Ist aber im I. Lehrsatze die Gröfse α kleiner als 1, so wird die Reihe

$$\varepsilon_0\varrho_0+\varepsilon_1\varrho_1+\varepsilon_2\varrho_2+\ldots\ldots+\varepsilon_n\varrho_n+\ldots\ldots,$$

wenn $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots\ldots \varepsilon_n, \ldots\ldots$ die Einheit nicht übersteigen, nothwendig *convergiren*.

III. Lehrsatz. Wenn v_n das allgemeine Glied einer Reihe ist, in welcher, von einem gewissen Gliede an, alle folgenden positive Verzeichen haben, und man eine Function m_n, deren Werthe positiv sind, finden kann, von der Art, dafs $m_n v_n$ Null wird für $n = \infty$ und dafs

$$\frac{m_n v_n}{v_{n+1}} - m_{n+1}$$

gröfser als Null ist für den nämlichen Werth von n, so ist die Reihe *convergent*.

Ist dagegen $\frac{m_n v_n}{v_{n+1}} - m_{n+1}$ gleich Null für $n = \infty$, so setze man

$$f(n) = \frac{m_n v_n}{v_{n+1}} - m_{n+1}, \quad \varphi(n) = \frac{m_n v_n}{f(n)}$$

und es ist zu diesem Lehrsatze noch Folgendes hinzuzufügen:

Ist für $n = \infty$, $f(n)$ Null und $\varphi(n)$ nicht Null, so ist die vorgelegte Reihe *divergent*.

IV. Lehrsatz. Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho'_0, \varrho'_1, \varrho'_2, \ldots$ die Zahlenwerthe der Glieder zweier convergenter Reihen

$$v_0 + v_1 + \ldots = p, \qquad v'_0 + v'_1 + \ldots = p'$$

und sind die Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \ldots, \qquad \varrho'_0 + \varrho'_1 + \ldots$$

ebenfalls convergent, so wird auch die Reihe

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_n + \ldots,$$

deren allgemeines Glied

$$r_n = v_0 v'_n + v_1 v'_{n-1} + \ldots + v_n v'_0$$

ist, *convergent* und ihre Summe gleich

$$(v_0 + v_1 + \ldots)(v'_0 + v'_1 + \ldots)$$

sein. Sind also die Reihen

$$t_0 + t_1 + t_2 + \ldots$$
$$t'_0 + t'_1 + t'_2 + \ldots$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t'_1 t_0) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \ldots$$

convergent, so ist

$$(t_0 + t_1 + t_2 + \ldots)(t'_0 + t'_1 + t'_2 + \ldots) = t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \ldots$$

§. 2.

Bezeichnet man den Ausdruck

$$1. \quad 1 + a\frac{x}{1} + a(a+k)\frac{x^2}{2!} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

insofern er *convergent* (continuirlich) ist, durch $F(a)$, was auch a, k, x sein mögen, so wird man den Ausdruck

$$2.\quad 1+b\frac{x}{1}+b(b+k)\frac{x^2}{2!}+b(b+k)(b+2k)\frac{x^3}{3!}+\dots$$

ebenfalls, insofern er continuirlich (convergent) ist, durch $F(b)$ zu bezeichnen haben. Es fragt sich nun, welche Form das Product $F(a)\cdot F(b)$ haben werde.

Multiplicirt man die beiden Reihen (1.) und (2.) wirklich, so findet man eine Reihe, die sich auf folgende Weise darstellen läfst:

$$3.\quad 1+A_1x+A_2\frac{x^2}{2!}+A_3\frac{x^3}{3!}+\dots+A_n\frac{x^n}{n!},$$

und es ergiebt sich, dafs

$$\begin{aligned} A_1 &= a+b, \\ A_2 &= (a+b)(a+b+k), \\ A_3 &= (a+b)(a+b+k)(a+b+2k). \end{aligned}$$

Es findet also zwischen A_1, A_2, A_3 folgender Zusammenhang Statt:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1(a+b+k), \\ A_3 &= A_2(a+b+2k). \end{aligned}$$

Sollte dies allgemein gelten, so müfste

$$A_n = A_{n-1}(a+b+(n-1)k)$$

sein. Nun ist

$$\begin{aligned} A_{n-1} = {} & a(a+k)(a+2k)\cdots(a+(n-2)k) \\ & +(n-1)b\cdot a(a+k)\cdots(a+(n-3)k) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & +\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-r}{r}\cdot b(b+k)\cdots(b+(r-1)k)\,a(a+k)\cdots(a+(n-r-2)k) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & +b(b+k)\cdots(b+(n-2)k) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A_n = {} & a(a+k)\cdots(a+(n-1)k) \\ & +nb\cdot a(a+k)\cdots(a+(n-2)k) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & +\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r}{r+1}\cdot b(b+k)\cdots(b+rk)\,a(a+k)\cdots(a+(n-r-2)k) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & +b(b+k)\dots(b+(n-1)k), \end{aligned}$$

und bezeichnet man

$$a(a+k)\cdots(a+rk)$$

durch $\varphi(a,r)$, so ist, wie leicht zu sehen,

$$A_{n-1}(a+b+(n-1)k) =$$
$$\varphi(a,n-1)+b\varphi(a,n-2)$$
$$+(n-1)b\varphi(a,n-1)+(n-1)\varphi(b,1)\cdot\varphi(a,n-3)$$
$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\varphi(b,1)\varphi(a,n-3)+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\varphi(b,2)\cdot\varphi(a,n-4)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-r}{r}\cdot\varphi(b,r-1)\varphi(a,n-r-1)$$
$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-r}{r}\cdot\varphi(b,r)\varphi(a,n-r-2)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+\varphi(b,n-1).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man erwägt, dafs

$$n-1+1 = n,$$
$$\frac{n-1}{1}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2},$$
$$\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}$$

u. s. f., wirklich

$$A_{n-1}(a+b+(n-1)k) = A_n.$$

Also: wenn die Reihe

$$1+(a+b)\frac{x}{1}+(a+b)(a+b+k)\frac{x^2}{2!}+(a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{x^3}{3!}+\ldots.$$

convergent ist, in welchem Falle sie durch $F(a+b)$ dargestellt wird, so ist

$$4. \quad F(a)\cdot F(b) = F(a+b).$$

Da, unter der beständigen Voraussetzung, die angewandten und die gefundenen Reihen seien convergent (§. 1. Lehrsatz IV.),

$$F(a)\cdot F(b) = F(a+b)$$

ist, so ist offenbar

$$F(a)\cdot F(b+c) = F(a+b+c) = F(a)\cdot F(b)\cdot F(c),$$

und allgemein

$$F(a)\cdot F(b)\cdot F(c)\ldots. = F(a+b+c+\ldots.).$$

Setzt man $a=b=c\ldots.$, und ist die Anzahl dieser Gröfsen m, so erhält man

$$[F(a)]^m = F(ma),$$

wenn m eine ganze, positive Zahl ist.

Aus

$$F(a)\cdot F(b) = F(a+b)$$

folgt

$$F(b) = \frac{F(a+b)}{F(a)},$$

und, wenn man $b-a$ statt b setzt,

$$F(b-a) = \frac{F(b)}{F(a)}.$$

Aus $(F(a))^m = F(ma)$ erhält man

$$F(a) = \sqrt[m]{(F(ma))},$$

und, wenn man $\frac{b}{m}$ statt a setzt,

$$F\left(\frac{b}{m}\right) = \sqrt[m]{(F(b))} = (F(b))^{\frac{1}{m}}.$$

Hieraus, mit dem Obigen verbunden, ergiebt sich:

$$\left(F\left(\frac{b}{m}\right)\right)^n = F\left(\frac{nb}{m}\right) = (F(b))^{\frac{n}{m}}.$$

Offenbar ist $F(0) = 1$, also

$$(F(a))^{-\frac{m}{r}} = \frac{1}{(F(a))^{\frac{m}{r}}} = \frac{F(0)}{(F(a))^{\frac{m}{r}}} = \frac{F(0)}{F\left(\frac{ma}{r}\right)} = F\left(0-\frac{ma}{r}\right) = F\left(\frac{-ma}{r}\right).$$

Ist also m eine reelle Zahl, so ist

$$5. \quad (F(a))^m = F(ma);$$

vorausgesetzt, dafs $F(a)$, $F(ma)$ *convergente* Reihen seien.

Setzt man $a=1$, $k=-1$, so giebt die Gleichung (5.):

$$6. \quad (1+x)^m = 1+mx+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\ldots,$$

vorausgesetzt, dafs die Reihe rechts convergent sei.

§. 3.

Bekanntlich läfst sich allgemein setzen:

$$\alpha+\beta i = r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

wo $i = +\sqrt{-1}$ und

$$r = +\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}, \quad \cos\varphi = \frac{\alpha}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{r}$$

ist. Die Gröfse φ werden wir in Bogentheilen (für den Radius 1) ausdrücken.

Ebenso hat man für ein ganzes positives n:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi+i\sin n\varphi,$$
$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n} = \cos n\varphi-i\sin n\varphi.$$

Ist also

$$x = \alpha+\beta i = r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

so ist

$$x^n = (\alpha+\beta i)^n = r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

§. 4.

Wir wollen nun zuerst die Reihe

$$1.\quad 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots.$$

für $x=\alpha+\beta i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ betrachten.

Setzt man diesen Werth von x, so giebt die Reihe (1.)

$$2.\quad 1+r\cos\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos3\varphi+\dots.$$
$$+i\left[r\sin\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin2\varphi+\frac{r^3}{3!}\sin3\varphi+\dots.\right].$$

Untersuchen wir zuerst diese Reihe in Bezug auf ihre Convergenz oder Divergenz, so ist klar, dafs sie *convergent* oder *divergent* sein wird, je nachdem die Reihen

$$1+r\cos\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi+\dots.,$$
$$r\sin\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin2\varphi+\dots.$$

entweder beide *convergent*, oder beide (oder auch nur eine) *divergent* sind. Da $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$ sich der Null nicht nähern, die Einheit aber auch nicht übersteigen, so sind die beiden Reihen convergent und divergent, zugleich mit der Reihe

$$1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r_3}{3!}+\dots.$$

(§. 1. Lehrsatz I. II.). Für diese letztere Reihe ist aber ϱ_n in §. 1. $=\frac{r^n}{n!}$ also $\frac{\varrho_{n+1}}{\varrho_n}=\frac{r}{n+1}$, welche Gröfse für ein grofses n immer kleiner als 1 ist, wenn r nur irgend einen endlichen Werth erlangt. Die Reihe (2.) ist also *convergent*, und hat mithin eine *Summe;* welches auch der (endliche und bestimmte) Werth von r und φ sei. Setzt man

$$1+r\cos\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos3\varphi+\dots.=P,$$
$$r\sin\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin2\varphi+\frac{r^3}{3!}\sin3\varphi+\dots.=Q,$$

so ist die Summe der Reihe (1.) gleich

$$P+Qi$$

und es wird sich blofs um die Bestimmung der Gröfsen P und Q handeln.

Die vorgelegte Reihe (1.) hat aber die Form der Reihe (1. §. 2.), und sie entsteht aus ihr, wenn man $k=0$, $x=1$, $a=x$ setzt: die vorliegende Reihe hat also auch die durch die Gleichung (4. §. 2.) ausgedrückte characteristische Eigenschaft.

Setzt man
$$P+Qi = R(\cos S+i\sin S),$$
so wird man offenbar setzen dürfen:
$$R = \varphi(\alpha,\beta), \qquad S = \psi(\alpha,\beta).$$
Die Reihe (1.) ist demnach
$$= \varphi(\alpha,\beta)[\cos\psi(\alpha,\beta)+i\sin\psi(\alpha,\beta)].$$
Setzt man in der Reihe (1.) $x=\alpha'+\beta' i$, so ist jene Reihe
$$= \varphi(\alpha',\beta')[\cos\psi(\alpha',\beta')+i\sin\psi(\alpha',\beta')].$$
Das Product der beiden gefundenen Reihen läfst sich nach der Gleichung (4. §. 2.) durch
$$\varphi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')[\cos\psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')+i\sin\psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')]$$
ausdrücken und man erhält also

$$3.\quad \varphi(\alpha,\beta)\cdot(\alpha',\beta')[\cos(\psi(\alpha,\beta)+\psi(\alpha',\beta'))+i\sin(\psi(\alpha,\beta)+\psi(\alpha',\beta')] \\ = \varphi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')[\cos\psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')+i\sin\psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')],$$
weil die Reihe (1.) immer convergent ist.

Aus dieser Gleichung (3.) ergeben sich bekanntlich folgende beiden:
$$4.\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')\cos\psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta') = \varphi(\alpha,\beta)\cdot\varphi(\alpha',\beta')\cos[\psi(\alpha,\beta)+\psi(\alpha',\beta')], \\ \varphi(\alpha+\alpha',\beta+\beta')\sin\psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta') = \varphi(\alpha,\beta)\cdot\varphi(\alpha',\beta')\sin[\psi(\alpha,\beta)+\psi(\alpha',\beta')]. \end{cases}$$
Quadrirt man diese beiden Gleichungen, addirt, und bemerkt, dafs die durch φ angedeuteten Functionen immer positiv sind, so erhält man
$$5.\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\alpha',\beta+\beta') = \varphi(\alpha,\beta)\varphi(\alpha',\beta'), \\ \psi(\alpha+\alpha',\beta+\beta') = 2m\pi+\psi(\alpha,\beta)+\psi(\alpha',\beta'), \end{cases}$$
wenn m eine ganze Zahl ist. Diese Gleichungen (5.) sind zwei Bedingungsgleichungen, aus welchen die Gröfsen φ und ψ zu bestimmen sind.

Um dazu zu gelangen, kann man wie folgt verfahren:

Man nehme an, es sei eine Function $\psi(x)$ dergestalt zu bestimmen, dafs
$$6.\quad \psi(x+y) = 2m\pi+\psi(x)+\psi(y).$$
Setzt man hier nach einander $y=x, 2x, \ldots nx$ und substituirt die jeweils gefundenen Werthe, so erhält man:
$$7.\quad \psi(nx) = n\psi(x)+(n-1)2m\pi.$$
Setzt man in dieser Gleichung $x=\frac{z}{n}$, so erhält man
$$8.\quad \begin{cases} \psi(z) = n\psi\left(\frac{z}{n}\right)+(n-1)2m\pi, \\ \psi\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{1}{n}\psi(z)+\left(\frac{1}{n}-1\right)2m\pi. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit (7.), folgt:

$$9.\quad \psi\left(\frac{nx}{r}\right) = n\psi\left(\frac{x}{r}\right)+(n-1)2m\pi$$
$$= \frac{n}{r}\psi(x)+n\left(\frac{1}{r}-1\right)2m\pi+(n-1)2m\pi$$
$$= \frac{n}{r}\psi(x)+\left(\frac{n}{r}-1\right)2m\pi.$$

Für $x=0$ folgt aus (7.)

$$\psi(0) = -2m\pi.$$

Setzt man also in (6.) $y=-x$, so findet sich

$$\psi(-x) = -\psi(x)-4m\pi,$$

und daraus

$$\psi\left(-\frac{nx}{r}\right) = -\psi\left(\frac{nx}{r}\right)-4m\pi$$
$$= -\frac{n}{r}\cdot\psi(x)+\left(-\frac{n}{r}-1\right)2m\pi.$$

Was also auch n sei, so ist

$$\psi(nx) = n\psi(x)+(n-1)2m\pi.$$

Man setze nun $x=a$, $n=z$, so erhält man

$$\psi(az) = (z-1)2m\pi+z\psi(a).$$

Aber nach (7.) ist

$$\psi(az) = (a-1)2m\pi+a\psi(z);$$

subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\frac{z}{2m\pi+\psi(z)} = \frac{a}{2m\pi+\psi(a)} = \frac{1}{k};$$

weil $\frac{a}{2m\pi+\psi(a)}$ eine bestimmte Gröfse ist. Also erhält man

$$\psi(x) = kx-2m\pi;$$

wo k eine bestimmte, unveränderliche Gröfse bezeichnet.

Die zweite Gleichung (5.) giebt für $\beta=\beta'=0$:

$$\psi(\alpha+\alpha',0) = \psi(\alpha,0)+\psi(\alpha',0)+2m\pi:$$

eine Gleichung, die von der Form (6.) ist und aus welcher demnach

$$\psi(\alpha,0) = k\alpha-2m\pi$$

folgt. Desgleichen findet sich

$$\psi(0,\beta) = k'\beta-2m\pi.$$

Setzt man $\alpha=0$, $\beta'=0$, so erhält man

$$\psi(\alpha',\beta) = 2m\pi+\psi(0,\beta)+\psi(\alpha',0)$$
$$= 2m\pi+k'\beta-2m\pi+k\alpha'-2m\pi$$
$$= k\alpha'+k'\beta-2m\pi,$$

also

$$10.\quad \psi(\alpha,\beta) = k\alpha + k'\beta - 2m\pi;$$

wo k und k' zwei bestimmte unveränderliche Zahlen sind.

Was $\varphi(\alpha,\beta)$ betrifft, so ist diese Gröfse immer positiv; also wird man setzen können:

$$\varphi(\alpha,\beta) = e^{F(\alpha,\beta)}.$$

Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung (5.), und nimmt die Logarithmen, so erhält man

$$F(\alpha+\alpha',\beta+\beta') = F(\alpha,\beta) + F(\alpha',\beta'):$$

eine Gleichung, aus welcher wie oben

$$11.\quad F(\alpha,\beta) = h\alpha + h'\beta$$

folgt; wo h und h' bestimmte, unveränderliche Zahlen sind.

Demnach ist

$$12.\quad \begin{cases} P+Qi = e^{h\alpha+h'\beta}[\cos(k\alpha+k'\beta)+i\sin(k\alpha+k'\beta)], \\ \quad\;\; P = e^{h\alpha+h'\beta}\cos(k\alpha+k'\beta), \\ \quad\;\; Q = e^{h\alpha+h'\beta}\sin(k\alpha+k'\beta); \end{cases}$$

wo also blofs h, h', k, k' für beliebige Werthe von r und φ oder α und β zu bestimmen sind, indem sie für alle solche Werthe sich nicht verändern.

Setzt man aber $\beta=0$, so ist $r=+\sqrt{\alpha^2}$, $\cos\varphi=\frac{\alpha}{r}=\pm 1$, je nachdem α positiv oder negativ ist, und $\sin\varphi=0$, $\varphi=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$, je nachdem α positiv oder negativ ist. Also ergiebt sich dann

$$P = 1 \pm r + \frac{r^2}{2!} \pm \frac{r^3}{3!} + \dots$$
$$= 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

Aber die Reihe (1. §. 2.) wird für $a=1$, $k=0$ und $x=\alpha$ zu

$$1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\dots$$

Setzt man in der Formel (5. §. 2.) $m=\frac{1}{\alpha}$, $a=\alpha$, $k=0$ und $x=1$, so findet sich:

$$\left(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\dots\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

Da nun die Reihe

$$1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\dots$$

immer convergent ist, so hat auch

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots.$$

einen bestimmten Werth ($e=2,7182818\ldots.$); demnach ist

$$1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\ldots.=e^\alpha,$$

indem bekanntlich die Grundzahl der natürlichen Logarithmen durch diese Formel ausgedrückt wird.

Also ist für $\beta=0$:

$$P=e^\alpha.$$

Aber aus (12.) folgt, für $\beta=0$:

$$P=e^{h\alpha}\cos(k\alpha),$$

mithin ist

$$e^{h\alpha}\cos k\alpha=e^\alpha,$$

und demnach

$$13.\qquad h=1,\quad k=0.$$

Hieraus ergiebt sich nun, in Verbindung mit (12.) und den frühern Werthen von P und Q:

$$e^{\alpha+h'\beta}\cos k'\beta=1+r\cos\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos 2\varphi+\ldots.$$

$$e^{\alpha+h'\beta}\sin k'\beta=\qquad r\sin\alpha+\frac{r^2}{2!}\sin 2\alpha+\ldots.$$

Für $\alpha=0$ folgt leicht, wie oben:

$$e^{h'\beta}\cos k'\beta=1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^6}{6!}+\ldots.,$$

$$e^{h'\beta}\sin k'\beta=\beta-\frac{\beta^3}{3!}+\frac{\beta^5}{5!}-\ldots.,$$

und hieraus:

$$e^{h'\beta}(\cos k'\beta+i\sin k'\beta)=1+\beta i+\frac{(\beta i)^2}{2!}+\frac{(\beta i)^3}{3!}+\ldots.,$$

$$e^{h'\beta}(\cos k'\beta-i\sin k'\beta)=1-\beta i+\frac{(\beta i)^2}{2!}-\frac{(\beta i)^3}{3!}-\ldots.$$

Aber die beiden Reihen rechts haben die Form der Reihe (1. §. 2.), wenn man $x=1$, $k=0$, $\alpha=\pm\beta i$ setzt; ihr Product ist also $F(\beta i)\cdot F(-\beta i)$ $=F(\beta i-\beta i)=F(0)=1$. Dies Product ist aber $e^{2h'\beta}$, also ist

$$e^{2h'\beta}=1,\quad h'=0,$$

folglich

$$\cos k'\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \dots,$$

$$\sin k'\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \dots$$

Nun nähert sich bekanntlich $\frac{\sin k'\beta}{k'\beta}$ für ein abnehmendes β der Einheit; aber es ist

$$\frac{\sin k'\beta}{k'\beta} = \frac{1}{k'}\left(1 - \frac{\beta^2}{3!} + \frac{\beta^4}{5!} - \dots\right),$$

welche Gröfse sich der Einheit nähert, wenn

$$k' = 1;$$

mithin ist, nebenbei bemerkt, für jedes reelle β:

$$14. \quad \begin{cases} \cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} - \dots, \\ \sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \dots \end{cases}$$

Die Gleichungen (12.) geben also:

$$P = e^\alpha \cos\beta, \qquad Q = e^\alpha \sin\beta,$$

und die Summe der vorgelegten Reihe ist

$$e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Setzt man, nach der Analogie wie

$$1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots = e^\alpha,$$

auch

$$1 + (\alpha + \beta i) + \frac{(\alpha+\beta i)^2}{2!} + \dots = e^{\alpha+\beta i},$$

so ist

$$e^{\alpha+\beta i} = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Zugleich ist, da $r = +\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$, $r\cos\varphi = \alpha$, $r\sin\varphi = \beta$, $P = e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)$, $Q = e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)$, wenn man die früher angegebenen Werthe von P und Q berücksichtigt:

$$15. \quad \begin{cases} 1 + r\cos\varphi + \frac{r^2}{2!}\cos 2\varphi + \dots\dots = e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi), \\ r\sin\varphi + \frac{r^2}{2!}\sin 2\varphi + \dots\dots = e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi). \end{cases}$$

Diese beiden Reihen gelten, was auch immer die Werthe von r und φ sein mögen.

§. 5.

Solchergestalt gefundene Reihen lassen mannigfache Umbildungen zu. Zuerst wollen wir in den Reihen (15. §. 4.) $\pi-\varphi$ statt φ setzen. Dies giebt, allgemein gültig:

$$1.\quad\begin{cases}1-r\cos\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi-\frac{r^3}{3!}\cos3\varphi+\ldots\ldots=e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi),\\ r\sin\varphi-\frac{r^2}{2!}\sin2\varphi+\frac{r^3}{3!}\sin3\varphi-\ldots\ldots=e^{-r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi).\end{cases}$$

Addirt man diese Gleichungen und diejenigen (15. §. 4.), so findet sich

$$2.\quad\begin{cases}1+\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi+\frac{r^4}{4!}\cos4\varphi+\ldots\ldots=\frac{1}{2}(e^{r\cos\varphi}+e^{-r\cos\varphi})\cos(r\sin\varphi),\\ r\sin\varphi+\frac{r^3}{3!}\sin3\varphi+\ldots\ldots=\frac{1}{2}(e^{r\cos\varphi}+e^{-r\cos\varphi})\sin(r\sin\varphi);\end{cases}$$

desgleichen durch Subtraction:

$$3.\quad\begin{cases}r\cos\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos3\varphi+\frac{r^5}{5!}\cos5\varphi+\ldots\ldots=\frac{1}{2}(e^{r\cos\varphi}-e^{-r\cos\varphi})\cos(r\sin\varphi),\\ \frac{r^2}{2!}\sin2\varphi+\frac{r^4}{4!}\sin4\varphi+\ldots\ldots=\frac{1}{2}(e^{r\cos\varphi}-e^{-r\cos\varphi})\sin(r\sin\varphi).\end{cases}$$

Ähnliche Reihen findet man, wenn man $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ setzt; nur ist ihr Fortschreitungsgesetz nicht mehr so einfach. Diese Reihen sind:

$$4.\quad\begin{cases}1+r\sin\varphi-\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi-\frac{r^3}{3!}\sin3\varphi+\frac{r^4}{4!}\cos4\varphi+\ldots\ldots=e^{r\sin\varphi}\cos(r\cos\varphi),\\ r\cos\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin2\varphi-\frac{r^3}{3!}\cos3\varphi-\frac{r^4}{4!}\sin4\varphi+\ldots\ldots=e^{r\sin\varphi}\sin(r\cos\varphi).\end{cases}$$

Diese einfachen Umbildungen sind aber nicht die einzigen, welche abgeleitet werden können. Eine ganze Reihe von Formeln kann durch Differenziirung und Integrirung gefunden werden. Es ist nämlich das Differenzial oder Integral einer Reihe dem Differenzial oder Integral des sie darstellenden geschlossenen Ausdrucks gleich, wenn die neue Reihe *convergent* ist.

Man kann nun nach r oder φ differenziiren oder integriren, und es ist dadurch der Bildung neuer Formeln ein weites Feld geöffnet. Betrachten wir in dieser Beziehung zuerst die erste der Gleichungen (15. §. 4.). Differenziirt man nach r, so giebt die erste Seite:

$$\cos\varphi+r\cos2\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos3\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos4\varphi+\ldots\ldots;$$

welche Reihe immer convergent ist. Überhaupt ist klar, dafs alle Differenzialquotienten dieser Reihe convergent sein werden. Der Differenzialquotient

von der Ordnung k ist

$$\cos k\varphi + r\cos(k+1)\varphi + \frac{r^2}{2!}\cos(k+2)\varphi + \frac{r^3}{3!}\cos(k+3)\varphi + \ldots.$$

Der Differenzialquotient von der nämlichen Ordnung für die zweite Seite ist für $y = p\cdot q$, wenn p und q zwei Functionen der Veränderlichen r sind:

$$\frac{d^k y}{dr^k} = p\cdot\frac{d^k q}{dr^k} + k\cdot\frac{dp}{dr}\cdot\frac{d^{k-1}q}{dr^{k-1}} + \frac{k\cdot k-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2 p}{dr^2}\cdot\frac{d^{k-2}q}{dr^{k-2}} + \ldots + \frac{d^k p}{dr^k}\cdot q.$$

Setzt man $p = e^{r\cos\varphi}$, $q = \cos(r\sin\varphi)$, so ist

$$\frac{d^k p}{dr^k} = \cos^k\varphi\, e^{r\cos\varphi}, \qquad \frac{d^k q}{dr^k} = \sin^k\varphi\cdot\cos(\tfrac{1}{2}k\pi + r\sin\varphi);$$

demnach ist

$$\frac{d^k e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{dr^k}$$

$$= e^{r\cos\varphi}\sin^k\varphi\cdot\cos(\tfrac{1}{2}k\pi + r\sin\varphi) + k\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\, e^{r\cos\varphi}\cos(\tfrac{1}{2}(k-1)\pi + r\sin\varphi) + \ldots$$
$$= e^{r\cos\varphi}[\cos^k\varphi\cdot\cos(r\sin\varphi) - k\cos^{k-1}\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\sin(r\sin\varphi - \ldots].$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-v+1)}{1\cdot 2\cdots v}\cdot e^{r\cos\varphi}\cdot\cos^v\varphi\cdot\sin^{k-v}\varphi\cdot\cos(\tfrac{1}{2}(k-v)\pi + r\sin\varphi),$$

wenn man $\frac{k(k-1)\cdots(k-v+1)}{1\cdot 2\cdots v}$ für $v=0$ der Einheit gleichsetzt. Es ist demnach

$$\frac{d^k e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{dr^k}$$

$$= \sum_{v=0}^{v=k}\frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-v+1)}{v!}\cdot e^{r\cos\varphi}\cos^v\varphi\cdot\sin^{k-v}\varphi\cdot\cos[\tfrac{1}{2}(k-v)\pi + r\sin\varphi]$$

und folglich

$$5. \quad \cos k\varphi + r\cos(k+1)\varphi + \frac{r^2}{2!}\cos(k+2)\varphi + \frac{r^3}{3!}\cos(k+3)\varphi + \ldots$$
$$= \sum_{v=0}^{v=k}\frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-v+1)}{v!}\cdot e^{r\cos\varphi}\cos^v\varphi\cdot\sin^{k-v}\varphi\cdot\cos[\tfrac{1}{2}(k-v)\pi + r\sin\varphi]$$
$$= \frac{d^k\cdot e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{dr^k};$$

was auch k, φ, r sein mögen.

Aus der zweiten Reihe (15. §. 4.) erhält man ganz eben so:

$$6. \quad \sin k\varphi + r\sin(k+1)\varphi + \frac{r^2}{2!}\sin(k+2)\varphi + \frac{r^3}{3!}\sin(k+3)\varphi + \ldots$$
$$= \sum_{v=0}^{v=k}\frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-v+1)}{v!}e^{r\cos\varphi}\cos^v\varphi\cdot\sin^{k-v}\varphi\cdot\sin[\tfrac{1}{2}(k-v)\pi + r\sin\varphi]$$
$$= \frac{d^k e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)}{dr^k}.$$

Setzt man in diesen beiden letzten Reihen $\pi-\varphi$ statt φ, und bemerkt, dafs $\sin(k\pi-k\varphi)=(-1)^{k+1}\sin k\varphi$, $\cos(k\pi-k\varphi)=(-1)^k\cos k\varphi$, so findet sich

$$7.\quad \cos k\varphi - r\cos(k+1)\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos(k+2)\varphi-\frac{r^3}{3!}\cos(k+3)\varphi+\dots$$

$$=\sum_{v=0}^{v=k}\frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-v+1)}{v!}\cdot e^{-r\cos\varphi}\cos^v\varphi\cdot\sin^{k-v}\varphi\cdot\cos[\tfrac{1}{2}(k-v)\pi+r\sin\varphi]\cdot(-1)^{k+v}$$

$$=(-1)^k\frac{d^k e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)}{dr^k}\quad\text{und}$$

$$8.\quad \sin k\varphi - r\sin(k+1)\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin(k+2)\varphi+\frac{r^3}{3!}\sin(k+3)\varphi-\dots$$

$$=\sum_{v=0}^{v=k}\frac{k\cdot(k-1)\cdots(k-v+1)}{v!}\cdot e^{-r\cos\varphi}\cos^v\varphi\cdot\sin^{k-v}\varphi\cdot\sin[\tfrac{1}{2}(k-v)\pi+r\cdot\sin\varphi](-1)^{k+1+v}$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{d^k e^{-r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)}{dr^k}.$$

Durch Addition der Gleichungen (5. und 7. und 6. und 8.) erhält man

$$9.\quad \cos k\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos(k+2)\varphi+\frac{r^4}{4!}\cos(k+4)\varphi+\dots$$

$$=\frac{\tfrac{1}{2}d^k[(e^{r\cos\varphi}+(-1)^k e^{-r\cos\varphi})\cos(r\sin\varphi)]}{dr^k}\quad\text{und}$$

$$10.\quad \sin k\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin(k+2)\varphi+\frac{r^4}{4!}\sin(k+4)\varphi+\dots$$

$$=\frac{\tfrac{1}{2}d^k[(e^{r\cos\varphi}+(-1)^{k+1}e^{-r\cos\varphi})\sin(r\sin\varphi)]}{dr^k}.$$

§. 6.

Eine Reihe von Formeln erhält man, wenn man nach φ differenziirt. Da sich aber die Differenzialquotienten der zweiten Seiten nicht so einfach ausdrücken lassen, so wollen wir blofs eine einzige Formel ableiten. Differenziirt man die Formeln (15.) einmal, so ergiebt sich

$$r\sin\varphi+r^2\sin2\varphi+\frac{r^3}{2!}\sin3\varphi+\frac{r^4}{3!}\sin4\varphi+\dots$$
$$=e^{r\cos\varphi}r[\sin\varphi\cdot\cos(r\sin\varphi)+\cos\varphi\cdot\sin(r\sin\varphi)]$$
$$=re^{r\cos\varphi}\sin(\varphi+r\sin\varphi)$$

oder

$$1.\quad \sin\varphi+r\sin2\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin3\varphi+\dots=e^{r\cos\varphi}\sin(\varphi+r\sin\varphi);$$

$$r\cos\varphi+r^2\cos2\varphi+\frac{r^3}{2!}\cos3\varphi+\frac{r^4}{3!}\cos4\varphi+\dots$$
$$=e^{r\cos\varphi}r(\cos(r\sin\varphi)\cos\varphi-\sin(r\sin\varphi)\sin\varphi)=re^{r\cos\varphi}\cos(\varphi+r\sin\varphi),$$

also

2. $$\cos\varphi+r\cos 2\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos 3\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos 4\varphi+\dots = e^{r\cos\varphi}\cos(\varphi+r\sin\varphi).$$

Setzt man in diesen letzten Reihen $\pi-\varphi$ statt φ, so erhält man:

3. $$\begin{cases}\sin\varphi-r\sin 2\varphi+\frac{r^2}{2!}\sin 3\varphi-\frac{r^3}{3!}\sin 4\varphi+\dots = +e^{-r\cos\varphi}\sin(\pi-\varphi+r\sin\varphi)\\ \qquad = -e^{-r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi-\varphi),\\ \cos\varphi-r\cos 2\varphi+\frac{r^2}{2!}\cos 3\varphi-\frac{r^3}{3!}\cos 4\varphi+\dots = -e^{-r\cos\varphi}\cos(\pi-\varphi+r\sin\varphi)\\ \qquad = +e^{-r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi-\varphi).\end{cases}$$

§. 7.

Da

$$\int e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)\,dr = \frac{\cos\varphi\cdot\cos(r\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot\sin(r\sin\varphi)}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\cdot e^{r\cos\varphi}$$
$$= \cos(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi},$$

so ist, wenn man die erste Gleichung (15.) nach r integrirt:

$$r+\frac{r^2}{2!}\cos\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos 2\varphi+\dots+\text{Const.} = \cos(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi}.$$

Für $\varphi=0$ findet man

$$r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\dots+C = e^r,$$

also $C=1$ und mithin

1. $$1+r+\frac{r^2}{2!}\cos\varphi+\frac{r^3}{3!}\cos 2\varphi+\dots = \cos(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi}.$$

Diese Gleichung läfst wieder Integrationen zu, allein das Gesetz des Fortschreitens ist nicht einfach. Es folgt zugleich, dafs die Gröfse

$$\cos(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi}-1$$

sich durch r theilen lasse und dafs

$$\frac{\cos(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi}-1}{r}$$

gleich 1 sei für $r=0$.

Eben so hat man

$$\int e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)\,dr = \frac{\cos\varphi\cdot\sin(r\sin\varphi)-\sin\varphi\cdot\cos(r\sin\varphi)}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\cdot e^{r\cos\varphi}$$
$$= \sin(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi},$$

also

$$C+\frac{r^2}{2!}\sin\varphi+\frac{r^3}{3!}\sin 2\varphi+\frac{r^4}{3!}\sin 3\varphi+\dots = \sin(r\sin\varphi-\varphi)e^{r\cos\varphi}.$$

Für $\varphi = 0$ ist ebenfalls $C = 0$, also

$$2.\quad \frac{r^2}{2!}\sin\varphi + \frac{r^3}{3!}\sin 2\varphi + \frac{r^4}{4!}\sin 3\varphi + \dots = \sin(r\sin\varphi - \varphi)\, e^{r\cos\varphi}.$$

Daraus folgt, dafs sich

$$\sin(r\sin\varphi - \varphi)\, e^{r\cos\varphi}$$

durch r^2 theilen lasse und dafs der Quotient $= \frac{1}{2}\sin\varphi$ sei für $r = 0$.

§. 8.

Neue Formeln ergeben sich, wenn man den Gröfsen r und φ in den vorigen Paragraphen besondere Werthe beilegt. Es sei $r = +1$. Dann erhält man

$$1 + \cos\varphi + \frac{1}{2!}\cos 2\varphi + \frac{1}{3!}\cos 3\varphi + \dots = +e^{+\cos\varphi}\cos(\sin\varphi),$$

$$+\sin\varphi + \frac{1}{2!}\sin 2\varphi + \frac{1}{3!}\sin 3\varphi + \dots = +e^{+\cos\varphi}\sin(\sin\varphi),$$

$$1 - \cos\varphi + \frac{1}{2!}\cos 2\varphi - \frac{1}{3!}\cos 3\varphi + \dots = +e^{-\cos\varphi}\cos(\sin\varphi),$$

$$+\sin\varphi - \frac{1}{2!}\sin 2\varphi + \frac{1}{3!}\sin 3\varphi - \dots = +e^{-\cos\varphi}\sin(\sin\varphi),$$

$$1 + \frac{1}{2!}\cos 2\varphi + \frac{1}{4!}\cos 4\varphi + \dots = \tfrac{1}{2}(e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi})\cos(\sin\varphi),$$

$$\sin\varphi + \frac{1}{3!}\sin 3\varphi + \dots = \tfrac{1}{2}(e^{\cos\varphi} + e^{-\cos\varphi})\sin(\sin\varphi),$$

$$\sin\varphi + \frac{1}{1}\sin 2\varphi + \frac{1}{2!}\sin 3\varphi + \frac{1}{3!}\sin 4\varphi + \dots = e^{+\cos\varphi}\sin(\varphi + \sin\varphi),$$

$$\cos\varphi + \frac{1}{1}\cos 2\varphi + \frac{1}{2!}\cos 3\varphi + \frac{1}{3!}\cos 4\varphi + \dots = e^{+\cos\varphi}\cos(\varphi + \sin\varphi),$$

$$\sin\varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{2!}\sin 3\varphi - \dots = -e^{-\cos\varphi}\sin(\sin\varphi - \varphi),$$

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \frac{1}{2!}\cos 3\varphi - \dots = +e^{-\cos\varphi}\cos(\sin\varphi - \varphi).$$

Da sich weitere Formeln aus den ersten nicht auf einfachem Wege ergeben, so wenden wir uns zur Binomialreihe.

§. 9.

Die Reihe

$$1.\quad 1 + mx + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \dots,$$

nemlich die Binomialreihe, ist ebenfalls von der Form der Reihe (1. §. 2.). Setzt man dort $a = m$, $K = -1$, so erhält man sie. Bezeichnet man also, im Fall

die Reihe (1.) convergent ist, ihre Summe durch $\varphi(m)$, so ist

$$2.\quad \varphi(m)\cdot\varphi(n) = \varphi(m+n).$$

Es sei nun $x = a+bi = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\frac{m-v+1}{v} = d_v\cos(e_v + i\sin e_v)$, so ist $r = +\sqrt{(a^2+b^2)}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, $\sin\alpha = \frac{b}{r}$, $d_v = +\sqrt{\left(\left(\frac{p-v+1}{v}\right)^2 + \left(\frac{q}{v}\right)^2\right)}$, $\cos e_v = \frac{p-v+1}{v d_v}$, $\sin e_v = \frac{q}{v d_v}$, wenn $m = p+qi$.

Setzt man, um abzukürzen,

$$d_1 d_2 \dots . d_v = D_v, \qquad e_1 + e_2 + \dots . + e_v + v\alpha = E_v,$$

so ist die Reihe (1.) folgende:

$$3.\quad 1 + D_1\cos E_1 r + D_2 \cos E_2 r^2 + \dots .$$
$$+ i(D_1 \sin E_1\cdot r + D_2 \sin E_2\cdot r^2 + \dots .).$$

Es ist also diese Reihe in Bezug auf Convergenz oder Divergenz zu untersuchen.

Da $\cos E_n$ und $\sin E_n$ die Einheit nicht übersteigen, so ist die Reihe zugleich mit

$$1 + D_1 r + r^2 D_2 + r^3 D_3 + \dots .$$

convergent. Die Gröfse ϱ_n in (§. 1.) ist also

$$= r^n D_n$$

und folglich

$$\frac{\varrho_{n-1}}{\varrho_n} = r\cdot\frac{D_{n+1}}{D_n} = d_{n+1} r = \sqrt{\left(\left(\frac{p-n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{q}{n-1}\right)^2\right)}\cdot r.$$

Für ein unendliches n ist diese Gröfse $= r$.

Die vorgelegte Reihe also ist convergent für $r < 1$ und divergent für $r > 1$. Setzt man demnach in der Reihe (6. §. 2.) m und x reell, so hat jene Gleichung Statt, wenn $x^2 < 1$ ist.

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, wenn $r = 1$ ist.

In diesem Fall ist die Reihe convergent und divergent zugleich mit

$$1 + D_1 + D_2 + D_3 + \dots .$$

Hiebei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1ter Fall. $p = -1$ oder < -1. In diesem Falle kann man $p = -1-n$ und $n \gtreqless 0$ setzen; also ist dann

$$d_v = \sqrt{\left(\left(\frac{n+v}{v}\right)^2 + \left(\frac{q}{v}\right)^2\right)} > 1.$$

Aber da $D_v = d_1 d_2 \dots . d_v$ ist, so ist $D_v > 1$, und D_v wird sich mit wachsendem Werthe von v der Null nicht nähern; die Reihe wird also in diesem Falle divergent sein.

2ter Fall. $p > 0$ oder positiv.

Es sei c eine positive Zahl und $< p$, so ist

$(v-p-1+c)^2 = (v-p-1)^2+2c(v-p-1)+c^2$, also

$(v-p-1)^2+q^2 = (v-p-1+c)^2-2c(v-p-1)-c^2+q^2$.

Setzt man nun

$$v > p+1+\frac{q^2}{2c}-\tfrac{1}{2}c,$$

so ist offenbar $q^2-2c(v-p-1)-c^2 < 0$, also alsdann

$$\left(\frac{v-p-1}{v}\right)^2+\frac{q^2}{v^2} < \left(\frac{v-p-1+c}{v}\right)^2,$$

folglich, dem Zahlenwerthe nach,

$$d_v < \frac{v-p-1+c}{v} \quad \text{oder} \quad < 1-\frac{p+1-c}{v}.$$

Nun ist aber für ein reelles n (6. §. 2.)

$$\left(1+\frac{1}{v}\right)^{-n} = 1-\frac{n}{v}+\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{n+2}{3v}\cdot\frac{1}{v^2}\right)+\dots.$$

Setzt man also $n = 1+p-c$, so ist $v > n$ und also

$$\left(1+\frac{1}{v}\right)^{-1-p+c} > 1-\frac{1+p-c}{v},$$

mithin

$$d_v < \left(\frac{v+1}{v}\right)^{-1-p+c} \quad \text{oder} \quad < \left(\frac{v}{v+1}\right)^{1+p-c}.$$

Da $v > p+1-\frac{1}{2}c+\frac{q^2}{2c}$ ist, so setze man

$$p+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{q^2}{2c} = r,$$

wenn diese Gröfse eine ganze Zahl ist; oder es sei r die ganze Zahl, die unmittelbar gröfser ist als $p+1-\frac{1}{2}c+\frac{q^2}{2c}$. Es sei nun $v = r+n$, so folgt für $r > n$:

$$d_{r+n} < \left(\frac{r+n}{r+n+1}\right)^{1+p-c}.$$

Setzt man hier nach einander $n = 1, 2, 3, \dots m$ und multiplicirt die Resultate, so erhält man

$$d_{r+1}\,d_{r+2}\dots d_{r+m} < \left(\frac{r+1}{r+m+1}\right)^{1+p-c} \quad \text{oder}$$

$$D_{r+m} < d_1 d_2 \dots d_r\left(\frac{r+1}{r+m+1}\right)^{1+p-c}.$$

Setzt man hierin $m = 1, 2, \ldots n$ und addirt, während man D_r auf beiden Seiten beifügt, so erhält man:

$$D_r + D_{r+1} + \ldots + D_{r+n}$$

$$< d_1 d_2 \ldots d_r \left(\frac{1}{(r+1)^{1+p-c}} + \frac{1}{(r+2)^{1+p-c}} + \ldots + \frac{1}{(r+n+1)^{1+p-c}}\right)(r+1)^{1+p-c}.$$

Nun ist

$$\left(1 - \frac{1}{r+s+1}\right)^{c-p} = 1 + \frac{p-c}{r+s+1} + \frac{(p-c)(p-c+1)}{1 \cdot 2(r+s+1)^2} + \ldots,$$

also

$$\left(\frac{r+s}{r+s+1}\right)^{c-p} > 1 + \frac{p-c}{r+s+1} \quad \text{oder} \quad \frac{p-c}{r+s+1} < \left(\frac{r+s+1}{r+s}\right)^{p-c} - 1.$$

Dividirt man beiderseits mit $(p-c)(r+s+1)^{p-c}$, so erhält man

$$\frac{1}{(r+s+1)^{1+p-c}} < \frac{1}{p-c}\left(\frac{1}{(r+s)^{p-c}} - \frac{1}{(r+s+1)^{p-c}}\right).$$

Setzt man hier nach einander $s = 0, 1, \ldots n$, und addirt, so findet sich

$$\frac{1}{(r+1)^{1+p-c}} + \frac{1}{(r+1)^{1+p-c}} + \ldots + \frac{1}{(r+n+1)^{p-1+1}}$$

$$< \frac{1}{p-c}\left(\frac{1}{r^{p-c}} - \frac{1}{(r+n+1)^{p-c}}\right) \quad \text{oder} \quad < \frac{1}{p-c} \cdot \frac{1}{r^{p-c}}:$$

Also ist immer

$$D_r + D_{r+1} + \ldots + D_{r+n} < d_1 d_2 \ldots d_r \cdot \frac{(r+1)^{1+p-c}}{(p-c) r^{p-c}} \quad \text{und}$$

$$D_1 + D_2 + \ldots + D_n \quad < D_1 + D_2 + \ldots + D_r + d_1 d_2 \ldots d_r \cdot \frac{(r+1)^{1+p-c}}{(p-1) r^{p-c}};$$

was auch n sei. Die Summe der Reihe

$$D_1 + D_2 + D_3 + \ldots$$

bleibt mithin immer endlich und bestimmt, und die Reihe demnach convergent.

2ter Fall. Es sei $p = 0$, oder auch $p < 0$ und > -1.

Da $m = p + qi$, $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ist, so setze man

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+1)}{n!} = m_n,$$

so dafs die Reihe

$$1 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_n x^n \text{ ist.}$$

Da $d_v = \sqrt{\left(\left(\frac{p-v+1}{v}\right)^2 + \left(\frac{q}{v}\right)^2\right)}$ und jetzt $p+1 > 0$ ist, so ist $d_v = \sqrt{\left(\left(\frac{p-v+1}{v}\right)^2 + \left(\frac{q}{v}\right)^2\right)}$ und für ein bedeutendes v immer kleiner als 1: also wird

$$D_v = d_1 d_2 \ldots d_v$$

für ein sehr grofses v verschwinden; folglich auch m_v für ein solches v. Setzt man nun

$$1+m_1x+m_2x^2+\ldots+m_vx^v = P_v$$

und multiplicirt mit $1+x$, so findet sich nach (§. 2.)

$$1+(m+1)_1x+(m+1)_2x^2+\ldots+(m+1)_vx^v = P_v(1+x)-m_vx^{v+1}.$$

Setzt man v unendlich grofs, so ist die Reihe links convergent, da $m+1>0$ (2ter Fall); m_v ist $=0$; also ist, wenn K die Summe der Reihe links bezeichnet, für ein unendliches v:

$$K = P_v(1+x) \quad \text{und} \quad P_v = \frac{K}{1+x}.$$

Ist demnach $1+x$ nicht $=0$, so hat die Reihe in diesem Falle auch eine bestimmte Summe $=\frac{K}{1+x}$ und ist folglich *convergent*. Ist aber

$$1+x=0 \quad \text{oder} \quad \cos\alpha = -1,$$

so ist sie *divergent*.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so ergiebt sich, dafs die Reihe (1.) *convergent* ist:

1) Für jeden Werth von p und q, wenn r oder $\sqrt{(a^2+b^2)}<1$.

2) Für $\sqrt{(a^2+b^2)}=1$ ist sie convergent, wenn $p>-1$, falls nicht zugleich $a=-1$ ist, in welchem letzteren Falle $p>0$ sein mufs.

In jedem andern Falle ist die Reihe *divergent*.

Sucht man nun für die Fälle, in welchen die vorgelegte Reihe convergent ist, ihre Summe, so findet sich leicht, vermöge der Gleichung (2.) und des im §. 4. Gesagten, dafs die Summe

$$= e^{\delta p+\varepsilon q}(\cos(\beta p+\gamma q)+i\sin(\beta p+\gamma q))$$

ist, wenn δ, ε, β, γ bestimmte, nicht mit p und q veränderliche Zahlen sind. Setzt man also die Summe der Reihe =

$$P+Qi,$$

so ist

$$4. \quad \begin{cases} P = e^{\delta p+\varepsilon q}\cos(\beta p+\gamma q), \\ Q = e^{\delta p+\varepsilon q}\sin(\beta p+\gamma q). \end{cases}$$

Für $q=0$ ist

$$4'. \quad \begin{cases} P = e^{\delta p}\cos\beta p = 1+p\cos\alpha\cdot r+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot2}\cos2\alpha\cdot r^2+\ldots, \\ Q = e^{\delta p}\sin\beta p = \quad p\sin\alpha\cdot r+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot2}\sin2\alpha\cdot r^2+\ldots, \end{cases}$$

Diese Reihen gelten jedenfalls für $p=1$, wenn auch $r=1$ ist. Für $p=1$ erhält man daraus

$$e^{\delta}\cos\beta = 1+r\cos\alpha, \qquad e^{\delta}\sin\beta = r\sin\alpha,$$

und hieraus

$$5. \quad \begin{cases} \beta = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)+n\pi, \\ \delta = l\cdot(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

wenn man durch $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)$ den (numerisch) kleinsten Bogen bezeichnet, dessen Tangente $\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}$ ist. n ist eine noch zu bestimmende ganze Zahl.

Setzt man $p=0$, so ist $d_1=D_1=+\sqrt{q^2}$, $\cos e_1=0$, $\sin e_1=1$, wenn man q positiv annimmt, also $e_1=\frac{1}{2}\pi$; ferner $\cos e_v=\frac{-v+1}{vdv}$, $\sin e_v=\frac{q}{vdv}$, $d_v=\sqrt{\left(\left(\frac{v-1}{v}\right)^2+\left(\frac{q}{v}\right)^2\right)}$. Demnach ist $D_v=d_1d_2\ldots\ldots d_v$ durch q theilbar und $E_v=e_1+e_2\ldots\ldots+e_v+v\alpha=\frac{1}{2}\pi+E'_v$, wenn $E'_v=e_2+\ldots\ldots+e_v+v\alpha$; also $\cos E_v=-\sin E'_v$ und $\sin E_v=\cos E'_v$; also ist in diesem Falle:

$$6. \quad \begin{cases} P = 1-q\sin\alpha\cdot r-D_2\sin E'_2r^2-\ldots\ldots = e^{\varepsilon q}\cos\gamma q, \\ Q = \qquad q\cos\alpha\cdot r+D_2\cos E'_2r^2+\ldots\ldots = e^{\varepsilon q}\sin\gamma q; \end{cases}$$

für $r<1$, und für $r=1$, wenn $\cos\alpha$ nicht $=-1$.

Hieraus folgt unter den nämlichen Bedingungen:

$$7. \quad \begin{cases} \frac{e^{\varepsilon q}\cos(\gamma q)-1}{q} = -\sin\alpha\cdot r-\frac{D_2}{q}\sin E'_2\cdot r^2-\ldots\ldots, \\ \frac{e^{\varepsilon q}\sin(\gamma q)}{q} \quad = +r\cos\alpha+\frac{D_2}{q}\cos E'_2\cdot r^2+\ldots\ldots \end{cases}$$

Setzt man in die erste Gleichung für $e^{\varepsilon q}$ seinen Werth aus (§. 4.), in die zweite für $\sin\gamma q$ seinen Werth aus (14. §. 4.) und hierauf $q=0$, so wird $e_v=\pi$, $E'_v=(v-1)\pi+v\alpha$ und demzufolge aus den Gleichungen:

$$8. \quad \begin{cases} \varepsilon = -r\sin\alpha+\frac{1}{2}r^2\sin2\alpha-\frac{1}{3}r^3\sin3\alpha+\ldots\ldots, \\ \gamma = +r\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\cos2\alpha+\frac{1}{3}r^3\cos3\alpha-\ldots\ldots; \end{cases}$$

unter den gleichen Bedingungen, wie bei (6.).

Ebenso erhält man aus den Gleichungen (4'.) für $p=0$:

$$8'. \quad \begin{cases} \delta = r\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\cos2\alpha+\frac{1}{3}r^3\cos3\alpha-\ldots\ldots, \\ \beta = r\sin\alpha-\frac{1}{2}r^2\sin2\alpha+\frac{1}{3}r^3\sin3\alpha-\ldots\ldots, \end{cases}$$

also

$$9. \quad \gamma=\delta, \qquad \varepsilon=-\beta.$$

Da für $r=0$ auch $\beta=0$ ist, so mufs im Werthe von β, $n=0$ sein.

Die Summe der Reihe (1.), in den Fällen wo sie convergent ist, ist also

$$e^{pl.(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}-q\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)}\left(\cos\left[p\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)+ql(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right.$$
$$\left.+i\sin\left[p\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)+ql\cdot(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\right)$$
$$=((1+a)^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}\cdot e^{-q\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{b}{1+a}\right)}\left[\cos\left(p\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{b}{1+a}\right)+\tfrac{1}{2}ql((1+a)^2+b^2)\right)\right.$$
$$\left.+i\sin\left(p\cdot\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{b}{1+a}\right)+\tfrac{1}{2}ql((1+a)^2+b^2)\right)\right].$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber der einfachste Werth von

$$(1+a+bi)^{p+qi},$$

dem also die vorliegende Reihe gleichzusetzen ist, falls sie convergirt.

§. 10.

Aus den Resultaten in (§. 9.) lassen sich nun eine Reihe von Formeln entwickeln.

Aus den Formeln (8'.) folgt, wenn man in diesem Paragraph immer r positiv setzt:

$$1.\quad\begin{cases} r\cos\alpha-\frac{1}{2}r^2\cos2\alpha+\frac{1}{3}r^3\cos3\alpha-\ldots.=\frac{1}{2}l(1+2r\cos\alpha+r^2),\\ r\sin\alpha-\frac{1}{2}r^2\sin2\alpha+\frac{1}{3}r^3\sin3\alpha-\ldots.=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right),\end{cases}$$

für $r<1$. Den Bogen nimmt man seinem kleinsten numerischen Werthe nach.

$$2.\quad\begin{cases} \cos\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{3}\cos3\alpha-\ldots.=\frac{1}{2}l(2+2\cos\alpha)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=l\cdot(2\cos\frac{1}{2}\alpha),\\ \sin\alpha-\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{3}\sin3\alpha-\ldots.=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)=\frac{1}{2}\alpha;\end{cases}$$

ausgenommen, wenn $\alpha=\pi$, oder in der ersten Formel $\cos\alpha=-1$ ist. Setzt man in den Formeln (1.) und (2.) $\pi-\alpha$ statt α, so erhält man:

$$3.\quad\begin{cases} r\cos\alpha+\frac{1}{2}r^2\cos2\alpha+\frac{1}{3}r^3\cos3\alpha+\ldots.=-\frac{1}{2}l(1-2r\cos\alpha+r^2),\\ r\sin\alpha+\frac{1}{2}r^2\sin2\alpha+\frac{1}{3}r^3\sin3\alpha+\ldots.=\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right),\end{cases}$$

für $r<1$;

$$4.\quad\begin{cases} \cos\alpha+\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{3}\cos3\alpha+\ldots.=-l\cdot(2\sin\frac{1}{2}\alpha),\\ \sin\alpha+\frac{1}{2}\sin2\alpha+\frac{1}{3}\sin3\alpha+\ldots.=\frac{1}{2}(\pi-\alpha);\end{cases}$$

ausgenommen für $\cos\alpha=+1$, also gültig für $\alpha>0$ und $<2\pi$, dieses ausschliefslich. Ist $\alpha=2\pi+k$, so ist

$$\sin\alpha+\tfrac{1}{2}\sin2\alpha+\tfrac{1}{3}\sin3\alpha+\ldots.=\tfrac{1}{2}(\pi-k).$$

Aus den Formeln (2.) und (4.) folgt

$$5.\quad \begin{cases} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots = l\cdot(2) \text{ und} \\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots = \frac{1}{4}\pi; \end{cases}$$

ferner, dafs die Reihe

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\dots$$

divergent ist.

Da $e^{\delta p} = (1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}p}$, $\cos\beta p = \cos\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)p$ ist, so folgt aus (4'. §. 9.):

$$6.\quad \begin{cases} 1+p\cos\alpha\cdot r+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cos 2\alpha\cdot r^2+\dots \\ = (1+2r\cos+r^2)^{\frac{1}{2}p}\cos\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)p, \\ p\sin\alpha\cdot r+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\sin 2\alpha\cdot r^2+\dots \\ = (1+2r\cos+r^2)^{\frac{1}{2}p}\sin\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)p, \end{cases}$$

für $r<1$. Setzt man $r=+1$, so erhält man:

$$7.\quad \begin{cases} 1+p\cos\alpha+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cos 2\alpha+\dots = 2^p\cos^p\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}p\alpha, \\ p\sin\alpha+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\sin 2\alpha+\dots = 2^p\cos^p\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}p\alpha, \end{cases}$$

wenn $p>-1$ und nicht $\cos\alpha=-1$; ist aber $\cos\alpha=-1$, so mufs $p>0$ sein.

Setzt man in den Formeln (6. und 7.) $\pi-\alpha$ statt α, so findet sich

$$8.\quad \begin{cases} 1-p\cos\alpha\cdot r+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cos 2\alpha\cdot r^2-\dots \\ = (1-2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}p}\cos\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right)p, \\ p\sin\alpha\cdot r-\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\sin 2\alpha\cdot r^2+\dots \\ = (1-2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}p}\cos\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right)p, \end{cases}$$

für $r<1$ und

$$9.\quad \begin{cases} 1-p\cos\alpha+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cos 2\alpha-\dots = 2^p\sin^p\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}p(\pi-\alpha), \\ p\sin\alpha-\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\sin 2\alpha+\dots = 2^p\sin^p\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}p(\pi-\alpha), \end{cases}$$

für $p>-1$, wenn nicht $\cos\alpha=+1$; ist aber $\cos\alpha=+1$, so mufs $p>0$ sein.

Also ist

$$10.\quad 1-p+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}-\ldots\ldots=0$$

für $p>0$, und

$$11.\quad 1+p+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}+\ldots\ldots=2^p$$

für $p>-1$.

Da die vorliegenden Formeln verwickelt sind, so ist es nicht wahrscheinlich, dafs durch Differenziirung oder Integrirung einfache Resultate zu erzielen wären.

§. 11.

Wir sahen in §. 9., dafs, wenn der Modul r von x kleiner ist als die Einheit,

$$(1+x)^m = 1+mx^{m-1}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{m-2}+\ldots\ldots$$

ist. Man setze nun

$$x=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{1}{r}(\cos\alpha-i\sin\alpha),$$

so erhält man

$$1.\quad\begin{cases}\left(1+\frac{1}{a+bi}\right)^m=1+m\cdot\left(\frac{1}{a+bi}\right)^{m-1}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{a+bi}\right)^{m-2}+\ldots\ldots,\\ \left(\frac{1}{a+bi}\right)^m(1+a+bi)^m=1+m\cdot\left(\frac{1}{a+bi}\right)^{m-1}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{a+bi}\right)^{m-2}+\ldots\ldots;\end{cases}$$

welche Formel für $r>1$ gilt.

Nimmt man m imaginär, $=p+qi$ und $a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ an, so ist, wenn man zur Abkürzung

$$l\cdot(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}=k\quad\text{und}\quad\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)=h\ \text{setzt:}$$

$$(1+a+bi)^m = e^{pk-qh}[\cos(ph+qk)+i\sin(ph+qk)],$$

$$\left(\frac{1}{a+bi}\right)^m = e^{-pl(r)+q\alpha}[\cos(ql(r)+p\alpha)-i\sin(ql(r)+p\alpha)]\ \text{und}$$

$$\left(\frac{1}{a+bi}\right)^m(1+a+bi)^m$$

$$= e^{p(k-l(r))+q(\alpha-h)}[\cos(ph-p\alpha+qk-ql(r))+i\sin(ph+qk-ql(r)-p\alpha)].$$

Die zweite Seite der Formel giebt:

$$1+\frac{D_1\cos E_1}{r}+\frac{D_2\cos E_2}{r^2}+\ldots\ldots$$

$$-i\left[\frac{D_1\sin E_1}{r}+\frac{D_2\sin E_2}{r^2}+\ldots\ldots\right].$$

Demnach ist für $r > 1$:

$$2.\begin{cases} 1+\frac{D_1\cos E_1}{r}+\frac{D_2\cos E_2}{r^2}+\dots = e^{p(k-l(r))+q(\alpha-h)}\cos(ph-p\alpha+qk-ql(r)), \\ \frac{D_1\sin E_1}{r}+\frac{D_2\sin E_2}{r^2}+\dots = -e^{p(k+l(r))+q(\alpha-h)}\sin(ph-p\alpha+qk-ql(r)). \end{cases}$$

Wenn m reell ist, so ist $q=0$, $\sin e_v=0$, $d_v=\sqrt{\left(\frac{p-v+1}{v}\right)^2}$ und $\cos e_v=\frac{p-v+1}{v}\cdot\frac{1}{d_v}=\pm 1$. Übrigens erhält man leichter aus (1.) für $q=0$:

$$3.\quad e^{p(k+l(r))}[\cos(ph-p\alpha)+i\sin(ph-p\alpha)]$$
$$=1+\frac{p\cos\alpha}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{r^2}+\dots$$
$$-i\left[\frac{p\sin\alpha}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{r^2}+\dots\right],$$

woraus

$$4.\begin{cases} 1+\frac{p\cos\alpha}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{r^2}+\dots \\ = e^{pl(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}-pl(r)}\cos\left[p\,\text{arc}\left(\tang=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)-p\alpha\right] \text{ und} \\ \frac{p\cdot\sin\alpha}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{r^2}+\dots \\ = -e^{pl(1+2r\cos\alpha+r^2)^{\frac{1}{2}}-pl(r)}\sin\left[p\,\text{arc}\left(\tang=\frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)-p\alpha\right] \end{cases}$$

für r positiv und >1 folgt.

Für $\alpha=0$ findet sich hieraus

$$5.\quad 1+\frac{p}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2r^2}+\dots = e^{pl\left(\frac{1+r}{r}\right)}=\left(\frac{1+r}{r}\right)^p,$$

für $r>1$.

Um die zweite der Formeln (4.) zu prüfen, setze man $p=1$ und $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, wodurch sich ihre erste Seite auf $\frac{1}{r}$ reducirt. Die zweite Seite wird

$$-e^{l(1+r^2)^{\frac{1}{2}}-l(r)}\sin[(\text{arc}\tang=r)-\tfrac{1}{2}\pi] = e^{l\left(\frac{1+r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cos\text{arc}(\tang=r)$$
$$=\left(\frac{1+r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{1+r^2}\right)}=\frac{1}{r},$$

und stimmt mithin zusammen.

Setzt man in den Formeln (4.) $\pi-\alpha$ statt α, so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} 1-\frac{p\cos\alpha}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{r^2}-\dots\\ =\left(\frac{1-2r\cos\alpha+r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}p}\cos\left[p\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right)+p\alpha-p\pi\right] \text{ und}\\ \frac{p\sin\alpha}{r}-\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{r^2}+\dots\\ =-\left(\frac{1-2r\cos\alpha+r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}p}\sin\left[p\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right)+p\alpha-p\pi\right], \end{cases}$$

für $r>1$. Für $\alpha=0$ ergiebt sich hieraus:

$$1-\frac{p}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{r^2}-\dots=\left(\frac{1-2r+r^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}p}\cos(-p\pi).$$

Dies scheint beim ersten Anblick das Resultat zu sein; allein die zweite Formel würde

$$\sin p\pi=0$$

geben; was aber offenbar in dieser Allgemeinheit nicht gilt. Es ist zu bemerken, dafs, da $1-r\cos\alpha=1-r$ wird, dies negativ ist, also dafs $\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}$ für $\alpha=0=-0$ wird und mithin $\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right)$ in diesem Falle $=\pi$ ist; dann erhält man

$$6.\quad 1-\frac{p}{r}+\frac{p\cdot(p-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{r^2}-\dots=\left(\frac{r-1}{r}\right)^p;$$

für $r>1$.

Es zeigt sich hier an einem Beispiel, dafs eben so genau auf das Vorzeichen von 0 zu achten sei, wie bei jeder andern Gröfse. Man hätte das nämliche Resultat übrigens auch finden können, wenn man α nur nach und nach der Null sich nähernd angenommen hätte.

§. 12.

Die Reihe

$$1.\quad x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

wird für $x=a+bi=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ zu

$$2.\quad r\cos\alpha-\tfrac{1}{2}r^2\cos 2\alpha+\tfrac{1}{3}r^3\cos 3\alpha-\dots$$
$$+i\left[r\sin\alpha-\tfrac{1}{2}r^2\sin 2\alpha+\tfrac{1}{3}r^3\sin 3\alpha-\dots\right].$$

Aber in (§. 10. 1.) sahen wir, dafs

$$r\cos\alpha - \tfrac{1}{2}r^2\cos 2\alpha + \ldots = \tfrac{1}{2}l(1+2r\cos\alpha+r^2) \text{ und}$$
$$r\sin\alpha - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\alpha + \ldots = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)$$

ist; mithin ist die Entwicklung (2.) oder (1.) gleich

$$3.\quad \tfrac{1}{2}l(1+2r\cos\alpha+r^2) + i\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}l[(1+a)^2+b^2] + i\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{b}{1+a}\right);$$

für den Fall nämlich, dafs (nach §. 10. 1.) $r<1$, oder, wenn $r=1$, dafs nicht $\cos\alpha = -1$.

Die Gröfse (3.) ist aber der einfachste Werth von $l(1+a+bi)$, also ist die Reihe (1.) $= l(1+x)$, wenn man für $l(1+x)$ seinen einfachsten Werth setzt, vorausgesetzt, dafs $r<1$, oder $r=1$ und nicht zugleich $\cos\alpha = -1$ sei.

Da unter den angegebenen Bedingungen

$$4.\quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = l(1+x)$$

ist, so setze man $x = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$. Dies giebt

$$\frac{1}{r}\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{1}{r^2}\cos 2\alpha + \tfrac{1}{3}\frac{\cos 3\alpha}{r^3} - \ldots - i\left(\frac{\sin\alpha}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\sin 3\alpha}{r^3} - \ldots\right)$$
$$= l(1+a+bi) - (l(r)+\alpha i) = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+2r\cos\alpha+r^2}{r^2}\right) + i\left(\operatorname{arc}\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha} + \alpha\right),$$

also ist für $r>1$:

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\cos\alpha}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{\cos 2\alpha}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\cos 3\alpha}{r^3} - \ldots = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+2r\cos\alpha+r^2}{r^2}\right) \text{ und} \\ \frac{\sin\alpha}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\sin 3\alpha}{r^3} - \ldots = -\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1+r\cos\alpha}\right) - \alpha\right]. \end{cases}$$

Diese Gleichungen hätten übrigens auch aus den Formeln (4. §. 11.) hergeleitet werden können.

Setzt man in diesen Gleichungen $\pi - \alpha$ statt α, so erhält man:

$$6.\quad \begin{cases} \frac{\cos\alpha}{r} + \tfrac{1}{2}\frac{\cos 2\alpha}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\cos 3\alpha}{r^3} + \ldots = -\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1-2r\cos\alpha+r^2}{r^2}\right), \\ \frac{\sin\alpha}{r} + \tfrac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\sin 3\alpha}{r^3} + \ldots = -\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{r\sin\alpha}{1-r\cos\alpha}\right) + \alpha - \pi\right], \end{cases}$$

für $r>1$.

§. 13.

Es sei die ins Unendliche fortgehende Reihe

$$1.\quad 1+(a+bi)l\cdot(\alpha+\beta i)+\frac{(a+bi)^2(l\cdot(\alpha+\beta i))^2}{2!}+\frac{(a+bi)^3(l\cdot(\alpha+bi))^3}{3!}+\dots$$

zu summiren, wo der Gröfse $l\cdot(\alpha+\beta i)$ ihr einfachster Werth beigelegt wird.

Es sei $\alpha+\beta i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist $l\cdot(\alpha+\beta i)=l(r)+\varphi i$, also $(a+bi)l\cdot(\alpha+\beta i)=a\,l(r)-b\varphi+(b\,l(r)+a\varphi)i$.

Vergleicht man dies mit dem in (§. 4.) Gesagten, so findet man, dafs die Reihe (1.), was auch a, b, α, β sein mögen,

$$2.\quad e^{a\,l(r)-b\varphi}[\cos(b\,l(r)+a\varphi)+i\sin(b\,l(r)+a\varphi)]$$

zur Summe habe. Diese Gröfse ist aber der einfachste Werth von

$$3.\quad (\alpha+\beta i)^{a+bi},$$

so dafs also $(\alpha+\beta i)^{a+bi}$ die Summe des Ausdrucks (1.) ist.

§. 14.

Man betrachte die Reihe

$$1.\quad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

für $x=a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Der Ausdruck (1.) wird für $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$2.\quad 1-\frac{r^2\cos2\varphi}{2!}+\frac{r^4\cos4\varphi}{4!}-\dots+i\Big(-\frac{r^2\sin2\varphi}{2!}+\frac{r^4}{4!}\sin4\varphi-\dots\Big);$$

eine Reihe, die nach (§. 4.) immer convergent ist.

Setzt man in der ersten Reihe (2. §. 5.) $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ, so erhält man

$$1-\frac{r^2\cos2\varphi}{2!}+\frac{r^4}{4!}\cos4\varphi-\dots=\tfrac{1}{2}(e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi})\cos(r\cos\varphi).$$

Setzt man auch in der zweiten Reihe (3. §. 5.) $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ, so erhält man

$$\frac{r^2}{2!}\sin2\varphi-\frac{r^4}{4!}\sin4\varphi+\dots=\tfrac{1}{2}(e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi})\sin(r\cos\varphi).$$

Die vorgelegte Reihe (2.) oder (1.) hat also zur Summe:

$$3.\quad \tfrac{1}{2}(e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi})\cos(r\cos\varphi)-\tfrac{1}{2}i(e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi})\sin(r\cos\varphi)$$
$$=\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})\cos a-\tfrac{1}{2}i(e^b-e^{-b})\sin a=\cos(a+bi).$$

Es ist auch

$$4.\quad 1-\frac{r^2}{2!}\cos2\varphi+\frac{r^4\cos4\varphi}{4!}-\dots+i\Big(\frac{r^2\sin2\varphi}{r!}-\frac{r^4\sin4\varphi}{4!}+\dots\Big)$$
$$=\tfrac{1}{2}(e^{-r\sin\varphi}+e^{r\sin\varphi}\cos(r\cos\varphi)-\tfrac{1}{2}i(e^{-r\sin\varphi}-e^{r\sin\varphi})\sin(r\cos\varphi).$$

§. 15.

Auf gleiche Weise findet sich die Summe der immer convergenten Reihe

$$1.\quad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\dots$$

für $x=(a+bi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Diese Reihe (1.) ist nämlich

$$2.\quad r\cos\varphi-\frac{r^3\cos3\varphi}{3!}+\frac{r^5\cos5\varphi}{5!}-\dots+i\left(r\sin\varphi-\frac{r^3\sin3\varphi}{3!}+\dots\right).$$

Setzt man in der zweiten Gleichung (2. §. 5.) $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ, so erhält man

$$r\cos\varphi-\frac{r^3\cos3\varphi}{3!}+\frac{r^5\cos5\varphi}{5!}-\dots=\tfrac{1}{2}(e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi})\sin(r\cos\varphi).$$

Setzt man eben so in der ersten Gleichung (3. §. 4.) $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ, so erhält man

$$r\sin\varphi-\frac{r^3\sin3\varphi}{3!}+\frac{r^5\sin5\varphi}{5!}-\dots=\tfrac{1}{2}(e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi})\cos(r\cos\varphi).$$

Die Summe der Reihe (1.) oder (2.) ist also immer:

$$3.\quad \tfrac{1}{2}(e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi})\sin(r\cos\varphi)+\tfrac{1}{2}i(e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi})\cos(r\cos\varphi)$$
$$=\tfrac{1}{2}(e^b+e^{-b})\sin a+\tfrac{1}{2}i(e^b+e^{-b})\cos a=\sin(a+bi).$$

§. 16.

Es sei die Reihe

$$1.\quad \frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots$$

für $x=\alpha+\beta i$ zu summiren. Es sei $\alpha+\beta i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist bekanntlich nach (§. 9.)

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot x^6+\dots,$$

vorausgesetzt, dafs $r^2<1$, oder, wenn $r^2=1$, dafs $\cos2\varphi$ nicht $=+1$ sei. Integrirt man auf beiden Seiten und bemerkt, dafs

$$\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\operatorname{arc}(\sin=x)$$

ist, so findet sich

$$2.\quad \operatorname{arc}(\sin=x)=x+\tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^7}{7}+\dots,$$

so dafs die Summe der Reihe (1.) gleich $\operatorname{arc}(\sin=x)$ ist, wenn $r<1$, oder, für den Fall, dafs $r=1$ und nicht $\cos2\varphi=+1$ ist.

Für $\alpha+\beta i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ wird die Reihe (1.)

$$r\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos 5\varphi\cdot\frac{r^5}{5}+\dots\dots$$

$$+i\Big(r\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{r^5}{5}\sin 5\varphi+\dots\dots\Big).$$

Ferner ist bekanntlich:

$$\operatorname{arc}(\sin=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)) = \operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{r\cos\varphi}{(\frac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}+\frac{1}{2}(1+r^2))^{\frac{1}{2}}}\Big)$$

$$+il\Big[(\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}+\tfrac{1}{2}(1+r^2))^{\frac{1}{2}})+\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi)}}(\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}-\tfrac{1}{2}(1-r^2))^{\frac{1}{2}}\Big],$$

wo $\frac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}$ immer positiv zu nehmen ist.

Also ist

$$3.\begin{cases} r\cos\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{r^5}{5}\cos 5\varphi+\dots\dots \\ =\operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{r\cos\varphi}{(\frac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}+\frac{1}{2}(1+r^2))^{\frac{1}{2}}}\Big) \text{ und} \\ r\sin\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{r^5}{5}\sin 5\varphi+\dots\dots \\ =l\Big\{[\frac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}+\frac{1}{2}(1+r^2)]^{\frac{1}{2}}+\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\sin^2\varphi)}}[\frac{1}{2}\sqrt{(1-2r^2\cos 2\varphi+r^4)}-\frac{1}{2}(1-r^2)]^{\frac{1}{2}}\Big\}, \end{cases}$$

für $r<1$ und positiv; eben so für $r=1$, wenn nicht $\cos 2\varphi=1$ ist. Für $\varphi=0$ erhält man

$$4.\quad r+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{r^5}{5}+\dots\dots=\operatorname{arc}(\sin=r)$$

für jedes positive r, welches kleiner ist als 1; aber nicht für $r=1$.

Setzt man in den Formeln (3.) $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ, so erhält man

$$5.\begin{cases} r\sin\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\sin 3\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{r^5}{5}\sin 5\varphi-\dots\dots \\ =\operatorname{arc}\Big(\sin=\frac{r\sin\varphi}{(\frac{1}{2}\sqrt{(1+2r^2\cos 2\varphi+r^4)}+\frac{1}{2}(1+r^2))^{\frac{1}{2}}}\Big) \text{ und} \\ r\cos\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{3}\cos 3\varphi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{r^5}{5}\cos 5\varphi-\dots\dots \\ =l\Big\{[\frac{1}{2}\sqrt{(1+2r^2\cos 2\varphi+r^4)}+\frac{1}{2}(1+r^2)]^{\frac{1}{2}}+\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(\cos^2\varphi)}}[\frac{1}{2}\sqrt{(1+2r^2\cos 2\varphi+r^4)}-\frac{1}{2}(1-r^2)]^{\frac{1}{2}}\Big\} \end{cases}$$

für $r>0$ und <1, so wie auch für $r=1$, wenn nicht $\cos 2\varphi=-1$ ist.

§. 17.

Es sei endlich die Reihe

$$1.\quad \frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$$

für $x=\alpha+\beta i$ zu summiren.

Es ist bekanntlich, wenn $x=\alpha+\beta i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, nach (§. 12.):

$$l(1+xi)=l(1+\alpha i-\beta)=xi-\frac{(xi)^2}{2}+\frac{(xi)^3}{3}-\frac{(xi)^4}{4}+\dots$$
$$=i\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\right)$$
$$+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\dots$$

für $\alpha^2+\beta^2<1$, und für $\alpha^2+\beta^2=1$, wenn dann nicht $\beta=+1$ ist. Ferner ist nach demselben Paragraphen:

$$l(1-xi)=l(1-\alpha i+\beta)=i\left(-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\dots\right)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-\dots$$

wenn $\alpha^2+\beta^2<1$, so wie auch wenn $\alpha^2+\beta^2=1$ ist; nur darf dann nicht $\beta=-1$ sein.

Also ist $l(1+xi)-l(1-xi)=$

$$2i\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\right)$$

Die vorgelegte Reihe ist demnach $=\frac{l(1+xi)-l(1-xi)}{2i}$, für den Fall, dafs $r<1$, so wie für den Fall, wenn $r=1$ ist; nur darf dann nicht $\sin^2\varphi=1$ sein. Diese Bedingungen reduciren sich auf das Folgende. Die Reihe hat die angegebene Summe für $\alpha^2+\beta^2<1$, und wenn $\alpha^2+\beta^2=1$ ist; nur darf in letzterem Falle α nicht Null sein. Aber es ist bekanntlich:

$$\frac{l(1+xi)-l(1-xi)}{2i}=\frac{l(1-\beta+\alpha i)-l(1+\beta-\alpha i)}{2i}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\alpha}{1-\beta}\right)+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\alpha}{1+\beta}\right)+\tfrac{1}{2}i\cdot l\cdot\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right.$$

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{2\alpha}{1-\beta^2-\alpha^2}\right)+\tfrac{1}{4}i\cdot l\cdot\left(\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}\right)=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\alpha+\beta i).$$

Demnach ist die Reihe gleich $\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=x)$, wenn nemlich $r<1$, und wenn $r=1$, aber nicht zugleich $\sin^2\varphi=1$ ist.

Da $\alpha=r\cos\varphi$, $\beta=r\sin\varphi$ ist, so ist $\frac{2\alpha}{1-\beta^2-\alpha^2}=\frac{2r\cos\varphi}{1-r^2}$ und $\frac{(1+\beta)^2+\alpha^2}{(1-\beta)^2+\alpha^2}=\frac{1+2r\sin\varphi+r^2}{1-2r\sin\varphi+r^2}$; also ist offenbar:

$$2.\quad \begin{cases} r\cos\varphi - \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi + \frac{r^5\cos 5\varphi}{5} - \dots = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2r\cos\varphi}{1-r^2}\right), \\ r\sin\varphi - \frac{r^3}{3}\sin 3\varphi + \frac{r^5\sin 5\varphi}{5} - \dots = \frac{1}{4}l\left(\frac{1+2r\sin\varphi+r^2}{1-2r\sin\varphi+r^2}\right), \end{cases}$$

für $r<1$ und $r=1$, wenn nicht $\sin^2\varphi=1$ ist.

Setzt man $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ statt φ, so findet sich:

$$3.\quad \begin{cases} r\sin\varphi + \frac{r^3}{3}\sin 3\varphi + \frac{r^5\sin 5\varphi}{5} + \dots = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2r\sin\varphi}{1-r^2}\right), \\ r\cos\varphi + \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi + \frac{r^5\cos 5\varphi}{5} + \dots = \frac{1}{4}l\left(\frac{1+2r\cos\varphi+r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}\right), \end{cases}$$

für $r<1$ und $r=1$, wenn nicht $\cos^2\varphi=1$ ist.

Es läfst also die Gröfse $\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\pm i)$ nicht durch eine Reihe sich darstellen; wie sie sich bekanntlich auch nicht durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen läfst.

Für $r=1$ erhält man

$$4.\quad \begin{cases} \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \dots = \frac{1}{4}\pi, \\ \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \dots = \frac{1}{4}l\left(\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right); \end{cases}$$

was von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, und im Allgemeinen für positive Werthe von $\cos\varphi$ gilt, aufser wenn $\cos\varphi=0$ ist. Die zweite dieser Gleichungen gilt auch für negative Werthe von $\cos\varphi$; für solche aber geht die erste in

$$5.\quad \cos\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \dots = -\frac{1}{4}\pi$$

über, aufser für $\cos\varphi=0$. Die Gleichungen (3.) geben:

$$6.\quad \sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \dots = \frac{1}{4}\pi$$

für positive Werthe von $\sin\varphi$, aufser für $\sin\varphi=0$,

$$7.\quad \sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \dots = -\frac{1}{4}\pi$$

für negative Werthe von $\sin\varphi$, aufser für $\sin\varphi=0$, und

$$8.\quad \cos\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi + \dots = \frac{1}{4}l\left(\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right) = \frac{1}{2}l\cdot(\operatorname{cotang}\varphi),$$

aufser für $\sin\varphi=0$.

Es lassen sich einige dieser Reihen durch Integration leicht zu Grundformeln einer neuen Reihe von Formeln benutzen. Ihre Aufstellung ist sehr einfach.

§. 18.

Im Vorstehenden sind die in der Analysis gebräuchlichsten Functionen in Reihen entwickelt, oder vielmehr die Reihen durch geschlossene Ausdrücke

summirt worden, und es sind dabei die Grenzen angegeben, innerhalb welcher die gefundenen Resultate Geltung haben. Es lassen sich noch mancherlei Folgerungen aus den gefundenen Resultaten ziehen; wir haben sie nicht hergesetzt, weil es sich nur darum handelte, die so oft und auf so mancherlei Art behandelten Reihen streng zu untersuchen, um in jedem Falle mit mathematischer Gewifsheit entscheiden zu können, ob eine bestimmte Reihe anwendbar sei, oder nicht. Es ist nachgewiesen worden, dafs die untersuchten Reihen, wenigstens ihrer gröfsern Zahl nach, nur innerhalb gewisser Grenzen Summen haben, und dafs aufserhalb jener Grenzen die Reihen ohne Bedeutung und ohne Bestand, also nicht anwendbar sind.

Zum Schlusse möge noch Einiges in Bezug auf die obigen Differenziirungen und Integrirungen bemerkt werden.

Ist ε eine unendliche kleine Gröfse, so sagen wir, die unendlich kleine Gröfse k sei unendlich klein von der Ordnung r, wenn das Verhältnifs

$$\frac{k}{\varepsilon^n}$$

unendlich wird für $n>r$, Null für $n<r$ und *endlich* (auch Null, nicht aber unendlich) für $n=r$; alles in Bezug auf ε. Ferner nennen wir die Function $f(x)$ continuirlich innerhalb bestimmter Grenzen von x, wenn $f(x+\varepsilon)-f(x)$ innerhalb jener Grenzen eine unendlich kleine Gröfse von gleicher oder höherer Ordnung ist, als ε. Das Verhältnifs $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ ist also in jedem Falle endlich; und umgekehrt, wenn dies Verhältnifs endlich ist, so ist $f(x)$ continuirlich. Diese Gegenseitigkeit hat gemacht, dafs man jenes Verhältnifs besonders heraushebt und durch $\frac{df(x)}{dx}$ (den Differentialquotienten von $f(x)$) bezeichnet. So lange derselbe also endlich ist, bleibt $f(x)$ continuirlich.

Im Vorstehenden sind die Werthe der unendlichen Reihen für endliche Werthe der darin vorkommenden Gröfsen bestimmt worden; auf die Änderungen, welche diese Reihen durch unendlich kleine Änderungen der Gröfsen erleiden, und auf den Gang dieser Änderungen, hat man nicht geachtet. Es ist daher denkbar, dafs der geschlossene Ausdruck, der die Summe der Reihe darstellt, continuirlich im oben angegebenen Sinne sei, während die Reihe selbst nicht continuirlich ist, obwohl für jeden bestimmten Werth die beiden Ausdrücke zusammenfallen. Es wird also, wenn man auf beiden Seiten der entwickelten Formeln differenziirt, ohne vorhergehende Untersuchung nicht

angenommen werden dürfen, dafs die beiden gefundenen Differentialquotienten gleich seien, indem es sich ereignen kann, dafs die vorgelegte summirte Reihe nicht continuirlich (im obigen Sinne) ist und deshalb ihr Differenzialquotient gar nicht Statt findet. Integrirt man aber beiderseits, so sind die Integrale ohne Weiteres gleich zu setzen; denn die erhaltene Reihe ist sogar continuirlich (im aufgeführten Sinne), weil ihr Differentialquotient endlich ist; und zwar innerhalb der Grenzen, in welchen die Reihe selbst summirt wird.

So z. B. geben die Reihen (6. und 7. §. 17.), wenn man nach φ differenziirt,

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \ldots . = 0:$$

ein Resultat, welches offenbar unrichtig ist. Die Reihe

$$\cos\varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \ldots .$$

ist divergent, mithin ist

$$\sin\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi + \tfrac{1}{5}\sin 5\varphi + \ldots .$$

nicht continuirlich. Ähnliche Resultate finden sich aus den andern Formeln. Dagegen giebt die Integration der Formel (6.):

$$\cos\varphi + \frac{1}{3^2}\cos 3\varphi + \frac{1}{5^2}\cos 5\varphi + \ldots . = -\tfrac{1}{4}(\pi\varphi) + C,$$

für positive Werthe von $\sin\varphi$, aufser für $\sin\varphi = 0$, also blofs von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$. Für $\varphi - \frac{1}{2}\pi$ ist die erste Seite Null, also

$$C = \tfrac{1}{8}\pi^2 \quad \text{und}$$

$$\cos\varphi + \frac{1}{3^2}\cos 3\varphi + \frac{1}{5^2}\cos 5\varphi + \ldots . = \tfrac{1}{8}\pi^2 - \tfrac{1}{4}(\pi\varphi).$$

Diese Bemerkungen, deren weitere Ausführung nicht hieher gehört, werden bei den Umbildungen durch Differenziirung und Integrirung maafsgebend sein; sie enthalten vielleicht die Auflösung der Frage, die *Abel* in dem von *Ohm* in seinem „Geist der math. Analysis" S. 3 angeführten Briefe gestellt hat.

Sinsheim bei Heidelberg im Mai 1845.

11.

De criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreducibilis algebraice resolvi possit.

(Auctore *Eduardo Luther*, phil. doctore, Regiomonti.)

Aequatio haec

$$1.\quad y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - Cy^{m-3} + \ldots = 0$$

cuius coëfficientes $A, B, C, \ldots$ functiones quantitatum $x, x', x'', \ldots$ rationales sunt, algebraice resolubilis est, si omnes eius radices functiones algebraicae quantitatum $x, x', x'', \ldots$ sunt.

Aequatio (1.) irreductiblis est, si nullum factorem

$$y^\mu - A'y^{\mu-1} + B'y^{\mu-2} - \ldots = 0$$

habet, cuius coëfficientes functiones rationales quantitatum $x, x', x'', \ldots$ sunt.

Disquisitio de natura aequationum irreductibilium, quae algebraice resolvi possunt, semper ad aequationem Cl[i] *Lagrange* resolventem ducit. Contigit mihi, ut invenirem, quos factores rationales Resolvens haberet, si aequatio quinti gradus resolubilis sit. Iter, quod persecutus sum, a Cl[o] *Abel* in dissertatione sua non absoluta „Sur la résolution algébrique des équations" institutum est.

§. 1.

Cl. *Abel* theoremata sequentia dedit, quae hoc loco demonstrare nolo.

Theorema I. Forma maxime generalis functionis algebraicae quantitatum $x, x', x'', \ldots$ sequens est:

$$q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

ubi n numerus primus, et $q_0, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}, p$ functiones algebraicae quantitatum $x, x', x'', \ldots$ sunt, quibus $p^{\frac{1}{n}}$ rationaliter exprimi non potest.

Theorema II. Ut aequatio haec:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0,$$

ubi per $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}, p$ functiones algebraicae quantitatum $x, x', x'', \ldots$ designantur, quibus $p^{\frac{1}{n}}$ rationaliter exprimi non potest, consistat, aequationes subsequentes:

$$r_0 = 0,\quad r_1 = 0,\quad r_2 = 0,\quad \ldots\quad r_{n-1} = 0$$

ratas esse, necesse est.

Theorema III. Hos inter valores:

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y_3 = q_0 + \alpha^2 p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^4 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} \alpha^{n-2} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^{n-2} p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} \alpha p^{\frac{n-1}{n}},$$

expressionis algebraicae y, qui efficiuntur, si quantitati radicali $p^{\frac{1}{n}}$ omnes eius valores $\alpha p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 p^{\frac{1}{n}}$, ... $\alpha^n p^{\frac{1}{n}}$ tribuantur, non valores inter se aequales sunt.

Signum radicale expressionis algebraicae, quod in tota expressione alii signo radicali non subiectum est, hac in dissertatione *exterum* nominabimus. Itaque expressio sequens:

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{(a+\sqrt{x})}$$

unum signum radicale exterum continet.

§. 2.

Omnis expressio algebraica

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

quae in quantitates radicales exteras: $p^{\frac{1}{n}}$, $p'^{\frac{1}{n'}}$, ... $p^{(m-1)\frac{1}{n^{(n-1)}}}$ *involvit, non minus quam* n, n', ... $n^{(m-1)}$ *diversos valores habet.*

Theorema tertium docet, valores sequentes:

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^{n-2} p^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots q_{n-1} \alpha p^{\frac{n-1}{n}},$$

expressionis algebraicae y omnes inter se diversos esse. Quum expressio y plures quantitates radicales exteras contineat, necesse est, quantitates radicales exteras $p'^{\frac{1}{n'}}$, $p''^{\frac{1}{n''}}$, ... in nonnullis certe quantitatibus q_0, q_2, ... q_{n-1} inesse. Si ergo quantitati radicali exterae $p'^{\frac{1}{n'}}$ valorum $w p'^{\frac{1}{n'}}$, $w^2 p'^{\frac{1}{n'}}$, ... $w^{n'-1} p'^{\frac{1}{n'}}$ quislibet tribuitur, hoc novarum aequationum systema apparet:

$$y'_1 = q'_0 + p^{\frac{1}{n}} + q'_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots\ q'_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$y'_2 = q'_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + q'_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{n}} + \dots\ q'_{n-1} \alpha^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y'_n = q'_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + q'_2 \alpha^{n-2} p^{\frac{2}{n}} + \dots\ q'_{n-1} \alpha p^{\frac{n-1}{n}}.$$

Theorema tertium porro docet, huiusce etiam systematis valores omnes inter se diversos simulque valores alterius systematis valoribus alterius correspondentibus non aequales esse. Ergo demonstrandum restat, valorem

$$q_0 + \alpha_0 p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha_0^2 p^{\frac{2}{n}} + \dots\ q_{n-1} \alpha_0^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

prioris systematis valori

$$q'_0 + \alpha_1 p^{\frac{1}{n}} + q'_2 \alpha_1^2 p^{\frac{2}{n}} + \dots\ q'_{n-1} \alpha_1^{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

alterius systematis non aequalem esse. Si ponamus, valores illos aequales esse, aequatio haec:

$$1.\quad (q_0 - q'_0) + (\alpha_0 - \alpha_1) p^{\frac{1}{n}} + (\alpha_0^2 q_2 - \alpha_1^2 q'_2) p^{\frac{2}{n}} + \dots (\alpha_0^{n-1} q_{n-1} - \alpha_1^{n-1} q'_{n-1}) p^{\frac{n-1}{n}} = 0$$

consistere deberet.

Quantitas radicalis $p^{\frac{1}{n}}$ coëfficientium

$$(q_0 - q'_0),\quad (\alpha_0 - \alpha_1),\quad (\alpha_0^2 q_2 - \alpha_1^2 q'_2),\ \dots\ (\alpha_0^{n-1} q_{n-1} - \alpha_1^{n-1} q'_{n-1})$$

functio esse nequit, quia hoc in casu ipsa $p^{\frac{1}{n}}$ ad formandam expressionem algebraicam y necessaria non esset.

Ut aequatio (1.) constare possit, coëfficientes singuli (2.) $= 0$ esse debent, theorema II docente. Quum vero pateat, aequationem

$$\alpha_0 - \alpha_1 = 0$$

constare non posse, quia n numerus primus est, aequatio (1.) esse nequit; unde elucet, nullum valorem alterius systematis valori alterius aequalem esse.

§. 3.

Si huic aequationi:

$$1.\quad y^m - Ay^{m-1} + By^{m-2} - Cy^{m-3} + \dots = 0,$$

cuius coëfficientes functiones rationales quantitatum x, x', x'' .... sunt, expressio harum quantitatum algebraica

$$2.\quad y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \dots\ q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

satisfaciat, omnes quoque valores huius expressionis (2.) *radices aequationis* (1.) *esse debent.*

Substituamus in aequatione (1.) loco y expressionem (2.). Hinc aequatio

$$3.\quad r_0+r_1p^{\frac{1}{n}}+r_2p^{\frac{2}{n}}+\dots\ r_{n-1}p^{\frac{n-1}{n}}=0$$

sequitur, cuius coëfficientes $r_0, r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ functiones rationales quantitatum $A, B, C, \dots q_0, q_2, \dots q_{n-1}, p$ sunt. Quantitas radicalis $p^{\frac{1}{n}}$ coëfficientibus $r_0, r_1, \dots r_{n-1}$ rationaliter exprimi non potest; unde sequitur, theoremate II docente, aequationes hasce:

$$r_0=0,\quad r_1=0,\quad r_2=0,\quad \dots\ r_{n-1}=0$$

constare debere. Patet igitur, omnes expressionis (2.) valores, qui oriuntur, si quantitati radicali $p^{\frac{1}{n}}$ omnes eius valores $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \dots \alpha^n p^{\frac{1}{n}}$ tribuantur, aequationi (1.) satisfacere.

Eodem modo demonstrandum est, omnes expressionis (2.) valores, qui omnibus quantitatum radicalium exterarum valoribus efficiuntur, aequationi (1.) satisfacere.

Ponamus nunc, expressionem algebraicam y quantitatem radicalem non exteram $\pi^{\frac{1}{\nu}}$ involvere.

Si functiones $r_0, r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ hanc quantitatem radicalem non contineant, patet, omnes valores expressionis y, qui valoribus diversis quantitatis radicalis $\pi^{\frac{1}{\nu}}$ existunt, aequationi (1.) satisfacere. Si vero functiones $r_0, r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ quantitatem radicalem $\pi^{\frac{1}{\nu}}$ contineat, ita ut functiones $r_0, r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ hancce formam

$$4.\quad \varrho_0+\varrho_1\pi^{\frac{1}{\nu}}+\varrho_2\pi^{\frac{2}{\nu}}+\dots\ \varrho_{\nu-1}\pi^{\frac{\nu-1}{\nu}}=0$$

praebeant, prodit, omnes valores quantitatis $\pi^{\frac{1}{\nu}}$, quum quantitatis $\pi^{\frac{1}{\nu}}$ coëfficientibus $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\nu-1}$ rationaliter exprimi non possit, aequationi (4.), indeque omnes expressionis y valores aequationi (1.) satisfacere.

§. 4.

Numerus valorum expressionis algebraicae e multiplicatione nonnullorum exponentium radicalium, qui semper omnes quantitatum radicalium exterarum exponentes continent, efficitur.

Expressio algebraica y comprehendat m quantitates radicales exteras: $p'^{\frac{1}{n'}}, p''^{\frac{1}{n''}}, \dots p^{(m)\frac{1}{n^{(m)}}}$. Tum e §° 2 sequitur, ut expressio y non minus,

quam $n' \cdot n'' \ldots . n^{(m)} = n$ valores diversos habeat; sed plures diversos valores habere potest, si quantitatibus radicalibus non exteris $\pi^{\frac{1}{\nu}}$, $\pi'^{\frac{1}{\nu'}}$, ... diversi valores tribuantur.

E n valoribus expressionis y haec aequatio formetur:

$$y^n - Ay^{n-1} + By^{n-2} - Cy^{n-3} + \ldots = 0.$$

Si coëfficientes A, B, C, ... functiones rationales quantitatum x, x', x'', ... sint, expressio y, §° 3 demonstrante, non plures, n diversis valoribus, habet. Continentibus vero coëfficientibus A, B, C, ... quantitatem $\pi^{\frac{1}{\nu}}$, ita ut formam

$$\varrho_0 + \varrho_1 \pi^{\frac{1}{\nu}} + \varrho_2 \pi^{\frac{2}{n}} + \ldots . \varrho_{\nu-1} \pi^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

habeant, aequationes hae prodeunt:

$$\begin{aligned} y^n - A y^{n-1} + B y^{n-2} - \ldots &= 0, \\ y^n - A_1 y^{n-1} + B_1 y^{n-2} - \ldots &= 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & \\ y^n - A_{(\nu-1)} y^{n-1} + B_{(\nu-1)} y^{n-2} - \ldots &= 0, \end{aligned}$$

quae aequationes, theoremate III docente, omnes diversae sunt. Quum vero pateat, duas harum aequationum, quae eandem radicem habeant, easdem esse, sequitur, ut omnes radices harum aequationum diversae esse debeant. Si ergo, in n diversis expressionis y valoribus, quantitati radicali $\pi^{\frac{1}{\nu}}$ omnes eius valores dentur, aut nulli novi valores expressionis y nascuntur, aut omnes novi sunt.

§. 5.

Ex antecedentibus elucet, radices aequationis huiusce irreductibilis:

$$y^5 - Ay^4 + By^3 - Cy^2 + Dy - E = 0,$$

cuius coëfficientes A, B, C, D, E functiones rationales quantitatum x, x', x'', ... sint, quinque hos valores:

$$1. \quad \begin{cases} y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{5}} + q_2 p^{\frac{2}{5}} + q_3 p^{\frac{3}{5}} + q_4 p^{\frac{4}{5}}, \\ y_2 = q_0 + \alpha\, p^{\frac{1}{5}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha^4 q_4 p^{\frac{4}{5}}, \\ y_3 = q_0 + \alpha^2 p^{\frac{1}{5}} + \alpha^4 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha\, q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha^3 q_4 p^{\frac{4}{5}}, \\ y_4 = q_0 + \alpha^3 p^{\frac{1}{5}} + \alpha\, q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha^4 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha^2 q_4 p^{\frac{4}{5}}, \\ y_5 = q_0 + \alpha^4 p^{\frac{1}{5}} + \alpha^3 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha^2 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha\, q_4 p^{\frac{4}{5}}, \end{cases}$$

expressionis algebraicae y quantitatum x, x', x'' esse, quae expressio nullam aliam quantitatem radicalem exteram quam $p^{\frac{1}{5}}$ continere potest.

Si alicui quantitatum radicalium, quae in quantitatibus q_0, q_2, q_3, q_4, p continentur, alium valorem tribuamus, quinque valores expressionis y ita apparent:

$$\begin{gathered}
q'_0 + p'^{\frac{1}{5}} + q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + q'_4 p'^{\frac{4}{5}},\\
q'_0 + \alpha\, p'^{\frac{1}{5}} + \alpha^2 q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha^3 q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha^4 q'_4 p'^{\frac{4}{5}},\\
q'_0 + \alpha^2 p'^{\frac{1}{5}} + \alpha^4 q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha\, q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha^3 q'_4 p'^{\frac{4}{5}},\\
q'_0 + \alpha^3 p'^{\frac{1}{5}} + \alpha\, q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha^4 q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha^2 q'_4 p'^{\frac{4}{5}},\\
q'_0 + \alpha^4 p'^{\frac{1}{5}} + \alpha^3 q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha^2 q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha\, q'_4 p'^{\frac{4}{5}}.
\end{gathered}$$

Ergo aequationes sequentes existere debent:

$$2.\quad \left\{\begin{aligned}
& q'_0 + p'^{\frac{1}{5}} + q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + q'_4 p'^{\frac{4}{5}}\\
&\qquad = q_0 + \alpha_0 p^{\frac{1}{5}} + \alpha_0^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha_0^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha_0^4 q_4 p^{\frac{4}{5}},\\
& q'_0 + \alpha\, p'^{\frac{1}{5}} + \alpha^2 q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha^3 q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha^4 q'_4 p'^{\frac{4}{5}}\\
&\qquad = q_0 + \alpha_1 p^{\frac{1}{5}} + \alpha_1^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha_1^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha_1^4 q_4 p^{\frac{4}{5}},\\
& q'_0 + \alpha^2 p'^{\frac{1}{5}} + \alpha^4 q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha\, q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha^3 q'_4 p'^{\frac{4}{5}}\\
&\qquad = q_0 + \alpha_2 p^{\frac{1}{5}} + \alpha_2^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha_2^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha_2^4 q_4 p^{\frac{4}{5}},\\
& q'_0 + \alpha^3 p'^{\frac{1}{5}} + \alpha\, q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha^4 q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha^2 q'_4 p'^{\frac{4}{5}}\\
&\qquad = q_0 + \alpha_3 p^{\frac{1}{5}} + \alpha_3^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha_3^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha_3^4 q_4 p^{\frac{4}{5}},\\
& q'_0 + \alpha^4 p'^{\frac{1}{5}} + \alpha^3 q'_2 p'^{\frac{2}{5}} + \alpha^2 q'_3 p'^{\frac{3}{5}} + \alpha\, q'_4 p'^{\frac{4}{5}}\\
&\qquad = q_0 + \alpha_4 p^{\frac{1}{5}} + \alpha_4^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha_4^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha_4^4 q_4 p^{\frac{4}{5}},
\end{aligned}\right.$$

ex quibus has aequationes nanciscimur:

$$q'_0 = q_0,$$

$$3.\quad \left\{\begin{aligned}
5p'^{\frac{1}{5}} = {} & p^{\frac{1}{5}}\{\alpha_0 + \alpha_1\alpha^{-1} + \alpha_2\alpha^{-2} + \alpha_3\alpha^{-3} + \alpha_4\alpha^{-4}\}\\
& + q_2 p^{\frac{2}{5}}\{\alpha_0^2 + \alpha_1^2\alpha^{-1} + \alpha_2^2\alpha^{-2} + \alpha_3^2\alpha^{-3} + \alpha_4^2\alpha^{-4}\}\\
& + q_3 p^{\frac{3}{5}}\{\alpha_0^3 + \alpha_1^3\alpha^{-1} + \alpha_2^3\alpha^{-2} + \alpha_3^3\alpha^{-3} + \alpha_4^3\alpha^{-4}\}\\
& + q_4 p^{\frac{4}{5}}\{\alpha_0^4 + \alpha_1^4\alpha^{-1} + \alpha_2^4\alpha^{-2} + \alpha_3^4\alpha^{-3} + \alpha_4^4\alpha^{-4}\}.
\end{aligned}\right.$$

Aequationem (3.) hoc modo producamus:

$$4.\quad p'^{\frac{1}{5}} = s_1 p^{\frac{1}{5}} + s_2 p^{\frac{2}{5}} + s_3 p^{\frac{3}{5}} + s_4 p^{\frac{4}{5}}.$$

Tum fit:

$$\begin{aligned}
p' &= \{s_1 p^{\frac{1}{5}} + s_2 p^{\frac{2}{5}} + s_3 p^{\frac{3}{5}} + s_4 p^{\frac{4}{5}}\}^5,\\
p' &= t_0 + t_1 p^{\frac{1}{5}} + t_2 p^{\frac{2}{5}} + t_3 p^{\frac{3}{5}} + t_4 p^{\frac{4}{5}}.
\end{aligned}$$

Quantitates t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 functiones rationales quantitatum q_2, q_3, q_4, p sunt. Quantitas radicalis $p^{\frac{1}{5}}$ functio rationalis quantitatum q_2, q_3, q_4, p, p' esse non potest, quia, casu contrario, ipsa $p^{\frac{1}{n}}$ ad formandam expressionem y necessaria non esset. Quum igitur, secundum theorema II, aequationes hae:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 0, \quad t_4 = 0$$

valeant, sequuntur hae:

$$p' = \{s_1 \alpha p^{\frac{1}{5}} + s_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{5}} + s_3 \alpha^3 p^{\frac{3}{5}} + s_4 \alpha^4 p^{\frac{4}{5}}\}^5,$$

$$5. \qquad \alpha^{\nu} p'^{\frac{1}{5}} = s_1 \alpha p^{\frac{1}{5}} + s_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{5}} + s_3 \alpha^3 p^{\frac{3}{5}} + s_4 \alpha^4 p^{\frac{4}{5}}.$$

Ex aequatione (4.)

$$6. \qquad \alpha^{\nu} p'^{\frac{1}{5}} = s_1 \alpha^{\nu} p^{\frac{1}{5}} + s_2 \alpha^{\nu} p^{\frac{2}{5}} + s_3 \alpha^{\nu} p^{\frac{3}{5}} + s_4 \alpha^{\nu} p^{\frac{4}{5}},$$

atque ex aequationibus (5. et 6.) hancce:

$$(\alpha^{\nu} - \alpha) s_1 p^{\frac{1}{5}} + (\alpha^{\nu} - \alpha^2) s_2 p^{\frac{2}{5}} + (\alpha^{\nu} - \alpha^3) s_3 p^{\frac{3}{5}} + (\alpha^{\nu} - \alpha^4) s_4 p^{\frac{4}{5}} = 0$$

nanciscimur. Quantitas radicalis $p^{\frac{1}{5}}$ coëfficientibus huius aequationis rationaliter exprimi non potest, ergo coëfficientes singuli $= 0$ esse debent.

Quum n numerus primus sit, inter quantitates $\alpha^{\nu} - \alpha$, $\alpha^{\nu} - \alpha^2$, $\alpha^{\nu} - \alpha^3$, $\alpha^{\nu} - \alpha^4$ unica quantitas $\alpha^{\nu} - \alpha^{\nu} = 0$ esse potest; unde patet, omnes quantitates s_1, s_2, s_3, s_4, excepta quantitate s_{ν}, aequales 0 esse. Itaque nanciscimur:

$$p'^{\frac{1}{5}} = s_{\nu} p^{\frac{\nu}{5}},$$

quem valorem quantitatis radicalis $p'^{\frac{1}{5}}$ in prima aequatione (2.) substituimus. Tum aequationem sequentem obtinemus:

$$s_{\nu} p^{\frac{\nu}{5}} + q_2' s_{\nu}^2 p^{\frac{2\nu}{5}} + q_3' s_{\nu}^3 p^{\frac{3\nu}{5}} + q_4' s_{\nu}^4 p^{\frac{4\nu}{5}} = \alpha_0 p^{\frac{1}{5}} + \alpha_0^2 q_2 p^{\frac{2}{5}} + \alpha_0^3 q_3 p^{\frac{3}{5}} + \alpha_0^4 q_4 p^{\frac{4}{5}},$$

ex qua fit:

$$s_{\nu} p^{\frac{\nu}{5}} - \alpha_0^{\nu} q_{\nu} p^{\frac{\nu}{5}} = 0,$$

$$p'^{\frac{1}{5}} - \alpha_0^{\nu} q_{\nu} p^{\frac{\nu}{5}} = 0,$$

$$p' = q_{\nu}^5 p^{\nu}.$$

Hinc tandem sequitur:

Expressione quantitatum x, x', x'', ... algebraica

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{5}} + q_2 p^{\frac{2}{5}} + q_3 p^{\frac{3}{5}} + q_4 p^{\frac{4}{5}}$$

non plures, quam quinque valores habente, q_0 functionem rationalem esse, et quantitatem p non plus quatuor valoribus habere.

§. 6.

Aequatio (3. §ⁱ 5.) docet, quantitates α_0 α_1 α_2 α_3 α_4

$$1.\quad \left\{\begin{array}{lccccc} \text{deinceps valores sequentes:} & \alpha_0 & \alpha\,\alpha_0 & \alpha^2\alpha_0 & \alpha^3\alpha_0 & \alpha^4\alpha_0 \\ & \alpha_0 & \alpha^3\alpha_0 & \alpha\,\alpha_0 & \alpha^4\alpha_0 & \alpha^2\alpha_0 \\ & \alpha_0 & \alpha^2\alpha_0 & \alpha^4\alpha_0 & \alpha\,\alpha_0 & \alpha^3\alpha_0 \\ & \alpha_0 & \alpha^4\alpha_0 & \alpha^3\alpha_0 & \alpha^2\alpha_0 & \alpha\,\alpha_0 \end{array}\right.$$

accipere debere, ut quantitas p' deinceps valores p, $q_2^5p^2$, $q_3^5p^3$, $q_4^5p^4$ nanciscatur.

Ex aequationibus (2.) §ⁱ 5 hae sequuntur:

$$\begin{aligned}
5q_2'p'^{\frac{2}{5}} = {} & p^{\frac{1}{5}}\{\alpha_0+\alpha_1\alpha^{-2}+\alpha_2\alpha^{-4}+\alpha_3\alpha^{-1}+\alpha_4\alpha^{-3}\} \\
& +q_2p^{\frac{2}{5}}\{\alpha_0^2+\alpha_1^2\alpha^{-2}+\alpha_2^2\alpha^{-4}+\alpha_3^2\alpha^{-1}+\alpha_4^2\alpha^{-3}\} \\
& +q_3p^{\frac{3}{5}}\{\alpha_0^3+\alpha_1^3\alpha^{-2}+\alpha_2^3\alpha^{-4}+\alpha_3^3\alpha^{-1}+\alpha_4^3\alpha^{-3}\} \\
& +q_4p^{\frac{4}{5}}\{\alpha_0^4+\alpha_1^4\alpha^{-2}+\alpha_2^4\alpha^{-4}+\alpha_3^4\alpha^{-1}+\alpha_4^4\alpha^{-3}\} \\
5q_3'p'^{\frac{3}{5}} = {} & p^{\frac{1}{5}}\{\alpha_0+\alpha_1\alpha^{-3}+\alpha_2\alpha^{-1}+\alpha_3\alpha^{-4}+\alpha_4\alpha^{-2}\} \\
& +q_2p^{\frac{2}{5}}\{\alpha_0^2+\alpha_1^2\alpha^{-3}+\alpha_2^2\alpha^{-1}+\alpha_3^2\alpha^{-4}+\alpha_4^2\alpha^{-2}\} \\
& +q_3p^{\frac{3}{5}}\{\alpha_0^3+\alpha_1^3\alpha^{-3}+\alpha_2^3\alpha^{-1}+\alpha_3^3\alpha^{-4}+\alpha_4^3\alpha^{-2}\} \\
& +q_4p^{\frac{4}{5}}\{\alpha_0^4+\alpha_1^4\alpha^{-3}+\alpha_2^4\alpha^{-1}+\alpha_3^4\alpha^{-4}+\alpha_4^4\alpha^{-2}\} \\
5q_4'p'^{\frac{4}{5}} = {} & p^{\frac{1}{5}}\{\alpha_0+\alpha_1\alpha^{-4}+\alpha_2\alpha^{-3}+\alpha_3\alpha^{-2}+\alpha_4\alpha^{-1}\} \\
& +q_2p^{\frac{2}{5}}\{\alpha_0^2+\alpha_1^2\alpha^{-4}+\alpha_2^2\alpha^{-3}+\alpha_3^2\alpha^{-2}+\alpha_4^2\alpha^{-1}\} \\
& +q_3p^{\frac{3}{5}}\{\alpha_0^3+\alpha_1^3\alpha^{-4}+\alpha_2^3\alpha^{-3}+\alpha_3^3\alpha^{-2}+\alpha_4^3\alpha^{-1}\} \\
& +q_4p^{\frac{4}{5}}\{\alpha_0^4+\alpha_1^4\alpha^{-4}+\alpha_2^4\alpha^{-3}+\alpha_3^4\alpha^{-2}+\alpha_4^4\alpha^{-1}\},
\end{aligned}$$

quibus in aequationibus deinceps valores (1.) quantitatum: α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 substituimus. Tum quantitates

$$\begin{array}{lcccc} & p'^{\frac{1}{5}} & q_2'p'^{\frac{2}{5}} & q_3'p'^{\frac{3}{5}} & q_4'p'^{\frac{4}{5}} \\ \text{deinceps hos valores:} & \left\{\begin{array}{c} \alpha_0p^{\frac{1}{5}} \\ \alpha_0^2q_2p^{\frac{2}{5}} \\ \alpha_0^3q_3p^{\frac{3}{5}} \\ \alpha_0^4q_4p^{\frac{4}{5}} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \alpha_0^2q_2p^{\frac{2}{5}} \\ \alpha_0^4q_4p^{\frac{4}{5}} \\ \alpha_0p^{\frac{1}{5}} \\ \alpha_0^3q_3p^{\frac{3}{5}} \end{array} & \begin{array}{c} \alpha_0^3q_3p^{\frac{3}{5}} \\ \alpha_0p^{\frac{1}{5}} \\ \alpha_0^4q_4p^{\frac{4}{5}} \\ \alpha_0^2q_2p^{\frac{2}{5}} \end{array} & \begin{array}{c} \alpha_0^4q_4p^{\frac{4}{5}} \\ \alpha_0^3q_3p^{\frac{3}{5}} \\ \alpha_0^2q_2p^{\frac{2}{5}} \\ \alpha_0p^{\frac{1}{5}} \end{array} \end{array}$$

nanciscuntur. Hinc elucet, radices y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, si quantitati p' deinceps valores p, $q_2^5p^2$, $q_3^5p^3$, $q_4^5p^4$ dentur, hoc modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_1 & y_4 & y_2 & y_5 & y_3 \\ y_1 & y_3 & y_5 & y_2 & y_4 \\ y_1 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 \end{array}$$

permutari. Quantitati radicali $p^{\frac{1}{5}}$ omnibus valoribus $\alpha^5 p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha^4 p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha^3 p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha p^{\frac{1}{5}}$ tributis, radices hoc modo:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_5 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \end{array}$$

permutantur.

Hinc sequitur:

Functionem quamlibet rationalem radicum y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 *aequationis quinti gradus algebraice resolubilis, quae, hisce permutationibus:*

$$1.\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccccccccccc} y_1\,y_2\,y_3\,y_4\,y_5 & \cdot & y_1\,y_4\,y_2\,y_5\,y_3 & \cdot & y_1\,y_3\,y_5\,y_2\,y_4 & \cdot & y_1\,y_5\,y_4\,y_3\,y_2 \\ y_5\,y_1\,y_2\,y_3\,y_4 & \cdot & y_5\,y_3\,y_1\,y_4\,y_2 & \cdot & y_5\,y_2\,y_4\,y_1\,y_3 & \cdot & y_5\,y_4\,y_3\,y_2\,y_1 \\ y_4\,y_5\,y_1\,y_2\,y_3 & \cdot & y_4\,y_2\,y_5\,y_3\,y_1 & \cdot & y_4\,y_1\,y_3\,y_5\,y_2 & \cdot & y_4\,y_3\,y_2\,y_1\,y_5 \\ y_3\,y_4\,y_5\,y_1\,y_2 & \cdot & y_3\,y_1\,y_4\,y_2\,y_5 & \cdot & y_3\,y_5\,y_2\,y_4\,y_1 & \cdot & y_3\,y_2\,y_1\,y_5\,y_4 \\ y_2\,y_3\,y_4\,y_5\,y_1 & \cdot & y_2\,y_5\,y_3\,y_1\,y_4 & \cdot & y_2\,y_4\,y_1\,y_3\,y_5 & \cdot & y_2\,y_1\,y_5\,y_4\,y_3 \end{array}\right.$$

factis, eadem permanet, functionem rationalem quantitatum $x, x', x'', \ldots$ *esse debere.*

§. 7.

Ponamus

$$\begin{aligned} (y_1+\alpha^4 y_2+\alpha^3 y_3+\alpha^2 y_4+\alpha y_5)^5 &= \Theta_1, \\ (y_1+\alpha^3 y_2+\alpha y_3+\alpha^4 y_4+\alpha^2 y_5)^5 &= \Theta_2, \\ (y_1+\alpha^2 y_2+\alpha^4 y_3+\alpha y_4+\alpha^3 y_5)^5 &= \Theta_3, \\ (y_1+\alpha y_2+\alpha^2 y_3+\alpha^3 y_4+\alpha^4 y_5)^5 &= \Theta_4. \end{aligned}$$

Tum erit

$$\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4 = T$$

una radicum aequationis resolventis Cl. *Lagrange* (V. Traité de la résolution des équations numériques par *Lagrange*. Note XIII.). Radices Resolventis sex sunt:

$$\begin{aligned} T = {} & 5(y_1^5+y_2^5+y_3^5+y_4^5+y_5^5)+600\,y_1y_2y_3y_4y_5-(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^5 \\ & +100\{y_1^3(y_2y_5+y_3y_4)+y_2^3(y_1y_3+y_4y_5)+y_3^3(y_1y_5+y_2y_4)+y_4^3(y_1y_2+y_3y_5) \\ & \qquad +y_5^3(y_1y_4+y_2y_3)\} \\ & +150\{y_1(y_2^2y_5^2+y_3^2y_4^2)+y_2(y_1^2y_3^2+y_4^2y_5^2)+y_3(y_1^2y_5^2+y_2^2y_4^2)+y_4(y_1^2y_2^2+y_3^2y_5^2) \\ & \qquad +y_5(y_1^2y_4^2+y_2^2y_3^2)\}, \end{aligned}$$

$$T_1 = 5(y_1^5+y_2^5+y_3^5+y_4^5+y_5^5)+600\cdot y_1y_2y_3y_4y_5-(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^5$$
$$+100\{y_1^3(y_2y_5+y_3y_4)+y_2^3(y_1y_4+y_3y_5)+y_3^3(y_1y_2+y_4y_5)+y_4^3(y_1y_5+y_2y_3)$$
$$+y_5^3(y_1y_3+y_2y_4)\}$$
$$+150\{y_1(y_2^2y_5^2+y_3^2y_4^2)+y_2(y_1^2y_4^2+y_3^2y_5^2)+y_3(y_1^2y_2^2+y_4^2y_5^2)+y_4(y_1^2y_5^2+y_2^2y_3^2)$$
$$+y_5(y_1^2y_3^2+y_2^2y_4^2)\},$$

$$T_2 = 5(y_1^5+y_2^5+y_3^5+y_4^5+y_5^5)+600\cdot y_1y_2y_3y_4y_5-(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^5$$
$$+100\{y_1^3(y_2y_4+y_3y_5)+y_2^3(y_1y_3+y_4y_5)+y_3^3(y_1y_4+y_2y_5)+y_4^3(y_1y_5+y_2y_3)$$
$$+y_5^3(y_1y_2+y_3y_4)\}$$
$$+150\{y_1(y_2^2y_4^2+y_3^2y_5^2)+y_2(y_1^2y_3^2+y_4^2y_5^2)+y_3(y_1^2y_4^2+y_2^2y_5^2)+y_4(y_1^2y_5^2+y_2^2y_3^2)$$
$$+y_5(y_1^2y_2^2+y_3^2y_4^2)\},$$

$$T_3 = 5(y_1^5+y_2^5+y_3^5+y_4^5+y_5^5)+600\cdot y_1y_2y_3y_4y_5-(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^5$$
$$+100\{y_1^3(y_2y_5+y_4y_5)+y_2^3(y_1y_4+y_3y_5)+y_3^3(y_1y_5+y_2y_4)+y_4^3(y_1y_3+y_2y_5)$$
$$+y_5^3(y_1y_2+y_3y_4)\}$$
$$+150\{y_1(y_2^2y_3^2+y_4^2y_5^2)+y_2(y_1^2y_4^2+y_3^2y_5^2)+y_3(y_1^2y_5^2+y_2^2y_4^2)+y_4(y_1^2y_3^2+y_2^2y_5^2)$$
$$+y_5(y_1^2y_2^2+y_3^2y_4^2)\},$$

$$T_4 = 5(y_1^5+y_2^5+y_3^5+y_4^5+y_5^5)+600\cdot y_1y_2y_3y_4y_5-(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^5$$
$$+100\{y_1^3(y_2y_3+y_4y_5)+y_2^3(y_1y_5+y_3y_4)+y_3^3(y_1y_4+y_2y_5)+y_4^3(y_1y_2+y_3y_5)$$
$$+y_5^3(y_1y_3+y_2y_4)\}$$
$$+150\{y_1(y_2^2y_3^2+y_4^2y_5^2)+y_2(y_1^2y_5^2+y_3^2y_4^2)+y_3(y_1^2y_4^2+y_2^2y_5^2)+y_4(y_1^2y_2^2+y_3^2y_5^2)$$
$$+y_5(y_1^2y_3^2+y_2^2y_4^2)\},$$

$$T_5 = 5(y_1^5+y_2^5+y_3^5+y_4^5+y_5^5)+600\cdot y_1y_2y_3y_4y_5-(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)^5$$
$$+100\{y_1^3(y_2y_4+y_3y_5)+y_2^3(y_1y_5+y_3y_4)+y_3^3(y_1y_2+y_4y_5)+y_4^3(y_1y_3+y_2y_5)$$
$$+y_5^3(y_1y_4+y_2y_3)\}$$
$$+150\{y_1(y_2^2y_4^2+y_3^2y_5^2)+y_2(y_1^2y_5^2+y_3^2y_4^2)+y_3(y_1^2y_2^2+y_4^2y_5^2)+y_4(y_1^2y_3^2+y_2^2y_5^2)$$
$$+y_5(y_1^2y_4^2+y_2^2y_3^2)\},$$

quarum quinque ultimae radices é prima T, omnibus quantitatum y_3, y_4, y_5 permutationibus prodeunt. Radix T viginti permutationibus (1. §[i] 6.) variari nequit, functio igitur rationalis quantitatum x, x', x'', ... est. Omnes quoque functiones radicum T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 symmetricae permutationibus (1. §[i] 6.) non variantur. Hinc sequitur:

Resolventem aequationis algebraicae resolubilis semper factorem rationalem primi et factorem rationalem quinti gradus habere.

Si in functione rationali radicum y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 expressiones (1. §[i] 5.) substituimus, generaliter expressionem

$$Q_0+Q_1p^{\frac{1}{5}}+Q_2p^{\frac{2}{5}}+Q_3p^{\frac{3}{5}}+Q_4p^{\frac{4}{5}}$$

nanciscimur, ubi Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 functiones rationales quantitatum q_2, q_3, q_4,

p, α sunt. Radix T_1 aequationis resolventis hisce permutationibus:

$$\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_1 & y_4 & y_2 & y_5 & y_3 \\ y_1 & y_3 & y_5 & y_2 & y_4 \\ y_1 & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 \end{matrix}$$

invariabilis est. Hae vero permutationes efficiuntur, si in formulis (1. §. 5.) loco α deinceps α^3, α^2, α^4 ponimus. Hinc elucet, expressionem

$$Q_0 + Q_1 p^{\frac{1}{5}} + Q_2 p^{\frac{2}{5}} + Q_3 p^{\frac{3}{5}} + Q_4 p^{\frac{4}{5}},$$

quam, expressionibus (1. §. 5.) in T substitutis, nanciscimur, quantitatem radicalem α non continere, quantitates igitur Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 functiones rationales quantitatum q_2, q_3, q_4, p esse.

Radices Resolventis T_2, T_3, T_4, T_5 radice T_1 obtinemus, si radices

$$\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{matrix}$$

deinceps hoc modo: $\begin{cases} y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2 \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_5 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{cases}$

permutamus, quae permutatio efficitur, si loco $p^{\frac{1}{5}}$ successive $\alpha p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha^2 p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha^3 p^{\frac{1}{5}}$, $\alpha^4 p^{\frac{1}{5}}$ ponimus. Ergo aequationes sequentes habebimus:

$$\begin{aligned} T_1 &= Q_0 + Q_1 p^{\frac{1}{5}} + Q_2 p^{\frac{2}{5}} + Q_3 p^{\frac{3}{5}} + Q_4 p^{\frac{4}{5}}, \\ T_2 &= Q_0 + Q_1 \alpha p^{\frac{1}{5}} + Q_2 \alpha^2 p^{\frac{2}{5}} + Q_3 \alpha^3 p^{\frac{3}{5}} + Q_4 \alpha^4 p^{\frac{4}{5}}, \\ T_3 &= Q_0 + Q_1 \alpha^2 p^{\frac{1}{5}} + Q_2 \alpha^4 p^{\frac{2}{5}} + Q_3 \alpha p^{\frac{3}{5}} + Q_4 \alpha^3 p^{\frac{4}{5}}, \\ T_4 &= Q_0 + Q_1 \alpha^3 p^{\frac{1}{5}} + Q_2 \alpha p^{\frac{2}{5}} + Q_3 \alpha^4 p^{\frac{3}{5}} + Q_4 \alpha^2 p^{\frac{4}{5}}, \\ T_5 &= Q_0 + Q_1 \alpha^4 p^{\frac{1}{5}} + Q_2 \alpha^3 p^{\frac{2}{5}} + Q_3 \alpha^2 p^{\frac{3}{5}} + Q_4 \alpha p^{\frac{4}{5}}. \end{aligned}$$

Quantitas radicalis $p^{\frac{1}{5}}$ rationaliter quantitatibus Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, p exprimi non potest. Quinque igitur Resolventis radices T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 diversae sunt, nisi aequatio

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0$$

locum habeat.

Nunc tandem ex antecedentibus hoc theorema sequitur:

Si aequatio quinti gradus irreductibilis, cuius coëfficientes functiones rationales quantitatum x, x', x'' .... sunt, algebraice resolubilis est, aequatio resolvens in aequationem primi et aequationem quinti gradus, quarum coëfficientes functiones rationales quantitatum x, x' x'' .... sunt, dissolvi potest. Haec aequatio quinti gradus aut meras, aequales radices rationales habet, aut irreductibilis est et algebraice resolvi potest.

12.

Einige Aufgaben aus der Combinationslehre.

(Von dem Herrn Lehramts-Candidaten *Weifs* zu München.)

Wegen der Verschiedenheit der Benennungen und Definitionen in den neueren combinatorischen Schriften werde zum Verständnifs des folgenden Aufsatzes, im Einklange mit ältern Werken, Folgendes bemerkt.

Werden mehrere Buchstaben aneinander gereiht, so entstehen *Complexionen;* die Buchstaben heifsen *Elemente.* Sind n Elemente gegeben, so heifsen die daraus gebildeten Complexionen:

Permutationen, wenn in ihnen *alle* gegebenen Elemente vorkommen, aber jedesmal in einer *andern Aufeinanderfolge;*

Combinationen, wenn nur m Elemente aus den gegebenen und jedesmal *andere* die Complexionen bilden und die Aufeinanderfolge *unbeachtet* bleibt;

Variationen, wenn die Complexionen auch nur aus m der gegebenen Elemente bestehen und sich von einander durch die jedesmal vorkommenden Elemente und ihre Aufeinanderfolge unterscheiden.

Eine Complexion ist von der m^{ten} *Classe,* wenn sie aus m Elementen gebildet ist. Befinden sich unter den gegebenen Elementen Gruppen von gleichen Elementen, so können auch die daraus entstehenden Complexionen gleiche Elemente enthalten. Da nur einzelne Elemente, und diese verschiedenemal wiederholt vorkommen dürfen, so entstehen daraus Complexionen, welche man Permutationen, Combinationen und Variationen mit *eingeschränkten* Wiederholungen nennen kann.

Bei bestimmten Daten wird die Anzahl der möglichen Complexionen bestimmt sein. Der Ausdruck der Anzahl der möglichen *Permutationen* mit *eingeschränkten* Wiederholungen ist, da er sich in allen combinatorischen Schriften findet, als bekannt vorauszusetzen. Nirgends fand jedoch der Verfasser des gegenwärtigen Aufsatzes den Ausdruck der Anzahl der *Combinationen* und *Variationen* mit *eingeschränkten* Wiederholungen für eine gegebene Classe. Er versucht daher hier die Auflösung dieser Aufgabe, welche für die Combinationslehre vielleicht nicht ganz ohne Bedeutung sein dürfte.

I.

1. Unter *Elementenreihe* werde eine Reihe von Gliedern verstanden, die alle einen Buchstaben gemein haben und sich nur durch die bei demselben stehenden Indices unterscheiden. Hat die Elementenreihe p Glieder, so hat die Hauptgröfse alle ganzen Zahlen von 1 bis p zu Indices.

2. Die Elementenreihen unterscheiden sich

a) Durch die in ihnen vorkommende Hauptgröfse und

b) Durch die Anzahl der Glieder.

Haben aber Elementenreihen die gleiche Hauptgröfse und eine gleiche Anzahl von Gliedern, so sind sie *identisch*.

3. Man nehme verschiedene Elementenreihen so geordnet an, dafs nie eine Reihe mit wenigeren Gliedern auf eine Reihe mit mehr Gliedern folgt. Die erste Reihe ist diejenige, welche die wenigsten Glieder enthält. Alle nachfolgenden Reihen haben deshalb alle Indices der vorhergehenden Reihen.

4. Glieder von verschiedenen Reihen mit demselben Index heifsen *ähnliche* Glieder.

5. Man sucht nun die Anzahl der Combinationen, welche entstehen, wenn aus zwei Elementenreihen immer zwei Glieder, jedoch keine ähnlichen Glieder, zusammentreten. Die Combinationen werden dadurch gebildet, dafs zu jedem Gliede der ersten Reihe alle Glieder der zweiten Reihe hinzutreten; nur jedesmal dasjenige nicht, welches denselben Index hat, wie das schon dastehende Glied der ersten Reihe. Demgemäfs ist die Anzahl der möglichen Combinationen $=p_1(p_2-1)$, wenn die erste Reihe p_1, die zweite p_2 Glieder hat.

6. Man suche die Anzahl der Combinationen, die möglich sind, wenn 3 Glieder aus 3 verschiedenen Elementenreihen zusammentreten, und zwar so, dafs in keiner Combination ähnliche Elemente vorkommen. Es habe die erste Reihe p_1, die zweite p_2 und die dritte Reihe p_3 Glieder. Man bilde zuerst die Combinationen aus den zwei ersten Reihen, nach (5.). Dies giebt $p_1(p_2-1)$ Combinationen. Zu diesen lasse man alle Glieder der dritten Reihe hinzutreten, jedoch immer diejenigen zwei nicht, die mit den schon dastehenden Gliedern der zwei ersten Reihen gleiche Indices haben. Daraus ergeben sich $p_1(p_2-1)(p_3-2)$ Combinationen.

7. Sind q Elementenreihen vorhanden, die erste mit p_1, die zweite mit p_2, die dritte mit p_3 Gliedern u. s. f., die $q$te mit p_q Gliedern, so ist die Anzahl der möglichen Combinationen, welche entstehen, wenn von jeder Reihe ein Glied, also in allem q Glieder zusammentreten, jedoch so, dafs

keine ähnlichen Glieder in einer und derselben Combination vorkommen, $=p_1(p_2-1)(p_3-2)\ldots(p_q-(q-1))$. Denn es hat dieser Ausdruck dasselbe Gesetz der Bildung wie die Ausdrücke in (5. und 6.), und es ist leicht zu beweisen, dafs das Gesetz, wenn es für k Reihen gilt, auch für $k+1$ Reihen Gültigkeit hat.

Beispiel. Es seien die Reihen a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5; d_1, d_2 gegeben. Hier ist d_1, d_2 die erste Reihe und $p_1=2$; a_1, a_2, a_3 ist die zweite Reihe und $p_2=3$; c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ist die dritte Reihe und $p_3=5$; b_1, b_2, b_3, b_3, b_5, b_6 ist die vierte Reihe und $p_4=6$. Demnach ist die Anzahl der möglichen Combinationen $=p_1(p_1-1)(p_3-2)(p_4-3)$ $=2\cdot(3-1)(5-2)(6-3)=2\cdot2\cdot3\cdot3=36$.

Die Combinationen selbst kann man nach dem in (5. und 6.) angedeuteten Verfahren herstellen. Leichter ist jedoch folgende Aufstellung:

dacb	*dacb*	*dacb*	*dacb*	*dacb*	*dacb*
1234	1253	1342	2134	2153	2341
1235	1254	1345	2135	2154	2345
1236	1256	1346	2136	2156	2346
1243	1324	1352	2143	2314	2351
1245	1325	1354	2145	2315	2354
1246	1326	1356	2146	2316	2356

8. An der ersten Stelle der Combinationen stehen hier nur Glieder der ersten Reihe, an der zweiten Stelle nur Glieder der zweiten Reihe u. s. f., an der $k$ten nur Glieder der $k$ten Reihe. Also kommen an der ersten Stelle nur die Zahlen von 1 bis p_1, an der zweiten Stelle nur die Zahlen von 1 bis p_2 u. s. f., an der $k$ten nur Zahlen von 1 bis p_k als Indices vor. Da aber $p_1 < p_2 < p_3 \ldots\ldots p_k < p_{k+1} \ldots\ldots$ ist, so kommen an den weiter rechts liegenden Stellen Indices vor, die an den vordern Stellen nicht vorkommen dürfen.

9. Daraus folgt, dafs man, sobald in irgend einer Combination auch nur von zwei Stellen die Indices vertauscht werden, eine ihrer *Zusammensetzung* nach verschiedene Complexion erhält, und also, wenn anders nicht gegen das am Schlusse von (8.) Gesagte gefehlt ist, eine andere hieher gehörige Combination entsteht.

10. Haben unter q Elementenreihen, von der $s$ten anfangend, r Reihen alle dieselbe Anzahl von p_s Gliedern, so werden auch in der $s$ten, $s+1$ten, ..., $s+r-1$ten Stelle der Combinationen, welche die Glieder dieser r Reihen enthalten, nur Indices von 1 bis p_s vorkommen, und man kann die Indices

dieser Stellen beliebig vertauschen: immer wird man dadurch neue Combinationen von der vorgelegten Art erhalten. Der Ausdruck für die Anzahl der Combinationen dieser Art wird blofs darin von dem in (7.) sich unterscheiden, dafs r Combinationen p hintereinander den Index s haben. Die Anzahl ist demnach $=p_1(p_2-1)(p_3-2)\dots(p_s-(s-1))(p_s-s)\dots(p_s-(r+s-2))\dots(p_l-(q-1))$.

11. Versetzt man in einer Combination dieser Art die Zeiger der r Stellen so oft es angeht, während alle andern Stellen unverändert bleiben, so erhält man immer Combinationen von der vorgelegten Art. Daraus ist leicht zu sehen, dafs man die ganze Zahl der hierher gehörigen Combinationen so *theilen* kann, dafs sich die Combinationen eines und desselben Theils blofs durch die verschiedenartige Stellung der r Indices an der $s$ten, $s+1$ten, u. s. f., $s+r-1$ten Stelle unterscheiden. Da aber diese r Indices wie bekannt $r!=1\cdot2\cdot3\dots r$ Stellungen einnehmen können, so ist, da die ganze Anzahl der Combinationen gleich dem Producte aus der Anzahl der Versetzungen der r Indices in die Anzahl der Theile ist, letztere Anzahl

$$=\frac{p_1(p_1-1)\dots(p_s-(s-1))(p_s-s)\dots(p_s-(r+s-2))\dots(p_l-(q-1))}{1\cdot2\dots r}.$$

Sind aber die genannten r Elementenreihen identisch, so gelten offenbar die Combinationen desselben *Theils* nur für *eine* Combination, und es giebt also in diesem Falle nur so viele Combinationen, als *Theile;* folglich ist ihre Anzahl

$$=\frac{p_1(p_1-1)\dots(p_s-(s-1))(p_s-s)\dots(p_s-(r+s-2))\dots(p_l-(q-1))}{1\cdot2\dots r}.$$

12. Auf ähnliche Weise ist leicht zu zeigen, dafs für eine Gruppe von r_1 identischen Reihen mit p_1 Gliedern, sodann für eine Gruppe von r_2 identischen Reihen mit p_2 Gliedern u. s. f., endlich für eine Gruppe von r_q identischen Reihen mit p_q Gliedern, die Anzahl der Combinationen, welche entstehen, wenn $r_1+r_2+\dots+r_q$ Glieder (aus jeder Reihe ein Glied) zusammentreten, und zwar so, dafs keine ähnlichen Glieder in einer Combination vorkommen, gleich ist:

$$\frac{p_1(p_1-1)\dots(p_1-(r_1-1))\times(p_2-r_1)(p_2-(r_1+1))\dots(p_2-(r_1+r_2-1))}{1\cdot2\dots r_1\quad\times\quad1\cdot2\dots r_2}$$

$$\times\frac{(p_3-(r_1+r_2))(p_3-(r_1+r_2+1))\dots(p_3-(r_1+r_2+r_3-1))\dots(p_q-(r_1+r_2\dots r_{q-1}))\dots(p_q-(r_1+r_2\dots r_q-1))}{1\cdot2\dots3\dots1\cdot2\dots r_q}$$

13. Aus der Form des Zählers dieses Ausdrucks ist leicht zu erkennen, wie die Combinationen, für welche der Ausdruck gilt, gebildet worden sind. Es hat der Zähler so viele Factoren, als Reihen zur Aufstellung angewendet wurden. Ferner hat der $k$te Factor, der $=(p_l-(k-1))$ ist, ein p, welches

von der Reihe, die die *k*ten Stellen der Combinationen mit ihren Gliedern besetzt, die Anzahl der Glieder angiebt.

14. Ist irgend ein Factor $(p_l-(k-1))$ gleich Null, so ist der ganze Ausdruck $=0$. Es giebt also dann keine Combinationen. Aus $p_l-(k-1)=0$ folgt $p_l=k-1$; das heifst: sobald eine Reihe nicht wenigstens gerade soviele Glieder hat, als die Ordnungszahl der Stelle, die sie mit ihren Gliedern besetzen soll, beträgt, so lassen sich *keine* Combinationen dieser Art bilden. Haben die Reihen alle eine ungleiche Anzahl Glieder, so ist r immer wenigstens $=k$; also ist dann die Bildung immer möglich.

15. Sind m Reihen gegeben, so gehören die Combinationen zur *m*ten Classe.

16. Die Anzahl der *Variationen* dieser Art findet sich, wenn man die *Combinations*zahl mit der *Permutations*zahl multiplicirt.

Alle Combinationen haben bei m Reihen m verschiedene Glieder: also ist die Permutationszahl $=1\cdot2\cdot3\ldots\ldots m!$

Die letzten zwei Bemerkungen gelten nur, wenn man die Glieder der Reihen als Elemente der Combinationen ansieht.

II.

1. Kommen bei Combinationen Gruppen von gleichen Elementen vor, so stelle man sich, da die Stellung der Elemente beliebig ist, *erstens* alle gleichen Elemente hintereinander stehend vor; *zweitens*, die Gruppen der gleichen Elemente so geordnet, dafs keine Gruppe von einer gröfsern Zahl gleicher Elemente auf eine Gruppe von weniger gleichen Elementen folgt.

Die allgemeine Form einer solchen Combination ist folgende:

Zuerst kommen r_1 Elemente vor, die alle $p_1$mal gesetzt sind;
Alsdann kommen r_2 - - - - - - p_2 - - - - ;
Sodann kommen r_3 - - - - - - p_3 - - - - ;
. . . .
Endlich kommen r_q Elemente vor, die alle $p_q$mal gesetzt sind;

wobei $p_1>p_2>p_3>\ldots\ldots>p_q$ ist. Die Classenzahl m dieser Combination ist $=r_1p_1+r_2p_2+r_3p_3+\ldots\ldots+r_qp_q$.

2. Bei *eingeschränkten* Wiederholungen werden *nicht alle* gegebenen Elemente p_1, p_2, p_3, ... $p_q$mal gesetzt werden dürfen, sondern es werden

n_{p_1} Elemente p_1 mal,
n_{p_2} Elemente p_2 mal,
n_{p_3} Elemente p_3 mal,
. . . .
n_{p_q} Elemente p_q mal vorkommen dürfen.

Jedes Element aber, welches p_1 mal gesetzt werden darf, darf auch p_2 mal gesetzt werden; ebenso jedes Element, welches p_2 mal gesetzt werden darf, kann auch p_3 mal gesetzt werden, u. s. f. Daraus folgt, dafs n_{p_2} nicht kleiner als n_{p_1}, n_{p_3} nicht kleiner als n_{p_2} u. s. f., n_{p_q} nicht kleiner als alle vorhergehenden n sein kann.

3. Statt ein Element mehrmals zu wiederholen, setze man der Kürze wegen dieses Element einfach hin, und die Zahl, die anzeigt, wie oft sie wiederholt werden soll, als Exponent daran. Die oben betrachtete Combination besteht dann aus r_1 Potenzen mit dem Exponenten p_1; dann aus r_2 Potenzen mit dem Exponenten p_2; dann aus r_3 Potenzen mit dem Exponenten p_3 u. s. f.; endlich aus r_q Potenzen mit dem Exponenten p_q.

4. Aus den gegebenen Elementen lassen sich r_1 identische Elementenreihen bilden, welche als Glieder n_{p_1} Potenzen haben, mit dem Exponenten p_1; ferner r_2 identische Elementenreihen von n_{p_2} Potenzen mit dem Exponenten p_2; dann r_3 identische Elementenreihen von n_{p_3} Potenzen mit dem Exponenten p_3 u. s. f.; endlich r_q identische Elementenreihen von n_{p_q} Potenzen mit dem Exponenten p_q. Stellt man wirklich diese Reihen nach der angegebenen Ordnung auf, so kommen alle Glieder einer vorhergehenden Reihe in einer folgenden vor und die Reihen sind nach der Anzahl ihrer Glieder aufsteigend geordnet. Bildet man nun aus diesen Elementenreihen nach (I.) *Combinationen*, so besteht eine Combination zuerst aus r_1 Potenzen mit dem Exponenten p_1, dann aus r_2 Potenzen mit dem Exponenten p_2, ferner aus r_3 Potenzen mit dem Exponenten p_3 u. s. f., zuletzt aus r_q Potenzen mit dem Exponenten p_q, und es haben also die hieraus entstehenden Combinationen alle die verlangte Form.

5. Die Anzahl der möglichen Combinationen für die bestimmten Data findet sich nun auch nach (I.), wenn man dort in (12.) n_{p_1}, n_{p_2}, ... n_{p_q} statt p_1, p_2, ... p_q setzt. Also ist die Anzahl aller möglichen Combinationen von der allgemeinen, oben angegebenen Form:

$$= \frac{n_{p_1}(n_{p_1}-1)\dots(n_{p_1}-(r_1-1))(n_{p_2}-r_1)(n_{p_2}-(r_1+1))\dots(n_{p_2}-(r_1+r_2-1))}{1\cdot 2\dots r_1\times 1\cdot 2\dots r_2}$$

$$\times\cdot\frac{(n_{p_3}-(r_1+r_2))(n_{p_3}-(r_1+r_2+1))\dots(n_{p_3}-(r_1+r_2+r_3-1))}{1\cdot 2\dots r_3}$$

$$\times\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\times\cdot\frac{(n_{p_q}-(r_1+r_2+r_3\dots r_{q-1}))(n_{p_q}-(r_1+r_2+r_3\dots r_{q-1}+1))\dots(n_{p_q}-(r_1+r_2+r_3\dots r_q-1))}{1\cdot 2\dots r_q}.$$

6. Es ist

$$m = \overbrace{p_1+p_1+p_1\dots+p_1}^{r_1}+\overbrace{p_2+p_2+p_2\dots+p_2}^{r_2}+\overbrace{p_3+p_3+p_3\dots+p_3}^{r_3}+\dots\overbrace{p_q+p_q+p_q\dots+p_q}^{r_q}.$$

Mit dieser Gleichung ist die Form der entstehenden Combination gegeben, und aus ihr ist der Ausdruck für die Anzahl der Combinationen leicht zu finden. Sind nämlich, wie bisher überall angenommen wurde, die p nach ihrem numerischen Werthe abwärts geordnet, so dafs $p_1 > p_2 > p_3 \dots p_q$ ist, so darf man nur in dieser Ordnung jedes p als Index von n setzen, von den daraus gebildeten n die Differenzen aufstellen, so, dafs man vom ersten die Zahl 0, vom zweiten 1, vom dritten 2 u. s. f., vom $k$ten $k-1$ abzieht, sodann diese Differenzen mit einander multiplicirt und endlich das Product mit dem Producte der Facultäten $r_1!\; r_2!\; r_3! \dots r_q!$ dividirt.

7. So wie sich aus der Gleichung (6.) die Gleichung (5.) aufstellen läfst, so läfst sich auch für die Gleichung (5.) die Gleichung (6.) bilden; das heifst: man ist durch die obige Bezeichnung immer im Stande, sogleich aus der Construction des Ausdrucks für die Anzahl der Combinationen die Form der Combinationen selbst zu erkennen.

8. In der Gleichung (6.), welche die Form aller Combinationen mit zugelassenen Wiederholungen zur $m$ten Classe ausdrückt, bedeuten $p_1, p_2, p_3, \dots p_q$ die Exponenten der einzelnen Elemente der Combinationen; sie werden in speciellen Fällen $= 1, 2, 3, \dots m$ sein; und gröfser als m kann kein p sein. Die r zeigen an, wie oft die eben genommenen p stehen müssen, damit aus ihrer Summe die Zahl m entspringe; sie werden in speciellen Fällen $= 0, 1, 2, 3, \dots m$ sein. So oft sich nun aber für ein bestimmtes m aus den p, das heifst aus den Zahlen $1, 2, 3, \dots m$, die Zahl m bilden läfst: so vielerlei Formen von Combinationen wird es für die bestimmte Classe geben.

9. Sind nun n_1 Elemente gegeben, die 1mal gesetzt werden dürfen;
Ferner n_2 - - - - - 2 - - - - ;
Sodann n_3 - - - - - 3 - - - - ;
. . . .
Endlich n_m - - - - - m - - - - ,
und man verlangt die mögliche Zahl der Combinationen für die $m$te Classe, so suche man zuerst alle möglichen Formen dadurch, dafs man die Zahl m auf alle mögliche Arten durch Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m (wobei jede von ihnen mehrmals stehen darf) bildet, oder alle möglichen Gleichungen analog (7.) aufstellt. Für jede Form wird sich dann alsbald nach (5.) die mögliche Zahl finden, und addirt man die so erlangten Ausdrücke, so erhält man die verlangte Anzahl aller Combinationen.

Beispiel. Es sei die Anzahl der möglichen Combinationen mit *eingeschränkten* Wiederholungen für die 5te Classe anzugeben, wenn n_1 Elemente 1mal, n_2 Elemente 2mal, n_3 Elemente 3mal, n_4 Elemente 4mal, n_5 Elemente 5mal gesetzt werden dürfen.

Hier ist $m = 5 = 5$: diese Form hat n_5 Combinationen,
$m = 5 = 41$ - - - $n_4(n_1-1)$ - - -
$m = 5 = 32$ - - - $n_3(n_2-1)$ - - -
$m = 5 = 311$ - - - $\frac{n_3(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot 2}$ - - -
$m = 5 = 221$ - - - $\frac{n_2(n_2-1)(n_1-2)}{1\cdot 2}$ - - -
$m - 5 = 2111$ - - - $\frac{n_2(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$ - - -
$m = 5 = 11111$ - - - $\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ - -

Demnach ist die gesuchte Anzahl

$$= n_5 + n_4(n_1-1) + n_3(n_2-1) + \frac{n_3(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot 2} + \frac{n_2(n_2-1)(n_1-2)}{1\cdot 2}$$
$$+ \frac{n_2(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

10. Alle Combinationen $m$ter Classe, so oft es angeht permutirt, geben die möglichen Variationen dieser Classe. Aus jeder Combination entspringen demnach so viele Variationen als es Permutationen der Combination giebt. Alle Combinationen von gleicher Zusammensetzung haben gleiche Permutationszahlen. Man findet folglich die Anzahl der Variationen, die aus einer gege-

benen Anzahl Combinationen von derselben Form entstehen, wenn man mit der für alle gleichen Permutationszahl die Anzahl der Combinationen multiplicirt. Ist die Zusammensetzung einer Combination bekannt, so läfst sich auch leicht die Permutationszahl finden.

Die Zusammensetzung obiger verschiedenen Combinationsformen von einer Classe ist aber, wie schon bemerkt, leicht zu ersehen; also ist auch die Permutationszahl leicht zu finden. Z. B. von der allgemeinen Form in (6.) ist die Permutationszahl $= \frac{m!}{(p_1!)^{r_1}(p_2!)^{r_2}(p_3!)^{r_3}\dots(p_q!)^{r_q}} = p$. Wenn man mit diesem Ausdruck die Gleichung in (5.) mutiplicirt, so erhält man die Anzahl der Variationen für die $m$te Classe von der oben angegebenen allgemeinen Form.

In gegebenen speciellen Fällen suche man also zuerst die Combinationszahl, welche mehrere Posten hat, von jedem Posten dann die Permutationszahl, multiplicire damit die Posten und addire die Producte, welche Summe hierauf die mögliche Anzahl der Variationen von der $m$ten Classe giebt. Für das obige Beispiel ist auf diese Weise die Anzahl der Variationen

$$= \frac{5!}{5!}n_5 + \frac{5!}{4!}n_4(n_1-1) + \frac{5!}{3!2!}(n_3(n_2-1)) + \frac{5!}{3!}\cdot\frac{n_3(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}$$
$$+ \frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{n_2(n_2-1)(n_1-2)}{1\cdot2} + \frac{5!}{2!}\cdot\frac{n_2(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}$$
$$+ 5!\cdot\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5};$$

also ist die Anzahl der Variationen für die 5te Classe

$$= n_5 + 5n_4(n_1-1) + 10n_3(n_2-1) + 10n_3(n_1-1)(n_1-2) + 15n_2(n_2-1)(n_1-2)$$
$$+ 10n_2(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3) + n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_3-3)(n_1-4).$$

11. Es folgen hier die Ausdrücke für die Anzahl der Combinationen aus Variationen bis zur 10ten Classe. Bei den Variationen sind die Factoren, welche mehrere Glieder gemein haben, herausgesetzt, um die Vorzahlen beweglicher zu machen und die Rechnung in speciellen Fällen zu erleichtern.

Anzahl der Combinationen.

1te Classe $= n_1$,

2te Classe $= n_2 + \frac{n_1(n_1-1)}{1\cdot2}$,

3te Classe $= n_3 + n_2(n_1-1) + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2\cdot3}$,

$$\text{4te Classe} = n_4 + n_3(n_1-1) + \frac{n_2(n_2-1)}{1\cdot2} + \frac{n_2(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}$$
$$+ \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4},$$

$$\text{5te Classe} = n_5 + n_4(n_1-1) + n_3\left[(n_2-1) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}\right]$$
$$+ n_2\left[\frac{(n_2-1)(n_1-2)}{1\cdot2} + \frac{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}\right] + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-4)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots5},$$

$$\text{6te Classe} = n_6 + n_5(n_1-1) + n_4\left[(n_2-1) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}\right]$$
$$+ n_3\left[\frac{(n_3-1)}{1\cdot2} + (n_2-1)(n_1-2) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}\right]$$
$$+ n_2\left[\frac{(n_2-1)(n_2-2)}{1\cdot2\cdot3} + \frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot1\cdot2} + \frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-4)}{1\cdot2\ldots\ldots4}\right]$$
$$+ \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-5)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots6},$$

$$\text{7te Classe} = n_7 + n_6(n_1-1) + n_5\left[(n_2-1) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}\right]$$
$$+ n_4\left[(n_3-1) + (n_2-1)(n_1-2) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}\right]$$
$$+ n_3\left[\frac{(n_3-1)(n_1-2)}{1\cdot2} + \frac{(n_2-1)(n_2-2)}{1\cdot2} + \frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-4)}{1\cdot2\ldots\ldots4}\right]$$
$$+ n_2\left[\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3} + \frac{(n_2-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-4)}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}\right.$$
$$\left. + \frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-5)}{1\cdot2\ldots\ldots5}\right] + \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-6)}{1\cdot2\cdot3\ldots\ldots7},$$

$$\text{8te Classe} = n_8 + n_7(n_1-1) + n_6\left[(n_2-1) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}\right]$$
$$+ n_5\left[(n_3-1) + (n_2-1)(n_1-2) + \frac{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}\right]$$
$$+ n_4\left[\frac{(n_4-1)}{1\cdot2} + (n_3-1)(n_1-2) + \frac{(n_2-1)(n_2-2)}{1\cdot2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n_2-1)(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2} + \frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-4)}{1\cdot2\ldots\ldots4}\right]$$
$$+ n_3\left[\frac{(n_3-1)(n_2-2)}{1\cdot2} + \frac{(n_2-1)(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2\cdot1\cdot2} + \frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)}{1\cdot2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot3} + \frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-5)}{1\cdot2\ldots\ldots5}\right]$$

$$+n_2\Big[\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)\dots(n_1-5)}{1\cdot2\cdot1\cdot2\dots4}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-6)}{1\cdot2\dots6}\Big]$$

$$+\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-7)}{1\cdot2\cdot3\dots8},$$

$$\text{9te Classe} = n_9+n_8(n_1-1)+n_7\Big[(n_2-1)+\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}\Big]$$

$$+n_6\Big[(n_3-1)+(n_2-1)(n_1-2)+\frac{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}\Big]$$

$$+n_5\Big[(n_4-1)+(n_3-1)(n_1-2)+\frac{(n_2-1)(n_2-2)}{1\cdot2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-4)}{1\cdot2\dots4}\Big]$$

$$+n_4\Big[\frac{(n_4-1)(n_1-2)}{1\cdot2}+(n_3-1)(n_2-2)+\frac{(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)}{1\cdot2}+\frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot3}$$

$$+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-5)}{1\cdot2\dots5}\Big]$$

$$+n_3\Big[\frac{(n_3-1)(n_3-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(n_3-1)(n_2-2)(n_1-3)}{1\cdot2}+\frac{(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot1\cdot2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)\dots(n_1-5)}{1\cdot2\dots4}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-6)}{1\cdot2\dots6}\Big]$$

$$+n_2\Big[\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_1-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)(n_1-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)\dots(n_1-6)}{1\cdot2\cdot1\cdot2\dots5}+\frac{(n_1-1)(u_1-2)\dots(n_1-7)}{1\cdot2\dots7}\Big]$$

$$+\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-8)}{1\cdot2\cdot3\dots9},$$

$$\text{10te Classe} = n_{10}+n_9(n_1-1)+n_8\Big[(n_2-1)+\frac{(n_1-1)(n_1-2)}{1\cdot2}\Big]$$

$$+n_7\Big[(n_3-1)+(n_2-1)(n_1-2)+\frac{(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2\cdot3}\Big]$$

$$+n_6\Big[(n_4-1)+(n_3-1)(n_1-2)+\frac{(n_2-1)(n_2-2)}{1\cdot2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot2}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\dots(n_1-4)}{1\cdot2\dots4}\Big]$$

$$+n_5\Big[\frac{(n_5-1)}{1\cdot 2}+(n_4-1)(n_1-2)+(n_3-1)(n_2-2)$$

$$+\frac{(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot 2}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)}{1\cdot 2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-5)}{1\cdot 2\ldots\ldots 5}\Big]$$

$$+n_4\Big[\frac{(n_4-1)(n_2-2)}{1\cdot 2}+\frac{(n_4-1)(n_1-2)(n_1-3)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}+\frac{(n_3-1)(n_3-2)}{1\cdot 2}$$

$$+(n_3-1)(n_2-2)(n_1-3)+\frac{(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_4-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-6)}{1\cdot 2\ldots\ldots 6}\Big]$$

$$+n_3\Big[\frac{(n_3-1)(n_3-2)(n_1-3)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(n_3-1)(n_2-2)(n_2-3)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}$$

$$+\frac{(n_3-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}+\frac{(n_3-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-5)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\ldots\ldots 4}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_1-4)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)(n_1-5)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-6)}{1\cdot 2\ldots\ldots 5}+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-7)}{1\cdot 2\ldots\ldots 7}\Big]$$

$$+n_2\Big[\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_2-4)}{1\cdot 2\ldots\ldots 5}+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_1-4)(n_1-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}$$

$$+\frac{(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)\ldots\ldots(n_1-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\ldots\ldots 4}+\frac{(n_2-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-7)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\ldots\ldots 6}$$

$$+\frac{(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-8)}{1\cdot 2\ldots\ldots 8}\Big]+\frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots\ldots(n_1-9)}{1\cdot 2\ldots\ldots 10}.$$

Anzahl der Variationen.

1te Classe $= n_1$,

2te Classe $= n_2+n_1(n_1-1)$,

3te Classe $= n_3+3n_2(n_1-1)+n_1(n_1-1)(n_1-2)$,

4te Classe $= n_4+4n_3(n_1-1)+3n_2[(n_2-1)+2(n_1-1)(n_1-2)]$
$+n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)$,

5te Classe $= n_5+5n_4(n_1-1)+10n_3[(n_2-1)+(n_1-1)(n_1-2)]$
$+5n_2[3(n_2-1)(n_1-2)+2(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)]$
$+n_1(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)$,

. . . .

$$
\begin{aligned}
\text{6te Classe} = {} & n_6 + 6n_5(n_1-1) + 15n_4[(n_2-1)+(n_1-1)(n_1-2)] \\
& + 10n_3[(n_3-1)+6(n_2-1)(n_1-2)+2(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)] \\
& + 15n_2[(n_2-1)(n_2-2)+3(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3) \\
& \quad + (n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4)] + n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{7te Classe} = {} & n_7 + 7n_6(n_1-1) + 21n_5[(n_2-1)+(n_1-1)(n_1-2)] \\
& + 35n_4[(n_3-1)+3(n_2-1)(n_1-2)+(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3] \\
& + 35n_3[2(n_3-1)(n_1-2)+3(n_2-1)(n_2-2) \\
& \quad + 6(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)+(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4)] \\
& + 21n_2[5(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)+5(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4) \\
& \quad + (n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)] + n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-6),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{8te Classe} = {} & n_8 + 8n_7(n_1-1) + 28n_6[(n_2-1)+(n_1-1)(n_1-2)] \\
& + 56n_5[(n_3-1)+3(n_2-1)(n_1-2)+(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)] \\
& + 35n_4[(n_4-1)+8(n_3-1)(n_1-2)+6(n_2-1)(n_2-2) \\
& \quad + 12(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)+2(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4)] \\
& + 56n_3[5(n_3-1)(n_2-2)+5(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3) \\
& \quad + 15(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)+10(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4) \\
& \quad + (n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)] \\
& + 7n_2[15(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)+60(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4) \\
& \quad + 30(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)+4(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-6)] \\
& \quad + n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-7),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{9te Classe} = {} & n_9 + 9n_8(n_1-1) + 36n_7[(n_2-1)+(n_1-1)(n_1-2)] \\
& + 84n_6[(n_3-1)+3(n_2-1)(n_1-2)+(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)] \\
& + 126n_5[(n_4-1)+4(n_3-1)(n_1-2)+3(n_2-1)(n_2-2) \\
& \quad + 6(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)+(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4)] \\
& + 63n_4(n_4-1)(n_1-2)+20(n_3-1)(n_2-2) \\
& \quad + 20(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)+30(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3) \\
& \quad + 20(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)+2(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)] \\
& + 28n_3[10(n_3-1)(n_3-2)+90(n_3-1)(n_2-2)(n_1-3) \\
& \quad + 30(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)+45(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3) \\
& \quad + 135(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4) \\
& \quad + 45(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)+3(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-6)] \\
& + 9n_2[105(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_1-4) \\
& \quad + 140(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)(n_1-5) \\
& \quad + 42(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-6)+4(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-7)] \\
& \quad + n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-8),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{10te Classe} = {} & n_{10} + 10n_9(n_1-1) + 45n_8[(n_2-1)+(n_1-1)(n_1-2)] \\
& + 30n_7[4(n_3-1)+12(n_2-1)(n_1-2)+4(n_1-1)(n_1-2)(n_1-3)] \\
& + 210n_6[(n_4-1)+4(n_3-1)(n_1-2)+3(n_2-1)(n_2-2) \\
& \quad + 6(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)+(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-4)] \\
& + 126n_5[(n_5-1)+10(n_4-1)(n_1-2)+20(n_3-1)(n_2-2) \\
& \quad + 20(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)+30(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3) \\
& \quad + 20(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)+2(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)] \\
& + 105n_4[15(n_4-1)(n_2-2)+15(n_4-1)(n_1-2)(n_1-3) \\
& \quad + 20(n_3-1)(n_3-2)+120(n_3-1)(n_2-2)(n_1-3) \\
& \quad + 40(n_3-1)(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)+30(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3) \\
& \quad + 90(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4) \\
& \quad + 30(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5)+2(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-6)] \\
& + 20n_3[140(n_3-1)(n_3-2)(n_1-3)+315(n_3-1)(n_2-2)(n_2-3) \\
& \quad + 630(n_3-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4) \\
& \quad + 105(n_3-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-5) \\
& \quad + 630(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_1-4) \\
& \quad + 630(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)(n_1-5) \\
& \quad + 126(n_2-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-6)+6(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-7)] \\
& + 45n_2[21(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_2-4) \\
& \quad + 105(n_2-1)(n_2-2)(n_2-3)(n_1-4)(n_1-5) \\
& \quad + 70(n_2-1)(n_2-2)(n_1-3)(n_1-4)\ldots.(n_1-6) \\
& \quad + 14(n_2-1)(n_1-2)(n_1-3)\ldots.(n_1-7) \\
& \quad + (n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-8)]+n_1(n_1-1)(n_1-2)\ldots.(n_1-9).
\end{aligned}$$

Beispiele.

1. Ist $n_1 = n_2 = n_3 \ldots. = n_m = n$, so können alle Elemente, so oft als es die Classenzahl gestattet, wiederholt werden. Man erhält alsdann für die Combinationen von der $n$ten Classe den Ausdruck $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.m}$. Setzt man wirklich in den obigen Formeln alle n gleich n, so ergiebt sich:

Für die 1te Classe $= n$. Für die 2te Classe $= \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$. ....

Für die 10te Classe $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+9)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 10}$;

wie es sein mufs. In den Formeln für die Variationen alle n gleich n gesetzt, erhält man n, n^2, n^3, ... n^{10} für die 1te, 2te, 3te, ... 10te Classe; wie es ebenfalls sein mufs. Für die Variationen mit uneingeschränkten Wiederholungen ergiebt sich für die $m$te Classe n^m.

2. $n_1 = n$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$, ... $n_m = 0$ heifst: es darf kein Element mehr als 1mal gesetzt werden. Dies giebt für die Combinationen von der 1ten, 2ten, 3ten etc., 10ten Classe n, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, ... $\frac{n(n-1)\dots(n-9)}{1\cdot 2\dots 10}$ und für die Variationen von der 1ten, 2ten, 3ten etc., 10ten Classe n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ etc., $n(n-1)\dots(n-9)$; wie es bekanntlich sein mufs.

3. Es soll angegeben werden, wie viele Combinationen der Ausdruck $a_1^6 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^2 a_6^2 a_7^2 a_8^2 a_9^1 a_{10}$ für die 4te Classe zuläfst. Hier ist $n_1 = 10$, $n_2 = 8$, $n_3 = 4$, $n_4 = 4$; also giebt es deren

$$4+4\cdot 9+8\left\{\frac{7}{2}+\frac{9\cdot 8}{2}\right\}+\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 40+4\cdot 79+210 = 566.$$

4. Es soll angegeben werden, wie viele Variationen 4ter Classe man aus dem Ausdrucke $a^6 b^5 c^4 d^4 e^3 f^3 g^3 h^2 k^2 l m n$ erhält. Hier ist $n_1 = 12$, $n_2 = 9$, $n_3 = 7$, $n_4 = 4$, also giebt es deren

$$4+4\cdot 7\cdot 11+27\cdot[8+2\cdot 11\cdot 10]+12\cdot 11\cdot 10\cdot 9$$
$$= 4+308+6156+11880 = 18348 \text{ Variationen.}$$

5. *a.* Die 10te Combinationsclasse hat vom Ausdrucke $a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6$ 6 Combinationen; denn hier ist $n_1 = 6$, $n_2 = 5$, $n_3 = n_4 \dots = n_{10} = 0$, also erhält man $\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2}+0 = 6$.

b. Die 10te Variationsclasse aber hat $45\cdot(21\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot +105\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2) = 1247400$.

Von 3. bis 5. *a.* hat der Verfasser die Complexionen wirklich dargestellt und die Zahlen richtig befunden.

6. Auf wie viele, bezüglich der Farben verschiedene Weise lassen sich aus 4 weifsen, 3 rothen, 3 grünen, 2 gelben, 5 blauen Bändern und 1 schwarzen Bande 4streifige Bänder zusammensetzen?

Ist bei der Aufeinanderfolge keine Verschiedenheit bedungen, so mufs man für die 4te Combinationsclasse die Anzahl der Combinationen suchen. Es ist $n_1 = 6$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$, $n_4 = 2$, und dies giebt

$$2+4\cdot 5+\frac{5\cdot 4}{2}+\frac{5\cdot 5\cdot 4}{2}+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 2+20+10+50+15 = 97.$$

Ist für die Aufeinanderfolge der Streifen eine Verschiedenheit der entstehenden Bänder bedungen, so ist die Anzahl der Variationen für die 4te Classe zu suchen. Dies giebt

$$2+4\cdot 4\cdot 5+3\cdot 5(4+40)+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 2+80+660+360 = 1102.$$

München am 3ten März 1847.

13.

Sur quelques théorèmes de la géométrie de position. Suite du mémoire tome XXXI p. 213.

(Par M. *A. Cayley* de Cambridge.)

---

§. III.

Lorsque j'avais sous la plume la première partie de ce mémoire, je ne savais pas que la dernière partie du théorème de M. *Steiner* sur l'hexagramme de *Pascal* (savoir que les vingt points d'intersection des soixante droites sont situés, par quatre, dans quinze droites) avait déjà été démontrée d'une manière aussi simple qu'élégante par M. *Plücker* dans son mémoire „Über ein neues Princip der Geometrie" (tome V p. 269). En supposant maintenant cette démonstration connue, je veux examiner de plus près la corrélation de ces vingt points, en adoptant une notation plus commode.

Soit $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6: cette permutation peut être nommée ***directe*** ou ***inverse***, selon qu'elle est formée par un nombre pair ou impair d'inversions. Des six permutations $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$, $\alpha\delta\gamma\zeta\varepsilon\beta$, $\alpha\zeta\gamma\beta\varepsilon\delta$; $\alpha\delta\gamma\beta\varepsilon\zeta$, $\alpha\beta\gamma\zeta\varepsilon\delta$, $\alpha\zeta\gamma\delta\varepsilon\beta$ les trois premières ou les trois dernières sont ***directes***. Nous représenterons les trois permutations directes par $(\alpha\gamma\varepsilon)$. Les trois droites que donne le théorème de *Pascal*, appliqué aux hexagones, correspondantes à ce symbole, se coupent dans un des vingt points dont il s'agit: point qui peut être représenté par la même notation $(\alpha\gamma\varepsilon)$. En supposant que $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ est une permutation directe, le point $\alpha\gamma\varepsilon$ correspond au point $\binom{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$ de M. *Plücker*. Partout dans cette section on pourra changer les mots „directe" et „inverse."

Les six permutations des lettres $\alpha, \gamma, \varepsilon$ ne donnent qu'un seul point; de manière que les vingt points, dont il s'agit, sont

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156,
234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456.

Or, pour trouver comment il faudra combiner ces points, j'écris

$$\begin{matrix}\alpha\gamma\varepsilon\\ \beta\delta\zeta\end{matrix}$$

et je tire delà le système

$$\begin{array}{cccc} \alpha\gamma\varepsilon & \alpha\delta\zeta & \beta\gamma\zeta & \beta\delta\varepsilon \\ \beta\delta\zeta, & \beta\gamma\varepsilon, & \alpha\delta\varepsilon, & \alpha\gamma\zeta. \end{array}$$

Les quatre points

$$\alpha\gamma\varepsilon,\quad \alpha\delta\zeta,\quad \beta\gamma\zeta,\quad \beta\delta\varepsilon$$

seront situés sur la même droite, que l'on peut représenter par $\alpha\beta.\gamma\delta.\varepsilon\zeta$. Les quinze combinaisons, quatre à quatre, des vingt points, seront

A.

135, 146, 236, 245	dans la droite	12.34.56
136, 154, 234, 256	- - -	12.35.64
134, 165, 235, 264	- - -	12.36.45
146, 152, 342, 356	- - -	13.45.62
142, 165, 345, 362	- - -	13.46.25
145, 126, 346, 325	- - -	13.42.56
152, 163, 453, 462	- - -	14.56.23
153, 126, 456, 423	- - -	14.52.36
156, 132, 452, 436	- - -	14.53.62
163, 124, 564, 523	- - -	15.62.34
164, 132, 562, 534	- - -	15.63.42
162, 143, 563, 542	- - -	15.64.23
124, 135, 625, 634	- - -	16.23.45
125, 143, 623, 645	- - -	16.24.53
123, 154, 624, 653	- - -	16.25.34,

où les droites s'obtiennent en permutant dans 12.34.56 d'abord les derniers trois numéros et puis dans ces trois permutations les derniers cinq numéros. Par là la manière de trouver les droites est claire.

Cette énonciation des points et des droites, dont il s'agit, en même temps qu'elle est parfaitement symétrique, est la seule qui se présente naturellement. Cependant la symétrie en est si compliquée et si peu manifeste qu'il sera bon d'adopter une autre notation. Pour cela, je forme le tableau auxiliaire suivant, dont l'arrangement est assez clair:

135	*ace*	351	*cea*	513	*eac*
246	*bdf*	246	*fbd*	246	*dfb*
146	*acb*	346	*cef*	546	*ead*
235	*edf*	251	*abd*	213	*cfb*
236	*acd*	256	*ceb*	216	*eaf*
145	*bef*	341	*fad*	543	*dcb*
245	*acf*	241	*ced*	243	*eab*
136	*bde*	356	*fba*	516	*dfc*

Delà, en écrivant

$$B.\quad\left\{\begin{array}{ll} 123 = bcf, & 234 = abe, \\ 124 = cde, & 235 = def, \\ 125 = abd, & 236 = acd, \\ 126 = aef, & 245 = acf, \\ 134 = adf, & 246 = bdf, \\ 135 = ace, & 256 = bce, \\ 136 = bde, & 345 = bcd, \\ 145 = bef, & 346 = cef, \\ 146 = abc, & 356 = abf, \\ 156 = cdf, & 456 = ade; \end{array}\right.$$

et de plus

$$C.\quad\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l|l|l} 12.34.56 = ac, & 13.45.62 = ab, & 14.56.23 = bd, \\ 12.35.64 = be, & 13.46.25 = cd, & 14.52.36 = ae, \\ 12.35.45 = df, & 13.42.56 = ef, & 14.53.62 = cf, \end{array} \\ \qquad\begin{array}{l|l} 15.62.34 = de, & 16.23.45 = ce, \\ 15.63.42 = bc, & 16.24.53 = ad, \\ 15.64.23 = ef, & 16.25.34 = bf; \end{array} \end{array}\right.$$

savoir (en représentant les points 123, 124 etc. par *bcf, cde* etc. et les droites 12.34.56, 12.35.64 etc. par *ac, be* etc.) on verra dans le tableau (*A.*) que les points situés dans la droite *ac* sont *ace, acb, acd, acf*, que ceux, dans la droite *be*, sont *bed, bef, bea, bec*, et ainsi de suite, de manière que ce système des vingt points et des quinze droites est précisément le système *reciproque* de celui des quinze points et des vingt droites que nous avons considéré dans la première section de ce mémoire, ou, autrement dit, que les vingt points et les quinze droites sont les projections sur un plan, des points et des droites d'intersection de six plans dans l'espace. Seulement la figure plane, ainsi formée, contient quatorze quantités arbitraires, tandis que le système de six points sur une conique, n'en contient que onze, de sorte qu'il doit y avoir des relations entre ces six plans. On obtient donc la forme suivante plus complète du théorème de M. *Steiner* (théorème qui en même temps est le complément du théorème XII §. 1 de ce mémoire).

Théorème XIV.

„Les soixante droites correspondantes aux hexagones formés par six points d'une conique, se coupent trois à trois dans vingt points qui peuvent être

Crelle. Journal d. Math. Bd. 34 Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Fontana.

Soluzione del Probl. III.

Chiamato sempre r il raggio del dato cerchio, π : 1 il rapporto della circonferenza al diametro; per esprimere la distanza del centro di gravità del dato semicerchio dal centro del cerchio si ha la quantità $\frac{4r}{3\pi}$, e per esprimere la distanza dal centro di gravità della parabola da quel centro del cerchio ci si offre la quantità $\frac{3r}{5\sqrt{2}}$; le quali due espressioni sono visibilmente ineguali; e quindi la parabola non hà il centro di gravità ~~del~~ comune o coincidente col centro di gravità del semicerchio. Anzi il rapporto delle due espressioni $\frac{4r}{3\pi}$, $\frac{3r}{5\sqrt{2}}$ non può essere se non trascendente, altrimenti si otterebbe, immantinente la rettificazione del cerchio.

Si ommettono per venerazione della R. Accademia le dimostrazioni delle precedenti soluzioni, avvegnacchè indicate una volta queste ultime quelle riescono facilissime.

Pavia 25. Marzo 1777. Greg. Fontana

considérés comme les projections des points d'intersection d'un système de six plans (dont d'ailleurs la liaison reste encore à chercher)."

Également

Théorème XIII.

„Les soixante points correspondants aux hexagones formés par six tangentes d'une conique, sont situés trois à trois sur vingt droites déterminées par des plans qui passent par trois points quelconques d'un système de six points dans lespace (la liaison de ce système de six points étant encore à chercher."

§. IV.

Soient $a, f; b, g; c, h$ les points correspondants d'un système de points situés sur la même droite, et en involution. Nommons „*faisceau*" les trois côtés d'un quadrilatère qui se coupent dans un même point et „*triangle*" les trois côtés qui ne se coupent pas dans un même point (de sorte que dans tout quadrilatère il y aura quatre *faisceaux* et quatre *triangles*). Les quadrilatères dont les côtés passent par les six points en involution, peuvent être classés en deux systèmes; Dans le premier les faisceaux passeront par f, g, h; f, b, c; g, c, a; h, a, b, et les triangles par a, b, c; a, g, h; b, h, f; c, f, g; dans l'autre il en sera le contraire. Deux quadrilatères qui appartiennent à ces deux systèmes respectivement, peuvent être dits „en rapport inverse l'un à l'autre." Soient $ABCD$, $A'B'C'D'$ deux quadrilatères non situés dans le même plan, et soumis à la condition que les côtés

$$DA,\ B'C';\ DB,\ C'A';\ DC,\ A'B';\ BC,\ D'A';\ CA,\ D'B';\ AB,\ D'C'$$

coupent la droite dans les points

$$f,\ g,\ h,\ a,\ b,\ c$$

respectivement. Les deux tetraèdres $A'BCD$, $AB'C'D'$, et également les tetraèdres $AB'CD$ et $A'BCD'$; $ABC'D$ et $A'B'CD'$; $ABCD'$ et $A'B'C'D$ seront respectivement inscrits et circonscrits l'un à l'autre. Car en considérant par exemple ces deux-ci: $A'BCD$, $AB'C'D'$: A' est dans le plan $B'C'D'$, B est dans le plan $C'D'A$ (parceque les droites AB, $C'D'$ se rencontrent); C est dans le plan $D'AB'$ (parceque AC et $B'D'$ se rencontrent), et D' est dans le plan $AB'C'$ (parceque AD et $B'C'$ se rencontrent). Également A, B', C', D' sont situés dans les plans BCD, CDA', $DA'B$ et $A'BC$ respectivement; et cela vérifie la relation dont il s'agit. Ce théorème est dû à M. *Möbius* qui l'a obtenu par son Calcul Barycentrique (Voyez *Crelle* journal tome III p. 273), et en considérant un système polaire dans lequel le plan

reciproque d'un point quelconque passe toujours par le point même (V. Statik c. VI §. 86 et *Crelle* Journal t. X p. 317). On trouve aussi quelques remarques sur ce sujet dans „Systematische Entwickelungen etc. de M. *Steiner* p. 247." Je ne croyais pas inutile d'en faire voir la relation avec la théorie de l'involution. Remarquons aussi que non seulement les quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$, mais aussi ceux $ABC'D'$ et $A'B'CD$, $ACB'D'$ et $A'C'BD$, $ADB'C'$ et $A'D'BC$ sont en rapport inverse entre eux. Par cela la symétrie de la figure est complétée; mais on n'en tire pas des nouveaux systèmes de tetraèdres inscrits et circonscrits.

M. *Möbius* a démontré qu'il n'existe pas des quadrilatères réels simples, à quatre côtés et quatre angles, inscrits et circonscrits. Mais en considérant les points imaginaires, l'existence en est possible, et on trouve des systèmes de cette sorte parmi les neuf points d'inflexion d'une courbe de troisième ordre. Je renvois cette discussion à une autre occasion §. V.

Je me bornerais, sans examiner de plus près la figure qui en resulte, à démontrer le théorème suivant: „Si un point et n droites sont donnés, les points d'intersection de chaque droite avec la polaire du point, relative aux autres $n-1$ droites, sont situés sur une même droite polaire du point, relative au système des droites." Je prends un système de droites, formant une courbe, et j'entends par polaire ou droite polaire, la dernière des polaires successives du point, relative à la courbe. En représentant analytiquement la courbe par $V=0$, V est une fonction homogène du premier ordre de x, y, z, et si $\alpha:\beta:\gamma$ sont les valeurs de $x:y:z$ relatives au point, l'équation

$$\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z)^{p-1}U = 0$$

est celle de la polaire dont il s'agit.

Soit $p=0$, $q=0$, $r=0$, ..., les équations des droites, p, q, r, ... seront des fonctions linéaires de x, y, z. Soient comme plus haut $x:y:z=\alpha:\beta:\gamma$ les équations qui déterminent le point: l'équation de la droite polaire du point, relative aux n droites, est

$$(\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z)^{n-1}pqr.... = 0.$$

Soient a, b, c, ... ce que deviennent p, q, r, ... en écrivant α, β, γ, ... au lieu de x, y, z, ..., on obtient aisément

$$\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z = a\partial_p+b\partial_q+....;$$

et delà on tire

$$(a\partial_p+b\partial_q+c\partial_r+....)^{n-1}pqr.... = 0,$$

pour la polaire cherchée. Les différentiations étant effectuées selon p, q, r, ...,

comme variables indépendantes, on obtient

$$pbc\ldots. + aqc\ldots. + \ldots. = 0$$

ou, ce qui est le même:

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c} + \ldots. = 0.$$

De même la polaire du point, relative aux droites $q = 0$, $r = 0$, ..., est

$$\frac{q}{b} + \frac{r}{c} + \ldots. = 0,$$

et par cette raison l'intersection de cette droite avec $p = 0$ est évidemment située sur la droite polaire du point, relative à toutes les droites; ce qui prouve la proposition dont il s'agit.

Par exemple, en considérant les droites BC, CA, AB qui passent par trois points A, B, C: la polaire d'un point O, relative aux droites AB, AC, est une droite $A\alpha$ telle, que AB, AC; AO, $A\alpha$ forment un faisceau harmonique. Soit α le point d'intersection de $A\alpha$ et BC, et supposons le même pour les points β, γ: les points α, β, γ seront situés (comme on le sait) sur une même droite, qui est celle que je nomme *polaire* de O, relative aux côtés du triangle, et que M. *Plücker* a nommé „*harmonicale.*" On sait de plus que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ peuvent être construites comme suit. En prenant a, b, c pour les points d'intersection de OA, OB, OC avec BC, CA, AB respectivement, les droites bc, BC; ca, CA; ab, AB se rencontreront dans les points α, β, γ; ce qui offre une règle facile de construire la polaire d'un point, relative à un nombre quelconque de droites.

Remarquons en finissant que la conique qui passe par les points A, B, C et qui touche deux des trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, touche aussi la troisième et est effectivement la polaire conique du point, relative aux trois côtés du triangle. En combinant cela avec la propriété connue que la $r^{\text{ième}}$ polaire de O', relative à la même courbe, passe par O, si la $n-r^{\text{ième}}$ polaire d'un point O, relative à une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, passe par un point O', on obtiendra le théorème 22. de Mr. *Steiner* (*Crelle* journal t. IV p. 209).

Londres, Janvier 1847.

(Ces recherches seront continuées.)

14.
Ein eigenthümlicher analytischer Fall bei der Theorie der Kurbel.

(Vom Herausgeber.)

Bei den theoretischen Untersuchungen über Dampfmaschinen, mit welchen sich so eben der Herausgeber dieses Journals beschäftigt, und bei welchen es auch auf die Theorie der *Kurbel* ankommt, ergiebt sich unter andern eine Aufgabe, welche auf eine *eigenthümliche* Weise sich auflösen läfst. Es möge diese Aufgabe und ihre Auflösung hier einzeln mitgetheilt werden, da das Verfahren auch in andern Fällen anwendbar sein kann.

Wenn man die vorausbestimmte Geschwindigkeit der Kurbelwarze am Anfange ihrer Bewegung durch einen Halbkreis hindurch, dessen Durchmesser die Richtung der Bläuelstange hat, die immer parallel mit sich selbst bleibend angenommen wird, durch v_0, die Geschwindigkeit in irgend einer andern Lage der Kurbel, welche gegen die anfängliche den Winkel ψ macht, durch v_ψ, das Gewicht des Schwungrades durch M, die von der Kurbel in Bewegung zu setzende, bestimmte und unveränderliche, auf die Bläuelstange reducirte Masse des Wagebalkens etc. durch N und die, auch von ψ abhangende und also mit ψ zugleich veränderliche Gröfse, welche durch dasjenige Kraftmoment der Bläuelstange bestimmt wird, welches Statt finden mufs, damit die Geschwindigkeit der Kurbelwarze am *Ende* des halben Umlaufs wieder der v_0 am Anfange *gleich* sei, damit ein Beharrungsstand der Bewegung Statt finde, durch Z bezeichnet, so ist

$$1. \quad v_\psi^2 = \frac{Z + M v_0^2}{M + N \sin \psi^2}.$$

Die *Aufgabe* ist nun:

Dasjenige Gewicht M des Schwungrades zu finden, welches nöthig ist, damit die Geschwindigkeit v_ψ nirgend, (für kein ψ) kleiner sei als ein vorausbestimmter Theil von v_0, z. B. nirgend kleiner als c.

Die Herleitung und Begründung der Formel (1.), so wie die Angabe des Ausdrucks von Z durch ψ in den verschiedenen Fällen, kann hier füglich übergangen werden, da es nur auf das *analytische* Verfahren bei der Auflösung der Aufgabe ankommt.

Das nächste sich darbietende Mittel zur Auflösung würde sein, dafs man zunächst für ein *unbestimmtes*, unveränderliches M, den *kleinsten* Werth von v_ψ suchte. Dies würde, wie bekannt, dadurch geschehen, dafs man das erste Differential von v_ψ^2 gleich 0 setzte und darauf den sich daraus ergebenden Werth von ψ dem ψ beilegte. Da v_ψ dann durch M und die übrigen Gröfsen ausgedrückt gefunden sein würde, so würde man für das *kleinste* v_ψ einen Ausdruck mit M ohne ψ erhalten. Dieses *kleinste* v_ψ wäre nun gleich c zu setzen, und aus *diesem* Ausdruck wäre M zu suchen, welches das verlangte Gewicht des Schwungrades sein würde, weil für *dieses* Gewicht die Geschwindigkeit v_ψ, wie es die Aufgabe verlangt, für kein ψ kleiner sein würde als c.

Aber es ist leicht zu sehen, dafs man, wenn Z eine, nur einigermaafsen von ψ *verwickelt* abhangende Gröfse ist (und das ist sie bei der Aufgabe zum Theil wirklich), eine höhere Gleichung erhalten würde, aus welcher M zu suchen wäre; ja selbst, dafs M sogar nicht ohne Zuhülfenahme der Entwicklung in unendliche Reihen zu finden sein dürfte. Jedenfalls würde die Rechnung mühsam und weitläuftig sein.

Statt dessen läfst sich mit Hülfe folgender Erwägungen das gesuchte M *unmittelbar* finden, *ohne* erst aus (1.) das kleinste v zu berechnen.

1. Der Ausdruck (1.) giebt nemlich:

$$2.\quad M = \frac{Z - v_\psi^2 N \sin\psi^2}{v_\psi^2 - v_0^2}.$$

Setzt man hierin $v_\psi = c$, so dafs

$$3.\quad M = \frac{Z - c^2 N \sin\psi^2}{c^2 - v_0^2}$$

ist, so giebt dieser Ausdruck (3.) offenbar für *jedes beliebige* ψ jedesmal denjenigen Werth von M, welcher macht, dafs für *das nemliche* ψ in (1.) $v_\psi = c$ ist.

2. Für jeden *andern* Werth von ψ giebt (3.) einen *andern* Werth von M. Denn wäre es anders, so müfste, wenn z. B. ψ_k und ψ_n zwei verschiedene Werthe von ψ, und M_k, M_n und Z_k, Z_n die *zugehörigen* Werthe von M und Z bezeichnen,

$$M_k = \frac{Z_k - c^2 N \sin\psi_k^2}{c^2 - v_0^2} = M_n = \frac{Z_n - c^2 N \sin\psi_n^2}{c^2 - v_0^2}, \quad \text{also}$$

$$4.\quad \frac{Z_k - Z_n}{\sin\psi_k^2 - \sin\psi_n^2} = c^2 N,$$ gleich einer *unveränderlichen* Gröfse sein;

was für jeden Werth von Z und $\sin\psi$ nicht der Fall ist.

3. M nimmt nun auch nach (3.) mit ψ nicht immerfort ab oder zu; denn $\frac{\partial M}{\partial \psi}$ ist nicht für alle ψ stets positiv, oder stets negativ. Also mufs es in (3.) *wenigstens einen* endlichen Werth von M geben, der gröfser ist als die vorhergehenden und die folgenden. Es kann deren, je nach der Beschaffenheit von Z, vielleicht mehrere geben (bei der Kurbel giebt es nur einen, auf welchen es *ankommt*). Ein solcher *gröfster* Werth von M werde durch M_m bezeichnet, und die zugehörigen Z und ψ seien Z_m und ψ_m.

4. Aus (1.) erhält man ferner $v_\psi^2(M+N\sin\psi^2) = Z+Mv_0^2 = Z-N\sin\psi^2\cdot v_0^2+(M+N\sin\psi^2)v_0^2$, also

$$5. \quad v_0^2-v_\psi^2 = \frac{v_0^2 N\sin\psi^2-Z}{M+N\sin\psi^2};$$

und aus *diesem* Ausdruck folgt, dafs v_ψ für *jedes, dasselbe bleibende* ψ mit M *zugleich* wächst und abnimmt. Denn da rechterhand M *nur* im Nenner vorkommt, so nimmt $v_0^2-v_\psi^2$ ab, und folglich wächst v_ψ, wenn M wächst, $v_0^2-v_\psi^2$ nimmt zu, also v_ψ ab, wenn M abnimmt.

5. Gäbe man nun dem Schwungrade z. B. das Gewicht M_n, welches *nicht* das gröfste M_m, also *kleiner* als M_m wäre, so würde dieses Gewicht zwar für den Winkel $\psi=\psi_n$ die Geschwindigkeit c hervorbringen, aber für den Winkel $\psi=\psi_m$, welcher dem *gröfsten* Gewicht M_m entspricht, eine *kleinere* Geschwindigkeit: denn für $M=M_m$ ist in (5.) $v_{\psi_m}=c$; für ein *kleineres* M dagegen, z. B. für $M=M_n$, würde zufolge (§. 4.) $v_{\psi_m}<c$ sein; was nicht sein soll.

Giebt man dagegen dem Schwungrade das *gröfste* Gewicht M_m, wie es aus (3.) sich findet, so bringt dasselbe in (5.) für den zu ihm gehörigen Winkel ψ_m die Geschwindigkeit $v_{\psi_m}=c$ hervor, und für *jeden* andern Winkel ψ_n eine *gröfsere* Geschwindigkeit: denn für $\psi=\psi_n$ ist in (5.) v_{ψ_n} schon für $M=M_n$ gleich c, also ist, da v_{ψ_n} nach (§. 4.) mit M zugleich wächst, v_{ψ_n} für das *gröfsere* M_m gröfser als c.

Ganz so verlangt es aber die Aufgabe, und folglich ist das *gröfste* M, welches sich aus (3.) ergiebt, das *gesuchte,* und zugleich ist der Winkel ψ_m, für welchen es Statt findet, *derjenige,* für welchen die anfängliche Geschwindigkeit v_0 bis zu der ihr bestimmten Grenze c abgenommen hat.

Die Aufgabe wird also gelöset, wenn man in (3.) das erste Differential von M nach ψ gleich Null setzt, was

$$6. \quad \frac{\partial Z}{\partial \psi} = 2c^2 N\sin\psi\cos\psi$$

giebt, den hieraus sich ergebenden Werth von ψ nimmt, welcher der Winkel ψ_m ist, für welchen die *kleinste* Geschwindigkeit c Statt findet, und dieses ψ wieder in (3.) setzt; wodurch man dann das gesuchte M erhält.

Schon dadurch, dafs die Formel (3.) die veränderliche Gröfse ψ nur im *Zähler* enthält, nicht wie (1.) auch im *Nenner*, ist das hier angegebene Verfahren leichter und kürzer, als wenn man nach der andern, im Eingange gedachten Art, erst von v_ψ aus (1.) den kleinsten Werth sucht, um daraus weiter M zu finden.

Für den Fall einer Dampfmaschine *ohne* Absperrung des Dampfs im Dampfstiefel ist

$$7. \quad Z = 4g\left(\frac{\psi}{\pi} - \tfrac{1}{2}(1 - \cos\psi)\right)Q\lambda,$$

wo Q den Druck des Dampfs auf den Dampfkolben, λ die Länge des Kolbenlaufs und g die Höhe des Falles eines Körpers in luftleerem Raum in der ersten Secunde bezeichnet. Dieses Z giebt also in (7.)

$$8. \quad 2gQ\lambda(1 - \tfrac{1}{2}\pi\sin\psi) = c^2 N \sin\psi\cos\psi,$$

und Dies für $\sin\psi_m$ eine Gleichung vom 4ten Grade. Für den Fall *mit* Absperrung des Dampfs ist freilich die Gleichung, welche ψ_m giebt, viel verwickelter. In *beiden* Fällen kann man übrigens bei Dampfmaschinen $N = 0$ setzen, und dann läfst sich allerdings M auch unmittelbar aus (1.) finden. Doch darauf kommt es hier nicht an.

Berlin im März 1847.

15.

Zwei geometrische Aufgaben; nebst den Auflösungen.

I.

Aufgabe. *Durch vier in einer Ebene beliebig gegebene Puncte vier gerade Linien so zu ziehen, dafs sie ein Quadrat einschliefsen.*

Erste Auflösung durch Rechnung. (Von dem Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Die vier gegebenen Puncte seien A, B, C und D (Taf. II. Fig. 1.), so kann man verlangen, dafs die Linien

durch A und B, so wie die durch C und D,
oder durch A und C, so wie die durch B und D,
oder durch A und D, so wie die durch B und C
} *parallel* gezogen werden.

Es sei der *letzte* der drei Fälle bestimmt.

Die Abscissen-Axe sei CD, der Anfangspunct der Abscissen C; die Gleichungen der vier zu ziehenden Linien seien, für rechtwinklige Coordinaten:

$$1.\quad y+px+q=0,\quad y+p_1x+q_1=0,\quad y+p_2x+q_2=0,\quad y+p_3x+q_3=0.$$

Die Coordinaten der Puncte A, B und D seien a und a_1, b und b_1, und c, so gehen die Gleichungen (1.), da A, B, C und D in den zu ziehenden Linien liegen sollen, in

$$2.\quad \begin{cases} y+px-a_1-ap = 0, \\ y+p_1x-b_1-bp_1 = 0, \\ y+p_2x-ap_2 = 0 \text{ und} \\ y+p_3x = 0 \end{cases}$$

über. Diese Gleichungen geben weiter, da die Linien sich unter *rechten* Winkeln schneiden und paarweise parallel sein sollen, weswegen

$$3.\quad 1+pp_1=0,\quad 1+p_2p_3=0,\quad p=p_3 \text{ und } p_1=p_2$$

sein mufs:

$$4.\quad \begin{cases} y+px-a_1-ap = 0, \\ y-\frac{1}{p}x-b_1+\frac{b}{p} = 0, \\ y-\frac{1}{p}x+\frac{c}{p} = 0, \\ y+px = 0. \end{cases}$$

So werden die vier Linien ein *Rechteck* einschliefsen.

Nun seien

x_1 und y_1 die Coordinaten des Durchschnittspuncts der Geraden durch *A* und *C*,
x_2 und y_2 - - - - - - - - - - - - - - *C* und *D*,
x_3 und y_3 - - - - - - - - - - - - - - *B* und *D*,

so erhält man

$$5.\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a_1 p + a p^2 + c}{1+p^2} \text{ und } y_1 = \dfrac{a_1 + a p - c p}{1+p^2}; \\ x_2 = \dfrac{c}{1+p^2} \text{ und } y_2 = -\dfrac{cp}{1+p^2}; \\ x_3 = \dfrac{b - b_1 p}{1+p} \text{ und } y_3 = \dfrac{b_1 p - b}{1+p^2} \cdot p; \end{cases}$$

Die Bedingung, dafs das von den vier Linien umschlossene Rechteck ein *Quadrat* sei, ist

$$6.\quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2,$$

und daraus folgt sowohl

$$7.\quad p = \frac{c - b - a_1}{a - b_1}, \quad \text{als auch} \quad 8.\quad p = \frac{b - c - a_1}{a + b_1}.$$

Jeder dieser beiden Werthe von p, in (4.) gesetzt, giebt die Gleichungen der vier zu ziehenden Linien; so dafs im allgemeinen *sechs* verschiedene Quadrate zu erlangen sind.

Für

$$9.\quad c - b - a_1 = 0 \text{ und zugleich } a - b_1 = 0, \text{ so wie für}$$

$$10.\quad b - c - a = 0 \text{ und zugleich } a + b_1 = 0$$

ist p *unbestimmt*, und für *jeden beliebigen* Werth von p geben dann die Gleichungen (4.) ein Quadrat, also alsdann unendlich viele Quadrate.

Zweite Auflösung, durch Zeichnung.

Die vier gegebenen Puncte seien *A*, *B*, *C* und *D* (Fig. 2.) und es sei der Fall angenommen, wo die durch *A* und *D* zu ziehenden Linien mit den durch *B* und *C* gehenden ein *Quadrat* einschliefsen sollen.

Man ziehe über *AB*, als Durchmesser, und eben so über *CD*, als Durchmesser, Kreise, und durch die Mittelpuncte *P* und *Q* der beiden Kreise *EF* auf *AB* und *GH* auf *CD* senkrecht. Dann ziehe man durch zwei der Puncte, in welchen *EF* und *GH* die Kreise schneiden, z. B. durch *E* und *G*, die Gerade *EG*, und hierauf durch die Durchschnitte *M* und *N* der Linie *EG* mit den beiden Kreisen und durch *A* und *C* und *B* und *D* die Geraden *ANL*, *CML*, *BNK* und *DMK*, so ist *KMLN* ein *Quadrat*. Denn *KNL* und *KML*, als Scheitelwinkel von *ANB* und *CMD*, sind

rechte, und MNL und LMN, als Scheitelwinkel von $ANE=\frac{1}{2}APE$ und $CMG=\frac{1}{2}CQG$, sind *halbe rechte Winkel.*

II.

(Vom Herausgeber dieses Journals.)

Aufgabe. *Durch beliebige und beliebig viele, in einer Ebene gegebene Puncte, gerade Linien so zu ziehen, dafs sie ein Vieleck von vorausbestimmtem Flächen-Inhalt und mit vorausbestimmten Winkeln einschliefsen.*

Auflösung. Die Puncte E (Fig. 3.) in der Ebene seien dadurch gegeben, dafs die Seiten a und die Winkel ε des Vielecks, in dessen Ecken die Puncte E liegen, bestimmt sind.

Der Flächen-Inhalt

$$1.\quad\begin{cases}\text{Des Vielecks } E_1E_2E_3\ldots\text{ sei }=P,\\ \text{Des Vielecks } B_1B_2B_3\ldots=Q,\\ \text{Der Dreiecke } E_1B_1E_2,\ E_2B_2E_3,\ \ldots=\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots\end{cases}$$

Dann ist $\quad 2.\quad \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3\ldots+\Delta_n=P-Q,$

wenn n die *Anzahl* der gegebenen Puncte E bezeichnet.

Der Inhalt Δ_3 z. B. des Dreiecks $E_3B_3E_4$ ist $=\frac{1}{2}E_3E_4\cdot E_3B_3\cdot\sin\varphi_3$ $=\frac{1}{2}a_3\cdot E_3B_3\sin\varphi_3$, und da $E_3B_3=\frac{a_3}{\sin\beta_3}\cdot\sin(\varepsilon_4-\varphi_4)=a_3\frac{\sin(\beta_3-\varphi_3)}{\sin\beta_3}$ ist, so ist

$$3.\quad \Delta_3=\frac{1}{2}a_3^2\cdot\frac{\sin(\beta_3-\varphi_3)\sin\varphi_3}{\sin\beta_3}=\frac{1}{4}\frac{a_3^2}{\sin\beta_3}(\cos(\beta_3-2\varphi_3)-\cos\beta_3)$$

(weil $2\sin(\beta_3-\varphi_3)\sin\varphi_3=\cos((\beta_3-\varphi_3)-\varphi_3)-\cos((\beta_3-\varphi_3)+\varphi_3)$), oder auch der Inhalt des $m$ten Dreiecks:

$$4.\quad \Delta_m=\frac{1}{4}\frac{a_m^2}{\sin\beta_m}[\cos(\beta_m-2\varphi_m)-\cos\beta_m].$$

Nun ist

$$5.\quad\begin{cases}\varphi_1+\varepsilon_2-\varphi_2=\beta_1, & \text{also } \varphi_2=\varphi_1+\varepsilon_2-\beta_1,\\ \varphi_2+\varepsilon_3-\varphi_3=\beta_2, & \text{- - } \varphi_3=\varphi_2+\varepsilon_3-\beta_2=\varphi_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\beta_1-\beta_2,\\ \varphi_3+\varepsilon_4-\varphi_4=\beta_3, & \text{- - } \varphi_4=\varphi_3+\varepsilon_4-\beta_3=\varphi_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4-\beta_1-\beta_2-\beta_3,\\ \ldots & \ldots\\ \varphi_{m-1}+\varepsilon_m-\varphi_m=\beta_{m-1}, & \text{also } \varphi_m=\varphi_{m-1}+\varepsilon_m-\beta_{m-1}\\ & \quad=\varphi_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\ldots+\varepsilon_m-\beta_1-\beta_2-\beta_3\ldots-\beta_{m-1},\\ \ldots & \ldots\\ \varphi_{n-1}+\varepsilon_n-\varphi_n=\beta_{n-1}, & \text{also } \varphi_n=\varphi_{n-1}+\varepsilon_n-\beta_{n-1}\\ & \quad=\varphi_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\ldots+\varepsilon_n-\beta_1-\beta_2-\beta_3\ldots-\beta_{n-1}\\ & \quad=\varphi_1+(n-2)\varrho-\varepsilon_1-((n-2)\varrho-\beta_n)\\ & \quad=\varphi_1-\varepsilon_1+\beta_n.\end{cases}$$

Dies in (4.) gesetzt, giebt

$$6. \quad \Delta_m = \frac{a_m^2}{4\sin\beta_m}[\cos 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3\ldots+\tfrac{1}{2}\beta_m-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4\ldots-\varepsilon_m-\varphi_1)-\cos\beta_m],$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$7. \quad \beta_1+\beta_2+\beta_3\ldots+\beta_{m-1}+\tfrac{1}{2}\beta_m-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4\ldots-\varepsilon_m = \lambda_m$$

setzt:

$$\Delta_m = \frac{a_m^2}{4\sin\beta_m}[\cos(2\lambda_m-2\varphi_1)-\cos\beta_m] \text{ oder}$$

$$8. \quad \Delta_m = \frac{a_m^2}{4\sin\beta_m}[\cos 2\lambda_m\cos 2\varphi_1+\sin 2\lambda_m\sin 2\varphi_1-\cos\beta_m].$$

Dies weiter in (1.) gesetzt, giebt

$$9. \quad 4(P-Q) = \frac{a_1^2}{\sin\beta_1}[\cos 2\lambda_1\cos 2\varphi_1+\sin 2\lambda_1\sin 2\varphi_1-\cos\beta_1]$$
$$+\frac{a_2^2}{\sin\beta_2}[\cos 2\lambda_2\cos 2\varphi_1+\sin 2\lambda_2\sin 2\varphi_1-\cos\beta_2]$$
$$+\frac{a_3^2}{\sin\beta_3}[\cos 2\lambda_3\cos 2\varphi_1+\sin 2\lambda_3\sin 2\varphi_1-\cos\beta_3]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{a_n^2}{\sin\beta_n}[\cos 2\lambda_n\cos 2\varphi_1+\sin 2\lambda_n\sin 2\varphi_1-\cos\beta_n].$$

Man setze der Kürze wegen

$$10. \quad \begin{cases} 4(P-Q)+a_1^2\cot\beta_1+a_2^2\cot\beta_2+a_3^2\cot\beta_3\ldots+a_n^2\cot\beta_n = G, \\ \dfrac{a_1^2\cos 2\lambda_1}{\sin\beta_1}+\dfrac{a_2^2\cos 2\lambda_2}{\sin\beta_2}+\dfrac{a_3^2\cos 2\lambda_3}{\sin\beta_3}\ldots+\dfrac{a_n^2\cos 2\lambda_n}{\sin\beta_n} = M \text{ und} \\ \dfrac{a_1^2\sin 2\lambda_1}{\sin\beta_1}+\dfrac{a_2^2\sin 2\lambda_2}{\sin\beta_2}+\dfrac{a_3^2\sin 2\lambda_3}{\sin\beta_3}\ldots+\dfrac{a_n^2\sin 2\lambda_n}{\sin\beta_n} = N, \end{cases}$$

so giebt (9.)

$$11. \quad G = M\cos 2\varphi_1+N\sin 2\varphi_1$$

und daraus folgt

$$M^2(1-\sin^2 2\varphi_1) = G^2-2GN\sin 2\varphi_1+N^2\sin^2 2\varphi_1 \text{ oder}$$
$$(M^2+N^2)\sin^2 2\varphi_1-2GN\sin 2\varphi_1+G^2-M^2 = 0, \text{ also}$$

$$\sin 2\varphi_1 = \frac{GN}{M^2+N^2}\pm\sqrt{\left(\frac{G^2N^2}{(M^2+N^2)^2}-\frac{G^2-M^2}{M^2+N^2}\right)} \text{ oder}$$

$$\sin 2\varphi_1 = \frac{GN\pm\sqrt{(G^2N^2-G^2M^2-G^2N^2+M^4+M^2N^2)}}{M^2+N^2} \text{ oder}$$

$$12. \quad \sin 2\varphi_1 = \frac{GN\pm M\sqrt{(M^2+N^2-G^2)}}{M^2+N^2}.$$

Ähnlicherweise findet sich

$$13. \quad \cos 2\varphi_1 = \frac{GM \mp N\sqrt{(M^2+N^2-G^2)}}{M^2+N^2}.$$

Dieses giebt den Winkel φ_1, unter welchem die Linie E_1B_1 gezogen werden mufs. Die Winkel φ_2, φ_3, ... finden sich durch Weiterrücken der Zeiger, je um 1.

Die *Seite* $B_1B_2 = b_1$ z. B., des Vielecks Q, findet sich wie folgt.

Es ist $B_1E_2 = \frac{a_1}{\sin\beta_1}\cdot\sin\varphi_1$ und $B_2E_2 = \frac{a_2}{\sin\beta_2}\cdot\sin(\varepsilon_3-\varphi_2) = \frac{a_2}{\sin\beta_2}\cdot\sin(\beta_1+\beta_2-\varepsilon_2-\varphi_1)$ (5.), also ist

$$14. \quad b_1 = B_1E_2 - B_2E_2 = \frac{a_1\sin\varphi_1}{\sin\beta_1} - \frac{a_2\sin(\beta_1+\beta_2-\varepsilon_2-\varphi_1)}{\sin\beta_2}.$$

Sind nur *drei* Puncte E in der Ebene gegeben, so werden durch die Winkel β und den Flächen-Inhalt Q zugleich die *Seiten* der Figuren Q bestimmt, also finden sich dann aus (13. oder 14.) die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3, unter welchen die Scheitellinien gezogen werden müssen, damit sie ein *völlig bestimmtes* Dreieck Q einschliefsen.

Für *vier* gegebene Puncte E würde in (7.)

$$15. \quad \begin{cases} \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\beta_1, & \lambda_3 = \beta_1+\beta_2+\tfrac{1}{2}\beta_3-\varepsilon_2-\varepsilon_3 \text{ und} \\ \lambda_2 = \beta_1+\tfrac{1}{2}\beta_2-\varepsilon_2, & \lambda_4 = \beta_1+\beta_2+\beta_3+\tfrac{1}{2}\beta_4-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4 \end{cases}$$

sein. Sollen ferner die Winkel β einander gleich, also *rechte* Winkel sein, so wäre

$$16. \quad \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\varrho, \quad \lambda_2 = \tfrac{3}{2}\varrho-\varepsilon_2, \quad \lambda_3 = \tfrac{5}{2}\varrho-\varepsilon_2-\varepsilon_3, \quad \lambda_4 = \tfrac{7}{2}\varrho-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4.$$

In (10.) wäre dann

$$17. \quad \begin{cases} G = 4(P-Q), \\ M = -a_2^2\sin 2\varepsilon_2 + a_3^2\sin 2(\varepsilon_2+\varepsilon_3) - a_4^2\sin 2(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4), \\ N = a_1^2 - a_2^2\cos 2\varepsilon_2 + a_3^2\cos 2(\varepsilon_2+\varepsilon_3) - a_4^2\cos 2(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4); \end{cases}$$

woraus sich weiter nach (12. oder 13.) φ findet. In (14.) wäre

$$18. \quad b_1 = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin(\varphi_1+\varepsilon_2) \text{ und}$$

$$b_2 = a_2\sin\varphi_2 - a_3\sin(\varepsilon_4-\varphi_4) = a_2\sin(\varphi_1+\varepsilon_2-\varrho) - a_3\sin(3\varrho-\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varphi_1) \text{ oder}$$

$$b_2 = -a_2\cos(\varphi_1+\varepsilon_2) - a_3\sin(3\varrho-(4\varrho-\varepsilon_1)-\varphi_1) \text{ oder}$$

$$19. \quad b_2 = -a_2\cos(\varphi_1+\varepsilon_2) + a_3\cos(\varepsilon_1-\varphi_1).$$

Setzt man $b_1 = b_2$, so läfst sich daraus φ_1 ausdrücken, und setzt man diesen Werth von φ in (12. oder 13.), so finden sich G und folglich der Inhalt des *Quadrats* Q, mithin auch dessen Seiten, durch die Seiten und Winkel der gegebenen Figur ausgedrückt.

16.

Untersuchungen über die Reihe

$$1+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q)(1-q^{\gamma})}\cdot x+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\cdot x^{2}+\dots$$

(Von Herrn Dr. *E. Heine*, Privatdocenten an der Universität zu Bonn.)

Einleitung.

Im 32ten Bande dieses Journals [S. 210] habe ich einige Eigenschaften obiger Reihe angegeben, und zwar vorzugsweise solche, die mit der Verwandlung derselben in die Kettenbruchform zusammenhangen. Die dort angestellten Untersuchungen will ich hier wieder aufnehmen, und im Zusammenhange die Resultate entwickeln, zu welchen die Vergleichung der obigen Reihe mit der von *Gaufs* behandelten hypergeometrischen Reihe führt.

Die zu untersuchende Function hangt von den fünf Gröfsen $\alpha, \beta, \gamma, q, x$ ab, welche wir ihre Elemente nennen; und zwar heifst α das erste Element, β das zweite etc. Die Summe der Reihe bezeichnen wir durch $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$; jedoch mit dem Vorbehalt, dafs es erlaubt sei, da, wo keine Zweideutigkeit entstehen kann, eins oder mehrere Elemente aus der Parenthese wegzulassen.

Da die Reihe durch Vertauschung des ersten Elements mit dem zweiten nicht verändert wird, so hat man zunächst die Gleichung

$$1.\quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi(\beta, \alpha, \gamma, q, x).$$

Ist eine der Gröfsen α, β eine negative ganze Zahl, so hat die Reihe offenbar eine endliche Anzahl von Gliedern; in allen übrigen Fällen wird sie nicht abbrechen, sondern ins Unendliche fortlaufen.

Die Elemente α, β, γ, x können reell, oder imaginär sein, während q immer reell angenommen werden wird. Ist $q=1$, so nehmen die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von x die Form $\frac{0}{0}$ an, lassen sich aber nach bekannten Regeln leicht in Brüche verwandeln, deren Nenner nicht verschwinden. Dividirt man dazu die einzelnen Factoren, im Zähler sowohl, als im Nenner (und die Zahl derselben ist gleich grofs) jedes dieser Coëfficienten durch $1-q$, und berücksichtigt, dafs sich für $q=1$, $\frac{1-q^{\varepsilon}}{1-q}$ in ε verwandelt, so

findet man, dafs $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ für $q = 1$ in die *Gaufs*ische hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, 1, x)$$
$$= 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot x^2 + \dots$$

übergeht; weshalb wir im Folgenden den Fall $q = 1$ ausschliefsen werden. Der Fall $q > 1$ läfst sich leicht auf den zurückführen, wo q kleiner als 1 ist; man kann sich dazu der Formel

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x\right)$$

bedienen, die sich unmittelbar aus der Definition der φ ergiebt. Wir werden daher in den folgenden vier Abschnitten, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, annehmen können, das vierte Element q sei kleiner als 1; im fünften Abschnitt wird es zweckmäfsig sein, diese Annahme fallen zu lassen.

Dadurch, dafs α, β, γ auch imaginär sein können, ist es möglich, die Factoren, in welchen eins dieser Elemente vorkommt, z. B. $(1-q^\alpha)$, $(1-q^{\alpha+1})$, $(1-q^{\alpha+2})$, etc. so umzugestalten, dafs die Potenz von q nicht mehr von 1 abgezogen, sondern dazu addirt wird. Es ist dazu nur nöthig, das Element um $\frac{\pi i}{\log q}$ zu vermehren. Setzt man z. B. $\alpha + \frac{\pi i}{\log q}$ statt α, so verwandeln sich die Factoren $(1-q^\alpha)$, $(1-q^{\alpha+1})$, etc. in $(1+q^\alpha)$, $(1+q^{\alpha+1})$, etc. Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs unter der αten Potenz von q für ein reelles α, wenn q *positiv* ist, die positive reelle Potenz verstanden wird, während, wenn α von der Form $a+bi$ ist, q^α das Product von q^a (d. h. der positiven reellen $a$ten Potenz von q) in $\cos(b\log q) + i\sin(b\log q)$ darstellt, wo $\log q$ der reelle natürliche Logarithmus von q ist. Für ein *negatives* q soll unter q^α das Product von $(-q)^\alpha$ in $(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi)$ verstanden werden.

Ist $q < 1$, so nähert sich das Verhältnifs der Coëfficienten von x^m und x^{m+1}, nämlich $\frac{(1-q^{m+1})(1-q^{\gamma+m})}{(1-q^{\alpha+m})(1-q^{\beta+m})}$, so wie m wächst, der Grenze 1. Hieraus folgt unmittelbar, dafs die zu untersuchende Reihe convergirt, wenn x oder sein Modulus kleiner als 1 ist, dagegen divergirt, wenn der Modulus von x die Einheit übertrifft. Ist endlich dieser Modulus $= 1$, so divergirt die Reihe gleichfalls, indem, wie im 3ten Abschnitt gezeigt werden wird, in diesem Falle die erste Bedingung für die Convergenz einer Reihe nicht erfüllt wird, nämlich die, dafs die

unendlich entfernten Glieder, wie man sich auszudrücken pflegt, nach Null hin convergiren. Bricht die Reihe ab, so kann von Divergenz nicht die Rede sein.

Die *Gaufs*ische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ verwandelt sich durch Differentiation nach x in eine Function von derselben Art; bei den φ findet etwas Ähnliches Statt. Man hat nämlich die Gleichung

$$2.\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,qx)=\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot x\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)$$

und kann durch wiederholte Anwendung dieser Formel für jede ganze Zahl n die Function $\varphi(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,q,x)$ durch $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$, $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,qx)$ etc. bis $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^n x)$ ausdrücken.

Es scheint zweckmäfsig, zu zeigen, auf welche Art eine Anzahl in der Analysis häufig vorkommender Ausdrücke durch das Zeichen φ sich darstellen läfst. Man findet

$$3.\quad \varphi(-n,\beta,\beta,q,-xq^n)=1+\frac{(1-q^n)}{(1-q)}\cdot x+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot qx^2+\dots$$
$$+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-m+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}\cdot q^{\frac{1}{2}(m(m-1))}x^m+\dots$$

Hieraus folgen als besondere Fälle die Formeln:

$$4.\quad \varphi(-g,\beta,\beta,q,-xq^g)$$
$$=1+\frac{x}{(1-q)}+\frac{qx^2}{(1-q)(1-q^2)}+\dots+\frac{q^{\frac{1}{2}(m(m-1))}x^m}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}+\dots,$$
$$5.\quad \varphi(g,\beta,\beta,q,-x)$$
$$=1-\frac{x}{(1-q)}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}-\dots\pm\frac{x^m}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}\mp\dots,$$

wenn g eine unendlich grofse Zahl bezeichnet. Behält man die von *Jacobi* in den „Fundamenta nova theor. funct. elliptic." angenommene Bezeichnung bei, und setzt $e^{2ix}=z$, so wird (Fund. p. 183)

$$6.\quad 1+\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=\chi(z)+\chi\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$7.\quad iH\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=\sqrt[4]{q}\left\{\chi_1(z)-\chi_1\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

wenn man

$$\chi(z)=\varphi(-g,1,g,q^2,zq^{2g+1}),$$
$$\chi_1(z)=\sqrt{z}\,\varphi(-g,1,g,q^2,zq^{2g+2})$$

setzt. Wie man diese Reihen in unendliche Producte verwandeln könne, findet sich

in Abschnitt III. und IV. auseinandergesetzt. Ferner hat man (Fund. p. 100 et seq.)

$$8.\quad \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \operatorname{cotang} x + i\left\{\vartheta(z)-\vartheta\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

$$9.\quad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \operatorname{tang} x - i\left\{\vartheta_1(z)-\vartheta_1\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

$$10.\quad \frac{2k^2K}{\pi}i\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{4q}{(1-q^2)}\left\{\vartheta_2(z)-\vartheta_2\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$11.\quad \frac{2K}{\pi\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\cos x}+\frac{2q}{(1-q)}\left\{\vartheta_3(z)+\vartheta_3\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

$$12.\quad \frac{2kK}{\pi}\sin\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt{q}}{(1-q)}\left\{\vartheta_4(z)+\vartheta_4\left(\frac{1}{z}\right)\right\},$$

$$\vartheta(z) = \varphi\left(1,\ \frac{\pi i}{\log q},\ 1+\frac{\pi i}{\log q},\ q,\ qz\right),$$

$$\vartheta_1(z) = \varphi\left(1,\ \frac{\pi i}{\pi i+\log q},\ 1+\frac{\pi i}{\pi i+\log q},\ -q,\ qz\right),$$

$$\vartheta_2(z) = z\,\varphi(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ q^4,\ q^2z^2),$$

$$\vartheta_3(z) = \sqrt{z}\,\varphi(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ q^2,\ -q^2z),$$

$$\vartheta_4(z) = \sqrt{z}\,\varphi(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ q^2,\ -qz).$$

Aufserdem wird (Fund. 103)

$$13.\quad 1+\frac{2K}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \vartheta_5(z)+\vartheta_5\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\vartheta_5(z) = \varphi\left(\frac{\pi i}{2\log q},\ 1,\ 1+\frac{\pi i}{2\log q},\ q^2,\ qz\right).$$

Durch Vertauschung von x und q mit $\frac{1}{2}\pi - x$ und $-q$ erhält man aus den Gleichungen (8. bis 13.) neun andre Formeln. Ich füge noch die von *Jacobi* im 26ten Bande dieses Journals p. 101 mitgetheilte Gleichung hinzu:

$$14.\quad \frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \operatorname{tang} x + \frac{2iq^2}{1+q^2}\left\{\vartheta_6(z)-\vartheta_6\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$\vartheta_6(z) = z\,\varphi\left(1,\ 1+\frac{\pi i}{2\log q},\ 2+\frac{\pi i}{2\log q},\ q^2,\ -q^2z\right).$$

Aus den Fund. p. 99 finden sich auch folgende, mit Hülfe des 3ten Abschnitts leicht zu beweisende Formeln:

$$15.\quad \sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\sin x\,\psi(z)\,\psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$16.\quad \cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2\sqrt[4]{q}\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cos x\,\psi_1(z)\,\psi_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$17.\quad \Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\psi_2(z)\,\psi_2\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\psi(z) = \varphi(\tfrac{1}{2}, \beta, \beta, q^2, qz),$$

$$\psi_1(z) = \varphi\left(\tfrac{1}{2} + \frac{\pi i}{2\log q}, \beta, \beta, q^2, qz\right),$$

$$\psi_2(z) = \varphi\left(\frac{\pi i}{2\log q}, \beta, \beta, q^2, qz\right).$$

Die vorstehenden Proben mögen hier genügen. Sie zeigen, wie zu verfahren sei, um eine Reihe auf die Form der φ zu bringen. Die Functionen, welche unter diese Classe gehören, sollen nun in den fünf folgenden Abschnitten behandelt werden; und zwar wird der erste Abschnitt die Beziehungen zwischen φ enthalten, welche den von *Gaufs* in der I. Sectio aufgeführten „Relationes inter functiones contiguas" entsprechen. Im zweiten Abschnitt werden wir über die Verwandlung der Reihe in die Kettenbruchform handeln; im dritten für besondere Werthe der drei ersten Elemente sie betrachten; im vierten für besondere Werthe des letzten Elements x. Der fünfte Abschnitt wird die Untersuchung mit der Behandlung der Differenzengleichung schliefsen, welcher die Reihe φ genügt; dieselbe ist der bekannten Differentialgleichung, welche sich durch die hypergeometrische Reihe integriren läfst, ganz analog.

I. Abschnitt.

Wir sagen von einer Function, sie sei $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$ oder, wie wir in diesem Abschnitt zur Abkürzung setzen wollen, sie sei φ benachbart, wenn sie aus φ dadurch entsteht, dafs man ein einziges der drei Elemente α, β, γ um eine Einheit vermehrt oder vermindert. So erhält man sechs benachbarte Functionen; zwischen je zweien derselben und der ursprünglichen φ besteht eine einfache lineare Gleichung. Alle diese Gleichungen, im Ganzen $\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}$, wollen

wir hier zusammenstellen, indem sie das Fundament für die nachherigen Untersuchungen bilden. Es ist

$$18.\quad [1+q^{\gamma-1}-q^{\gamma-\alpha-1}-q^{\gamma-\alpha}-q^{\alpha-1}x(1-q^{\beta-\alpha})]\varphi$$
$$+q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)-(1-q^{\gamma-\alpha})\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma)=0,$$

$$19.\quad (1-q^{\beta-\alpha})\varphi+q^{\beta-\alpha}(1-q^{\alpha})\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)-(1-q^{\beta})\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)=0,$$

$$20.\quad (1+q^{\gamma-1}-q^{\gamma-\beta}-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi+q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)$$
$$-(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta-1,\gamma)=0,$$

$$21.\quad (1-q^{\gamma})[(1-q^{\alpha})q^{\gamma-\alpha}-xq^{\alpha+\beta-\gamma}(1-q^{\gamma-\beta})]\varphi$$
$$+q^{\alpha+\beta-\gamma}x(1-q^{\gamma-\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1)$$
$$-q^{\gamma-\alpha}(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)=0,$$

$$22.\quad (1-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi+q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^{\alpha})\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)-(1-q^{\gamma-1})\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1)=0,$$

$$23.\quad (1+q^{\gamma-1}-q^{\gamma-\alpha}-q^{\gamma-\beta-1})\varphi+q^{\gamma-\beta-1}(1-q^{\beta})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)$$
$$-(1-q^{\gamma-\alpha})\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma)=0,$$

$$24.\quad q^{\gamma-\beta}(1-q^{\beta-\alpha})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x)\varphi+(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta-1,\gamma)$$
$$-(1-q^{\gamma-\alpha})\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma)=0,$$

$$25.\quad (1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x)\varphi+q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1)$$
$$-(1-q^{\gamma})\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma)=0,$$

$$26.\quad [q^{\gamma-\alpha}(1-q^{\alpha-1})-q^{\alpha+\beta-\gamma}x(1-q^{\gamma-\beta-1})]\varphi+(1-q^{\gamma-\alpha})\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma)$$
$$-(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1)=0,$$

$$27.\quad [1+q^{\gamma-1}-q^{\gamma-\beta-1}-q^{\gamma-\beta}+q^{\alpha-1}x(1-q^{\beta-\alpha})]\varphi$$
$$+q^{\gamma-\beta-1}(1-q^{\beta})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)-(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta-1,\gamma)=0,$$

$$28.\quad (1-q^{\gamma})[(1-q^{\gamma-\beta})q^{\gamma-\beta}-xq^{\alpha+\beta-\gamma}(1-q^{\gamma-\alpha})]\varphi$$
$$+q^{\alpha+\beta-\gamma}x(1-q^{\gamma-\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1)$$
$$-q^{\gamma-\beta}(1-q^{\beta})(1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)=0,$$

$$29.\quad (1-q^{\gamma-\beta-1})\varphi+q^{\gamma-\beta-1}(1-q^{\beta})\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)-(1-q^{\gamma-1})\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1)=0,$$

$$30.\quad (1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x)\varphi+q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x(1-q^{\gamma-\alpha})\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1)$$
$$-(1-q^{\gamma})\varphi(\alpha,\beta-1,\gamma)=0,$$

$$31.\quad [q^{\gamma-\beta}(1-q^{\beta-1})-q^{\alpha+\beta-\gamma}x(1-q^{\gamma-\alpha-1})]\varphi+(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta-1,\gamma)$$
$$-(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1)=0,$$

$$32.\quad (1-q^{\gamma})[1-q^{\gamma-1}+x(q^{\alpha-1}+q^{\beta-1}-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}-q^{\alpha+\beta-\gamma})]\varphi$$
$$+q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x(1-q^{\gamma-\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})\varphi(\alpha,\beta,\gamma+1)$$
$$-(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma}x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma-1)=0.$$

Von diesen Formeln sind (22. und 25.) direct durch Betrachtung der *m*ten Glieder abgeleitet. Indem in (22.) die Buchstaben α und γ in $(\alpha-1)$ und $(\gamma+1)$ verwandelt werden, folgt, nach Subtraction der Gleichung (25.), eine Formel, die in (26.) übergeht, sobald $\gamma-1$ statt γ gesetzt ist. Eine einfache Elimination giebt (32.) aus (25. und 26.). Aus (22.) folgt (29.) durch Vertauschung von α und β; aus (26. und 29.) erhält man (23.), hieraus durch Permutation von α und β die Gleichung (20.), und (31.) aus (26.). Aus (22. und 29.) entsteht (19.); aus (19. und 23.) folgt (18.), hieraus (27.) durch Vertauschung von α und β. Aus (26. und 31.) folgt (24.); aus (18. und 25.) entsteht (21.), aus (21.) durch Permutation (28.), und (30.) aus (25.).

Aus vorstehenden funfzehn Ausdrücken folgt, dafs eine lineäre Beziehung zwischen je drei Functionen $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$, $\varphi(\alpha',\beta',\gamma',q,x)$ und $\varphi(\alpha'',\beta'',\gamma'',q,x)$ besteht, wenn α, α', α'', und ebenso β, β', β'', so wie γ, γ', γ'' nur um ganze Zahlen von einander sich unterscheiden. Diese Relation wird man in jedem besondern Falle durch eine endliche Anzahl von Eliminationen finden können. Wir wollen nur einige solcher Gleichungen aufstellen; und zwar werden sich dieselben auf die Fälle beziehen, wo sich α', α'' von α; β', β'' von β; γ', γ'' von γ um höchstens zwei Einheiten unterscheiden. Machen wir deshalb wie früher $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)=\varphi$ und setzen ferner

$$\begin{array}{ll}
\varphi(\alpha+1,\ \beta,\ \gamma,\ q,x)=\varphi_1, & \varphi(\alpha+2,\beta+1,\gamma+1,q,x)=\varphi_4,\\
\varphi(\alpha+1,\beta+1,\ \gamma,\ q,x)=\varphi_2, & \varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma+1,q,x)=\varphi_5,\\
\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)=\varphi_3, & \varphi(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2,q,x)=\varphi_6,
\end{array}$$

so folgen aus (23., 30. und 22.) die fünf Gleichungen:

$$33.\quad (1-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi-(1+q^{\gamma-1}-q^{\gamma-\alpha-1}-q^{\gamma-\beta-1})\varphi_1 \\ -q^{\gamma-\beta-1}(1-q^{\beta})(1-q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x)\varphi_2=0,$$

$$34.\quad (1-q^{\gamma})\varphi_1-(1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x)\varphi_2-q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x(1-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi_3=0,$$

$$35.\quad (1-q^{\gamma})\varphi_2-(1-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi_3-q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^{\alpha+1})\varphi_4=0,$$

$$36.\quad (1-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi_3-(1+q^{\gamma}-q^{\gamma-\alpha-1}-q^{\gamma-\beta-1})\varphi_4 \\ -q^{\gamma-\beta-1}(1-q^{\beta+1})(1-q^{\alpha+\beta+2-\gamma}x)\varphi_5=0,$$

$$37.\quad (1-q^{\gamma+1})\varphi_4-(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\alpha+\beta+2-\gamma}x)\varphi_5-q^{\alpha+\beta+2-\gamma}x(1-q^{\gamma-\alpha-1})\varphi_6=0.$$

Aus (33. und 34.) erhält man durch Elimination von φ_1:

$$38.\quad (1-q^{\gamma})\varphi-(1-q^{\gamma})(1-q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x)\varphi_2 \\ -q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x(1+q^{\gamma-1}-q^{\gamma-\alpha-1}-q^{\gamma-\beta-1})\varphi_3=0,$$

und aus (35. und 38.) durch Elimination von φ_2:

$$39.\quad (1-q^{\gamma})\varphi-[1-q^{\gamma-\alpha-1}-xq^{\alpha}(1-q^{\beta})]\varphi_3 \\ -q^{\gamma-\alpha-1}(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x)\varphi_4=0;$$

aus (36. und 37.) durch Elimination von φ_5:

$$40.\quad (1-q^{\gamma+1})\varphi_3-(1-q^{\gamma+1})\varphi_4+q^{\alpha+1}x(1-q^{\beta+1})\varphi_6=0;$$

und aus (39. und 40.) durch Elimination von φ_4:

$$41.\quad (1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\varphi-(1-q^{\gamma+1})[1-q^{\gamma}-x(q^{\alpha}+q^{\beta}-q^{\alpha+\beta}-q^{\alpha+\beta+1})]\varphi_3 \\ -q^{\gamma}x(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta+1})(1-q^{\alpha+\beta+1-\gamma}x)\varphi_6=0.$$

Vorstehenden Formeln kann man nach Anleitung der „Disquisitiones generales circa ser. infin. etc." noch folgende hinzufügen:

$$42.\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma-1)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=q^{\gamma-1}x\cdot\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma-1})(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),$$

$$43.\quad \varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=q^{\alpha}x\cdot\frac{(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),$$

$$44.\quad \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=q^{\beta}x\cdot\frac{(1-q^{\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),$$

$$45.\quad \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=q^{\beta}x\cdot\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

$$46.\quad \varphi(\alpha+1),\beta,\gamma+1)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=q^{\alpha}x\cdot\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{\gamma-\alpha})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

$$47.\quad \varphi(\alpha-1,\beta+1,\gamma)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=-q^{\alpha-1}x\cdot\frac{(1-q^{\beta+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1),$$

$$48.\quad \varphi(\alpha+1,\beta-1,\gamma)-\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=q^{\alpha}x\cdot\frac{(1-q^{\beta-\alpha-1})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma+1),$$

$$49.\quad \varphi(\alpha,\beta+1,\gamma)-\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma)=-q^{\alpha}x\cdot\frac{(1-q^{\beta-\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1).$$

Diese 32 Formeln gehen für $q=1$ in die über, welche *Gaufs* in Sectio I. der oben erwähnten Abhandlung aufgestellt hat. Es ist hier gelegentlich zu bemerken, dafs dort irrthümlich die Formeln (4. und 11.) mit $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma+1)$ statt mit $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1)$ schliefsen, und dafs ferner auch in Formel (23.) bei *Gaufs* ein Fehler sich eingeschlichen hat. Vielleicht ist dafür zu lesen:

$$F(\alpha,\beta+1,\gamma)-F(\alpha+1,\beta,\gamma)=\frac{x(\alpha-\beta)}{\gamma}\cdot F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),$$

und in dieser Voraussetzung habe ich obige Zusammenstellung mit der Formel (49.) geschlossen.

II. Abschnitt.

Euler entwickelt in der „Introductio in anal. infin. Lib. I, cap. 18" die Formel

$$A-B+C-D+E-F+\text{ etc.} = \cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D+\cfrac{CE}{D-E+\text{ etc.}}}}}}$$

Diese Formel bezieht sich nicht blofs auf unendliche convergente Reihen, sondern auch auf beliebig begränzte Ausdrücke. Um dies klarer zu zeigen, bringen wir sie auf die Form

$$1+\chi(1)+\chi(2)+\dots+\chi(n) = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1}{a_1+1-\cfrac{a_2}{a_2+1-\dots-\cfrac{a_n}{a_n+1}}}},$$

wo zur Abkürzung

$$a_1 = \frac{\chi(1)}{1}, \qquad a_m = \frac{\chi(m)}{\chi(m-1)}$$

gesetzt ist. Die a werden bei einer grofsen Zahl von Reihen höchst einfache Ausdrücke. Ist z. B. die Reihe

$$50.\quad S_n = 1+g_1x+g_1g_2x^2+g_1g_2g_3x^3+\dots+g_1g_2g_3\dots g_nx^n$$

vorgelegt, so wird das frühere a_m jetzt g_mx und man erhält

$$51.\quad S_n = \cfrac{1}{1-\cfrac{g_1x}{g_1x+1-\cfrac{g_2x}{g_2x+1-\dots-\cfrac{g_nx}{g_nx+1}}}}.$$

Zu den Reihen, auf welche (51.) leicht angewendet werden kann, gehört auch die Function $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$. In der That: setzt man

$$52.\quad g_m = \frac{(1-q^{\alpha+m-1})(1-q^{\beta+m-1})}{(1-q^m)(1-q^{\gamma+m-1})},$$

so giebt die Formel (51.) die Kettenbruch-Entwicklung von

$$53.\quad S_n = 1+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}\cdot x+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}\cdot x^2+\dots$$
$$\dots+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})\dots(1-q^{\beta+n-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n-1})}\cdot x^n.$$

Als Beispiele von der Anwendung dieser allgemeinen Formel kann man mehrere von den Kettenbruch-Entwicklungen betrachten, die in meiner Abhandlung „Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche" im 32ten Bande dieses Journals abgeleitet sind; noch andere Entwicklungen, die zugleich Interesse haben, weil sie Ausdrücke darstellen, die in der Lehre von den elliptischen Functionen von Wichtigkeit sind, gewähren die Formeln (3.) bis (17.).

Eine ganz andere Art von Kettenbrüchen erhält man aus den im vorigen Abschnitt angeführten Beziehungen zwischen den benachbarten Functionen. Dividirt man nämlich (45.) durch $\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)$, so erhält man

$$1-\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)} = q^\beta x\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)},\text{ also}$$

$$\frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{1}{1-q^\beta x\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}}.$$

Dieselbe Formel giebt

$$\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)} = \frac{\varphi(\beta+1,\alpha+1,\gamma+2)}{\varphi(\beta+1,\alpha,\gamma+1)}$$

$$= \frac{1}{1-q^\alpha x\cdot\frac{(1-q^{\beta+1})(1-q^{\gamma+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+2,\gamma+3)}{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2)}},$$

so dafs

$$54.\quad \frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)} = \cfrac{1}{1-q^\beta x\cdot\cfrac{\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}}{1-q^\alpha x\cdot\frac{(1-q^{\beta+1})(1-q^{\gamma+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})}\cdot\frac{\varphi(\alpha+1,\beta+2,\gamma+2)}{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1)}}}.$$

Durch wiederholte Anwendung von (54.) findet sich ohne Mühe die Gleichung

$$55.\quad \frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\cfrac{a_3 x}{1-\text{etc.}}}}},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$a_1 = q^\beta\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})},\qquad a_2 = q^\alpha\cdot\frac{(1-q^{\beta+1})(1-q^{\gamma+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})},$$

$$a_3 = q^{\beta+1}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q^{\gamma+2})(1-q^{\gamma+3})},\qquad a_4 = q^{\alpha+1}\cdot\frac{(1-q^{\beta+2})(1-q^{\gamma+2-\alpha})}{(1-q^{\gamma+3})(1-q^{\gamma+4})},$$

$$a_5 = q^{\beta+2}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\gamma+2-\beta})}{(1-q^{\gamma+4})(1-q^{\gamma+5})},\qquad a_6 = q^{\alpha+2}\cdot\frac{(1-q^{\beta+3})(1-q^{\gamma+3-\alpha})}{(1-q^{\gamma+5})(1-q^{\gamma+6})},$$

etc.

Ein besonders interessanter Fall dieser allgemeinen Formel ist der, wenn β gleich 0 ist. Setzt man zugleich γ für $\gamma+1$, so erhält man:

$$56. \quad \varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\text{etc.}}}},$$

$$a_1 = \frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^\gamma)}, \qquad a_2 = q^\alpha \cdot \frac{(1-q)(1-q^{\gamma-\alpha})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})},$$

$$a_3 = q \cdot \frac{(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})}, \qquad a_4 = q^{\alpha+1} \cdot \frac{(1-q^2)(1-q^{\gamma+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma+2})(1-q^{\gamma+3})},$$

$$a_5 = q^2 \cdot \frac{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\gamma+2-\beta})}{(1-q^{\gamma+3})(1-q^{\gamma+4})}, \qquad a_6 = q^{\alpha+2} \cdot \frac{(1-q^3)(1-q^{\gamma+2-\alpha})}{(1-q^{\gamma+4})(1-q^{\gamma+5})},$$

etc.

Aufser dem Quotienten der beiden Functionen $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ und $\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ lassen sich noch ähnliche Verhältnisse vermittels der Formeln (43., 44., 47. und 48.) in Kettenbrüche entwickeln. Es findet sich nämlich:

$$57. \quad \frac{\varphi(\alpha+1, \beta, \gamma)}{\varphi(\alpha\ \beta, \gamma)} = \frac{1}{1-q^\alpha x \cdot \frac{(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)}{\varphi(\alpha+1, \beta, \gamma)}},$$

$$58. \quad \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{1-q^\beta x \cdot \frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\beta+1, \alpha+1, \gamma+1)}{\varphi(\beta+1, \alpha, \gamma)}},$$

$$59. \quad \frac{\varphi(\alpha-1, \beta+1, \gamma)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{1+q^{\alpha-1} x \cdot \frac{(1-q^{\beta+1-\alpha})}{(1-q^\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\beta+1, \alpha, \gamma+1)}{\varphi(\beta+1, \alpha-1, \gamma)}},$$

$$60. \quad \frac{\varphi(\alpha+1, \beta-1, \gamma)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma)} = \frac{1}{1-q^\alpha x \cdot \frac{(1-q^{\beta-\alpha-1})}{(1-q^\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\alpha+1, \beta, \gamma+1)}{\varphi(\alpha+1, \beta-1, \gamma)}}.$$

Die rechts in den Gleichungen (57. bis 60.) vorkommenden Quotienten von Functionen φ lassen sich nach (55.) leicht in Kettenbrüche verwandeln. Endlich findet man noch, indem man (2.) mit (43.) und dann mit (57.) verbindet:

$$61. \quad q^\alpha \cdot \frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)} = 1 - \frac{(1-q^\alpha)}{1-q^\alpha x \cdot \frac{(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)} \cdot \frac{\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)}{\varphi(\alpha+1, \beta, \gamma)}}.$$

Diese allgemeinen Formeln stelle ich blofs auf, ohne sie auf Beispiele anzuwenden. Besonders elegante Brüche erhält man, wenn eines der drei ersten

Elemente unendlich wird. Die Entwicklung der in der Einleitung aufgestellten Functionen giebt eine hinlängliche Zahl von interessanten besondern Fällen.

Dadurch, dafs Ausdrücke von verschiedener Form denselben Kettenbruch geben, wird man auf ihre Gleichheit schliefsen dürfen. So findet man z. B. vermittels (55.) die Gleichung

$$62.\quad \frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta.\gamma,q,x)} = \frac{\varphi(\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha,\gamma+1,q,xq^{\alpha+\beta-\gamma})}{\varphi(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma,q,xq^{\alpha+\beta-\gamma})}:$$

ein Ausdruck, der, wie in Abschnitt V. gezeigt werden wird, nur ein specieller Fall eines allgemeinern ist. Macht man $\beta = 0$, so ergiebt sich

$$63.\quad \varphi(\gamma-\alpha,\gamma-1,\gamma,q,xq^{\alpha+1-\gamma}) = \varphi(\gamma-1-\alpha,1,1,q,xq^{\alpha+1-\gamma})\varphi(\alpha,1,\gamma,q,x).$$

Von den Kettenbrüchen, die in der speciellen Formel (56.) enthalten sind, hat *Eisenstein* in einer Reihe von Abhandlungen in diesem Journal (Band 27. p. 78—79, p. 193—197, Band 28. p. 36—40, Band 29. p. 96) einzelne, ganz besondre Fälle ohne Beweis angegeben. Am Schlufs einer schon erwähnten Arbeit über Kettenbrüche im 32. Bande dieses Journals habe ich eine Methode zur Auffindung solcher Entwicklungen angedeutet, die sich auf *alle* in der Form $\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x)$ enthaltenen Kettenbrüche bezieht, wenngleich sie dort nur an *einem Beispiel,* an der Reihe $1+qx+q^4x^2+q^9x^3+\dots$, erläutert ist. Es handelt sich dort um die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen, die durch die besondere Beschaffenheit der Coëfficienten gelingt, wenn $\varphi(\alpha, 1, \gamma, x)$ die Function ist, welche in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, während sich bei einer allgemeineren Reihe das Resultat der Elimination der Unbekannten nicht einfach angeben läfst. Auf dasselbe System linearer Gleichungen kommt man, wenn man die Aufgabe behandelt, die Nenner der Näherungsbrüche des Kettenbruchs für $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ anzugeben. Indem ich diese Aufgabe für den Fall $\beta=1$ löse (wobei sich zeigen wird, dafs *diese Nenner sich wieder als Functionen von der Form der φ darstellen lassen*), habe ich somit zugleich die Methode der Auflösung dieser Gleichungen als versprochene Ergänzung zu der obigen Abhandlung gegeben.

Bildet man die Näherungswerthe des Kettenbruchs (56.), so findet man leicht das Gesetz, nach welchem der Grad, in Bezug auf x, von Zähler oder Nenner derselben wächst. Bezeichnet man die Zähler durch den Buchstaben P, die Nenner durch Q und setzt

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1 x}{1-\cfrac{a_2 x}{1-\ddots\cfrac{}{1-\cfrac{a_n x}{1}}}}} = \frac{P_n}{Q_n},$$

so wird

$$P_0 = 1, \quad P_1 = 1, \quad P_2 = 1 - a_2 x,$$
$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 1 - a_1 x, \quad Q_2 = 1 - (a_1 + a_2) x,$$
$$P_3 = 1 - (a_2 + a_3) x,$$
$$Q_3 = 1 - (a_1 + a_2 + a_3) x + a_1 a_3 x^2.$$

Allgemein ist ferner

$$64. \quad P_n = P_{n-1} - a_n x P_{n-2}, \qquad Q_n = Q_{n-1} - a_n x Q_{n-2}.$$

Durch Vergleichung dieser Ausdrücke untereinander ergiebt sich, dafs P_{2n}, P_{2n+1}, Q_{2n-1} und Q_{2n} denselben Grad haben; die höchste Potenz von x, welche darin vorkommt, ist nämlich die $n$te. Aufserdem ersieht man aus dem Bildungsgesetz der P und Q, dafs das in ihnen enthaltene, von x freie Glied 1 ist; es ergiebt sich also, sowohl für Q_{2n-1} als für Q_{2n}, die Form

$$65. \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n;$$

wo man $c_0 = 1$ zu setzen hat, so dafs sowohl in Q_{2n-1} als in Q_{2n} *im Ganzen n unbekannte Coëfficienten c* vorkommen.

Aus den Formeln (64.) wird (indem man $\varphi(\alpha, 1, \gamma)$ als Werth von $\frac{P_n}{Q_n}$ für $n = \infty$ ansieht) die bekannte Beziehung

$$\varphi(\alpha, 1, \gamma) - \frac{P_n}{Q_n} = a_1 a_2 \ldots a_{n+1} x^{n+1} \left\{ \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} + \frac{a_{n+2} x}{Q_{n+1} Q_{n+2}} + \frac{a_{n+2} a_{n+3} x^2}{Q_{n+2} Q_{n+3}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{a_{n+2} a_{n+3} \ldots a_{n+m} x^m}{Q_{n+m-1} Q_{n+m}} + \ldots \right\}$$

gefunden, aus welcher folgt, dafs in der Entwicklung von $\varphi(\alpha, 1, \gamma) - \frac{P_n}{Q_n}$, also auch von $Q_n \varphi(\alpha, 1, \gamma) - P_n$ nach aufsteigenden Potenzen von x, sämmtliche Potenzen dieser Gröfse, bis x^n einschliefslich, fehlen. Da ferner P_{2n} vom $n$ten Grade ist, so müssen in $Q_{2n} \varphi(\alpha, 1, \gamma)$ die $(n+1)$te, $(n+2)$te, etc. bis zur $2n$ten Potenz von x (incl.) fehlen, während in $Q_{2n-1} \varphi(\alpha, 1, \gamma)$ die $n$te, $(n+1)$te, etc. bis $(2n-1)$te Potenz (incl.) nicht vorkommen dürfen. *In beiden Fällen fehlen genau n Potenzen von x*, d. h. so viele, als das jedesmalige Q Coëfficienten c hat.

Führt man die Multiplication des Ausdrucks $Q_n\varphi(\alpha, 1, \gamma)$ wirklich aus, und ordnet das Product nach aufsteigenden Potenzen von x, so ist der Coëfficient einer jeden Potenz von x ein Aggregat, in welchem die c linear vorkommen; die Bedingung, dafs ein solcher Coëfficient verschwinde, ist also eine *lineare Gleichung* zwischen den c. Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich, *dafs eben so viele lineare Gleichungen zur Bestimmung der c, als solche c, vorhanden sind.* Versuchen wir zunächst diejenigen c zu entwickeln, welche, in (65.) substituirt, Q_{2n-1} geben, so haben wir sie aus folgenden Gleichungen zu suchen:

$$66. \begin{cases} 0 = c_n + c_{n-1}\cdot\frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^\gamma)} + \dots + c_{n-p}\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+p-1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+p-1})} + \dots \\ \qquad \dots + c_0\cdot\frac{(1-q^\alpha)\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^\gamma)\dots(1-q^{\gamma+n-1})}, \\ 0 = c_n + c_{n-1}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+1})}{(1-q^{\gamma+1})} + \dots + c_{n-p}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\alpha+2})\dots(1-q^{\alpha+p})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})\dots(1-q^{\gamma+p})} + \dots \\ \qquad \dots + c_0\cdot\frac{(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n})}{(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+n})}, \\ 0 = c_n + c_{n-1}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+2})}{(1-q^{\gamma+2})} + \dots + c_{n-p}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+2})(1-q^{\alpha+3})\dots(1-q^{\alpha+p+1})}{(1-q^{\gamma+2})(1-q^{\gamma+3})\dots(1-q^{\gamma+p+1})} + \dots \\ \qquad \dots + c_0\cdot\frac{(1-q^{\alpha+2})\dots(1-q^{\alpha+n+1})}{(1-q^{\gamma+2})\dots(1-q^{\gamma+n+1})}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = c_n + c_{n-1}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+n-1})} + \dots + c_{n-p}\cdot\frac{(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+n})\dots(1-q^{\alpha+n+p-2})}{(1-q^{\gamma+n-1})(1-q^{\gamma+n})\dots(1-q^{\gamma+n+p-2})} + \dots \\ \qquad \dots + c_0\cdot\frac{(1-q^{\alpha+n-1})\dots(1-q^{\alpha+2n-2})}{(1-q^{\gamma+n-1})\dots(1-q^{\gamma+2n-2})}, \end{cases}$$

während das System der zu Q_{2n} gehörigen c entsteht, wenn man in (66.) $\alpha+1$ und $\gamma+1$ statt α und γ setzt.

Gleichungen wie diese lassen sich durch successive Elimination der Unbekannten c auflösen. Man eliminirt zu dem Ende aus den beiden ersten Gleichungen eine Unbekannte, z. B. c_{n-p}, indem man die erste Gleichung mit $\frac{(1-q^{\alpha+p})}{(1-q^{\gamma+p})}$, die zweite mit $\frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^\gamma)}$ multiplicirt und darauf subtrahirt. Es verschwindet dann in der Differenz c_{n-p}, und mit einem beliebigen c, z. B. mit c_{n-m}, multiplicirt, ist:

$$\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+m-1})}\left\{\frac{(1-q^{\alpha+p})}{(1-q^{\gamma+p})} - \frac{(1-q^{\alpha+m})}{(1-q^{\gamma+m})}\right\}$$
$$= \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})\dots(1-q^{\gamma+m})}\cdot(1-q^{m-p})\cdot\frac{(q^\gamma-q^\alpha)}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+p})}.$$

Hebt man den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor $\frac{(q^\gamma - q^\alpha)}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+p})}$ fort, so ist das Resultat der Elimination von c_{n-p} aus den beiden ersten Gleichungen folgende Beziehung:

$$67. \quad c_n(1-q^{-p}) + c_{n-1}(1-q^{1-p})\frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^{\gamma+1})} + \dots$$
$$\dots + c_{n-m}(1-q^{m-p})\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})\dots(1-q^{\gamma+m})}$$
$$\dots + c_0(1-q^{n-p})\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})\dots(1-q^{\gamma+n})} = 0.$$

Da die zweite und dritte Gleichung in (66.) aus der ersten und zweiten dadurch entsteht, dafs man darin α und γ mit $\alpha+1$ und $\gamma+1$ vertauscht, so wird man auch das Resultat der Elimination von c_{n-p} aus der zweiten und dritten Gleichung erhalten, wenn man dieselbe Vertauschung in (67.) macht. So erhält man aus (66.) ein neues System von $n-1$ linearen Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten, ganz entsprechend dem System (66.). Die Unbekannten sind nicht mehr c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, ... c_0, sondern $c_n(1-q^{-p})$, $c_{n-1}(1-q^{1-p})$, $c_{n-2}(1-q^{2-p})$, ... $c_{n-m}(1-q^{m-p})$, ... $c_0(1-q^{n-p})$, und ihre Coëfficienten erhält man aus (66.), wenn man in den ersten $n-1$ Gleichungen dieses Systems in den Coëfficienten der c zwar α unverändert läfst, aber γ in $\gamma+1$ verwandelt. Dieselbe Methode, wiederholt angewandt, giebt wiederum dem ersten ähnliche Systeme, von denen jedes eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält, als das nächst vorhergehende. Hat man r Eliminationen gemacht, nämlich c_{n-p_1}, c_{n-p_2}, ... c_{n-p_r} eliminirt, so hat man ein System, dessen erste Gleichung

$$68. \quad c_{n-m}(1-q^{m-p_1})(1-q^{m-p_2})\dots(1-q^{m-p_r})\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q^{\gamma+r})(1-q^{\gamma+r+1})\dots(1-q^{\gamma+r+m-1})}$$
$$\dots + c_0(1-q^{n-p_1})(1-q^{n-p_2})\dots(1-q^{n-p_r})\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+r})(1-q^{\gamma+r+1})\dots(1-q^{\gamma+r+n-1})}$$

ist. Setzt man $r = n-1$, so wird das ganze System sich auf *eine* Gleichung reduciren. Es mögen dann p_1, p_2, ... p_r alle Zahlen 0, 1, 2, ... $(n-1)$ vorstellen, aufser einer bestimmten Zahl m, so wird man (indem $c_0 = 1$ ist) aus (68.) erhalten:

$$c_{n-m} = -\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q)}{(1-q^{n-m})(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q)(1-q^{-1})(1-q^{-2})\dots(1-q^{m+1-n})}\cdot$$
$$\frac{(1-q^{\alpha+m})(1-q^{\alpha+m+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+n+m-1})(1-q^{\gamma+n+m})\dots(1-q^{\gamma+2n-2})}$$
$$= (-1)^{n-m}q^{\frac{1}{2}(n-m)(n-m-1)}\cdot\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{m+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-m})}\cdot$$
$$\frac{(1-q^{\alpha+m})(1-q^{\alpha+m+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+n+m-1})(1-q^{\gamma+n+m})\dots(1-q^{\gamma+2n-2})}\cdot$$

Macht man noch $n-m=s$, so findet man als Werth von c_s der, in (65.) substituirt, Q_{2n-1} giebt:

$$c_s = (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s-1)}\cdot\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n+1-s})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^s)}\cdot$$
$$\frac{(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+n-2})\dots(1-q^{\alpha+n-s})}{(1-q^{\gamma+2n-2})(1-q^{\gamma+2n-3})\dots(1-q^{\gamma+2n-s-1})}\cdot$$

Es wird also

$$Q_{2n-1} = 1-\frac{(1-q^n)(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q)(1-q^{\gamma+2n-2})}\cdot x+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\gamma+2n-2})(1-q^{\gamma+2n-3})}\cdot qx^2$$
$$-\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+n-2})(1-q^{\alpha+n-3})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^{\gamma+2n-2})(1-q^{\gamma+2n-3})(1-q^{\gamma+2n-4})}\cdot q^3x^3+\dots$$

oder

$$69.\quad Q_{2n-1} = \varphi(-n,\ 1-\alpha-n,\ 2-\gamma-2n,\ q,\ q^{\alpha+1-\gamma}x).$$

Auf ähnliche Art findet man

$$70.\quad Q_{2n} = \varphi(-n,\ -\alpha-n,\ 1-\gamma-2n,\ q,\ q^{\alpha+1-\gamma}x).$$

Für $n=\infty$ gehen beide Formeln (69. und 70.) in denselben Ausdruck über. Der unendlich entfernte Nenner Q_∞ wird nämlich

$$= 1-\frac{x}{1-q}+\frac{qx^2}{(1-q)(1-q^2)}-\frac{q^3x^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\dots$$
$$= \varphi(-g, -g, -2g, q, x),$$

für $g=\infty$.

Dieselbe Methode läfst sich auch auf die *Gaufs*ische Reihe anwenden. Man kann auch dort, wie hier, das System linearer Gleichungen lösen, um das es sich bei der Auffindung der Näherungswerthe handelt, ohne sich der Determinanten bedienen zu müssen. Die Resultate für diesen Fall lassen sich ohne Mühe aus (69. und 70.) finden, indem man darin q gleich 1 macht. Auf diese Weise ergiebt sich, dafs sich die Reihe

$$F(\alpha,1,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\cdot x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\cdot x^3+\dots$$

sich in den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha}{\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}x}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x}{1-\cfrac{\frac{2\cdot(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x}{1-\text{etc.}}}}}}$$

verwandeln läfst, dessen $(2n-1)$ter und $2n$ter Näherungswerth die Nenner

$$Q_{2n-1} = F(-n, 1-\alpha-n, 2-\gamma-2n, x),$$
$$Q_{2n} \;= F(-n, \;-\alpha-n, 1-\gamma-2n, x)$$

haben. Die Anwendung dieser Formeln auf Reihen, welche man für besondere Werthe von α, β, γ erhält, hat keine Schwierigkeit.

Eine andere Methode führt einfacher zum Ziel, als dies heuristische Verfahren; welches ich jedoch nicht übergehen wollte, um hier gelegentlich durch Auflösung der linearen Gleichungen die frühere Arbeit zu ergänzen, wo man gleichzeitig den Kettenbruch suchte, in welchen eine Function sich entwickeln läfst, und die Nenner der Näherungsbrüche desselben. Die zweite Methode geht von der bekannten Beziehung der Zähler oder Nenner zweier aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche zum Kettenbruch selbst aus. Setzt man

$$\frac{P_n}{Q_n} = \cfrac{\lambda}{\mu+\cfrac{\lambda_1}{\mu_1+\cfrac{\lambda_2}{\mu_2+\ddots+\cfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-1}+\cfrac{\lambda_n}{\mu_n}}}}},$$

so findet sich

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \mu_n+\cfrac{\lambda_n}{\mu_{n-1}+\cfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n-2}+\ddots+\cfrac{\lambda_2}{\mu_1+\cfrac{\lambda_1}{\mu}}}},$$

während das Verhältnifs der Zähler $\frac{P_n}{P_{n-1}}$ einen Kettenbruch giebt, der sich vom obigen für $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ nur dadurch unterscheidet, dafs ihm das Glied $\frac{\lambda_1}{\mu}$ fehlt.

Um diese Formeln auf (55.) anzuwenden, hat man nur alle μ gleich 1 zu setzen, während

$$\lambda = 1, \quad \lambda_1 = -a_1 x, \quad \lambda_2 = -a_2 x, \quad \lambda_3 = -a_3 x \text{ etc. ist,}$$

wo die a eben die Gröfsen sind, welche sie in (55.) vorstellen. Man hat dann

$$71. \quad \frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}} = \cfrac{1}{1 - q^{\alpha+n-1}x\cdot\frac{(1-q^{\beta+n})(1-q^{\gamma+n-\alpha})}{(1-q^{\gamma+2n-1})(1-q^{\gamma+2n-2})}}{1 - q^{\beta+n-1}x\cdot\frac{(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\gamma+n-\beta-1})}{(1-q^{\gamma+2n-2})(1-q^{\gamma+2n-3})}}{1 - q^{\alpha+n-2}x\cdot\frac{(1-q^{\beta+n-1})(1-q^{\gamma+n-\alpha-1})}{(1-q^{\gamma+2n-3})(1-q^{\gamma+2n-4})}}{1 - q^{\beta+n-2}x\cdot\frac{(1-q^{\alpha+n-2})(1-q^{\gamma+n-\beta-2})}{(1-q^{\gamma+2n-4})(1-q^{\gamma+2n-5})}}{1 - \text{etc.} \cdots}{1 - q^{\alpha}x\cdot\frac{(1-q^{\beta+1})(1-q^{\gamma+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma+2})(1-q^{\gamma+1})}}{1 - q^{\beta}x\cdot\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma})}}{1}}}}}}.$$

Die Vergleichung von (71.) mit (55.) zeigt, dafs ersterer Bruch in seiner ganzen Ausdehnung mit dem Anfange der Entwicklung von

$$72. \quad \frac{\varphi(-n-\beta,\ 1-n-\alpha,\ 1-\gamma-2n,\ q,\ q^{\alpha+\beta-\gamma}x)}{\varphi(-n-\beta,\ -n-\alpha,\ -\gamma-2n,\ q,\ q^{\alpha+\beta-\gamma}x)}$$

übereinstimmt. Wenn letztere da abbrechen sollten, wo die Glieder anfangen, die nicht mehr in $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}}$ enthalten sind, so würden beide Entwicklungen identisch sein. Der Kettenbruch für (72.) bricht aber an der bezeichneten Stelle ab, wenn $\beta = 0$, oder wenn $\gamma - \alpha = 0$ ist. In beiden Fällen ist $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}}$ gleich dem Ausdruck (72.). Im ersten Fall ($\beta = 0$) ist sowohl Zähler als Nenner in (72.) eine ganze Function vom $n$ten Grade, die 1 zu dem von x unabhängigen Gliede hat, so dafs der Zähler gleich Q_{2n-1}, der Nenner gleich Q_{2n} ist; und dieses sind die in den Formeln (69. und 70.) enthaltenen Resultate. Im zweiten Falle ($\gamma = \alpha$) läfst sich der Bruch (72.) nach (62.) auf die Form

$$\frac{\varphi(-n,\ 1+\beta-\alpha-n,\ 1-\alpha-2n,\ q,\ x)}{\varphi(-n,\ \beta-\alpha-n,\ -\alpha-2n,\ q,\ x)}$$

bringen; so dafs man wiederum im Zähler und Nenner Functionen hat, die den Q direct gleich sind. Wir erhalten hier also folgendes neue Resultat: Die Nenner

des Kettenbruchs für

$$73.\quad \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \alpha+1, q, x)}{\varphi(1, \beta, 1, q, x)}$$

sind

$$Q_{2n-1} = \varphi(-n, 1+\beta-\alpha-n, 1-\alpha-2n, q, x),$$
$$Q_{2n} = \varphi(-n, \beta-\alpha-n, -\alpha-2n, q, x).$$

Dasselbe hätte man auch aus (69. und 70.) schliefsen können. Denn nach (62.) wird der Ausdruck (73.) gleich

$$\varphi(\alpha-\beta, 1, \alpha+1, q, q^\beta x),$$

und der Kettenbruch dieser Function liefert nach (69. und 70.) die so eben für Q gefundenen Formeln.

III. Abschnitt.

Für einige besondere Werthe der drei ersten Elemente α, β, γ erhält man beachtenswerthe Resultate, die zwar zum Theil schon anderweitig bekannt sind, hier aber entweder des Zusammenhanges wegen erwähnt werden sollen, oder weil sie, eben in ihrer Eigenschaft als besondere Fälle einer allgemeinen Reihe, Interesse darbieten.

Aus (61.) ersieht man, dafs der Kettenbruch für $\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}$ abbricht, wenn $\beta = \gamma$, indem dann $\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1) = \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma)$ ist. Man hat also

$$q^\alpha \cdot \frac{\varphi(\alpha, 1, 1, q, qx)}{\varphi(\alpha, 1, 1, q, x)} = 1 - \frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^\alpha x)} = \frac{q^\alpha(1-x)}{(1-q^\alpha x)}.$$

Hieraus findet sich

$$\varphi(\alpha, 1, 1, q, x) = \frac{(1-q^\alpha x)}{(1-x)} \cdot \varphi(\alpha, 1, 1, q, qx).$$

Indem hier für x nach und nach qx, q^2x, q^3x, etc. gesetzt wird, entsteht, da $q^n x$ für $n = \infty$ verschwindet, also $\varphi(\alpha, 1, 1, q, q^n x)$ für $n = \infty$ sich in 1 verwandelt:

$$74.\quad \varphi(\alpha, 1, 1, q, x) = \frac{(1-q^\alpha x)(1-q^{\alpha+1}x)(1-q^{\alpha+2}x)\dots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots}.$$

Wir können daher die Reihen (3., 4., 5.) als Producte darstellen, die ins Unendliche fortlaufen; nur die erste von ihnen kann in gewissen Fällen abbrechen. Es findet sich

$$75.\quad \varphi(-n,\beta,\beta,q,-xq^n) = \frac{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots}{(1+q^nx)(1+q^{n+1}x)(1+q^{n+2}x)\dots},$$

$$76.\quad \varphi(-g,\beta,\beta,q,-xq^g) = (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots,$$

$$77.\quad \varphi(g,\beta,\beta,q,-x) = \frac{1}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots}.$$

Von diesen Functionen entspricht die erste der binomischen Reihe, die zweite der Entwicklung von e^x, die dritte der von e^{-x}. Die in (76. und 77.) enthaltene Beziehung, dafs

$$\varphi(-g,\beta,\beta,q,-xq^g) = \frac{1}{\varphi(g,\beta,\beta,q,-x)}$$

ist, fliefst aus einer allgemeinen Gleichung, die sich aus dem Ausdruck der Reihen φ durch ein unendliches Product, wie er durch (75.) gegeben wird, leicht beweisen läfst. Es ist nämlich allgemein

$$\varphi(\alpha,1,1,q,x)\,\varphi(\beta,1,1,q,q^\alpha x) = \varphi(\alpha+\beta,1,1,q,x);$$

woraus man unter andern auch folgende Gleichung erhält:

$$\frac{(1-q^{\alpha+\beta})(1-q^{\alpha+\beta+1})\dots(1-q^{\alpha+\beta+n-1})}{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+n-1})}$$

$$= 1+\frac{(1-q^n)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^{\alpha+n-1})}.q^\alpha+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+n-2})}.q^{2\alpha}$$

$$+\frac{(1-q^n)\dots(1-q^{n-2})(1-q^\beta)\dots(1-q^{\beta+2})}{(1-q)\dots(1-q^3)(1-q^{\alpha+n-1})\dots(1-q^{\alpha+n-3})}.q^{3\alpha}+\dots \text{ etc.}$$

Da die Reihe

$$\varphi(g,\beta,\beta,q,x) = 1+\frac{x}{(1-q)}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}+\dots$$

für jedes x, welches kleiner als 1 ist, convergirt, also endlich bleibt, so kann der reciproke Werth dieser Reihe (und dieser ist nach (77.) das Product $(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots$) nicht verschwinden. Andererseits bilden die Ausdrücke $(1-x)$, $(1-x)(1-qx)$, $(1-x)(1-qx)(1-q^2x)$, etc. eine abnehmende Reihe, indem $(1-q^nx)<1$ ist, so dafs das Product $(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots$ eine von Null verschiedene endliche Gröfse für jedes x wird, welches kleiner als 1 ist. Dasselbe gilt demnach von dem Product $(1-q^r)(1-q^{r+1})(1-q^{r+2})\dots$ zunächst, wenn $q^r<1$; dann aber auch allgemein; den einzigen Fall ausgenommen, wo r eine negative ganze Zahl, oder Null ist. In der That: ist r eine negative Zahl, deren Zahlwerth zwischen den ganzen Zahlen n und $n+1$ liegt, so wird $(1-q^{n+1+r})(1-q^{n+2+r})\dots$ nach dem obigen Satze eine von Null verschiedne endliche Zahl sein, also auch dies Product mit einer willkür-

lichen von Null verschiednen Zahl multiplicirt, folglich auch
$(1-q^r)(1-q^{r+1})\dots(1-q^{n+r})(1-q^{n+1+r})(1-q^{n+2+r})\dots = (1-q^r)(1-q^{r+1})$ etc.
Hiermit ist streng bewiesen, dafs, wie in der Einleitung behauptet wurde, ein unendlich entferntes Glied der Reihe φ nach einer endlichen, von Null verschiednen Grenze hin convergirt und dafs demnach die Reihe für $x=1$ divergirt.

Aus (74.) ersieht man auch, dafs die Reihen ψ, ψ_1, ψ_2 in (15., 16., 17.) sich in Producte verwandeln lassen, die, mit den in den „Fundamentis p. 99" vorkommenden verglichen, diese Gleichungen verificiren.

Endlich führt noch (74.) auf eine merkwürdige Beziehung zwischen zwei Reihen, die hier entwickelt werden sollen. Man setzt dazu, unter der Voraussetzung dafs $q^\beta x < 1$ und $z < 1$ ist:

$$S = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta x)}{(1-q)(1-q^\gamma x)}\cdot z + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta x)(1-q^{\beta+1}x)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma x)(1-q^{\gamma+1}x)}\cdot z^2 + \dots$$

Obgleich diese Reihe nicht allgemeiner ist, als obiges φ, so macht doch grade vorstehende Form die folgenden Untersuchungen übersichtlicher. Multiplicirt man die Gleichung auf beiden Seiten mit

$$\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^\beta) = \frac{(1-q^\gamma x)(1-q^{\gamma+1}x)(1-q^{\gamma+2}x)\dots}{(1-q^\beta x)(1-q^{\beta+1}x)(1-q^{\beta+2}x)\dots},$$

so ergiebt sich

$$\varphi(\gamma-\beta,1,1,q,xq^\beta)S = \varphi(\gamma-\beta,1,1,q,xq^\beta) + \frac{(1-q^\alpha)}{(1-q)}\cdot z\,\varphi(\gamma-\beta,1,1,q,xq^{\beta+1})$$
$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^2)}\cdot z^2\varphi(\gamma-\beta,1,1,q,xq^{\beta+2}) + \text{etc.}$$

Die Seite rechts, welche jetzt nach Potenzen von z geordnet ist, kann man nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln, wodurch sie in

$$1 + \frac{(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q)}\cdot q^\beta x + \frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot q^{2\beta}x^2 + \dots$$
$$+ \frac{(1-q^\alpha)}{(1-q)}\cdot z + \frac{(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q)}\cdot\frac{(1-q^\alpha)}{(1-q)}\cdot q^{\beta+1}zx + \frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot\frac{(1-q^\alpha)}{(1-q)}\cdot q^{2\beta+2}z^2x^2 + \dots$$
$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot z^2 + \frac{(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q)}\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot q^{\beta+2}z^2x$$
$$+ \frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot q^{2\beta+4}z^2x^2 + \dots$$
$$\text{etc.}$$

übergeht, oder, wenn man das in dieselben Potenzen von x Multiplicirte addirt, in

$$\varphi(\alpha,1,1,q,z)+\frac{(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q)}\cdot xq^{\beta}\varphi(\alpha,1,1,q,qz)$$
$$+\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot x^2q^{2\beta}\varphi(\alpha,1,1,q,q^2z)+\dots$$
$$=\varphi(\alpha,1,1,q,z)\Big\{1+\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-z)}{(1-q)(1-q^{\alpha}z)}\cdot q^{\beta}x$$
$$+\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot\frac{(1-z)(1-qz)}{(1-q^{\alpha}z)(1-q^{\alpha+1}z)}\cdot q^{2\beta}x^2+\dots\Big\}.$$

Setzt man für S seinen Werth, so erhält man schliefslich

$$78.\quad \frac{(1-q^{\gamma}x)(1-q^{\gamma+1}x)\dots}{(1-q^{\beta}x)(1-q^{\beta+1}x)\dots}\Big\{1+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta}x)}{(1-q)(1-q^{\gamma}x)}\cdot z$$
$$+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta}x)(1-q^{\beta+1}x)}{(1-q)(1-q^{\alpha})(1-q^{\gamma}x)(1-q^{\gamma+1}x)}\cdot z^2+\text{etc.}\Big\}$$
$$=\frac{(1-q^{\alpha}z)(1-q^{\alpha+1}z)\dots}{(1-z)(1-qz)\dots}\Big\{1+\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-z)}{(1-q)(1-q^{\alpha}z)}\cdot q^{\beta}x$$
$$+\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})}{(1-q)(1-q^2)}\cdot\frac{(1-z)(1-qz)}{(1-q^{\alpha}z)(1-q^{\alpha+1}z)}\cdot q^{2\beta}x^2+\text{etc.}\Big\}.$$

Will man die in den Parenthesen eingeschlossenen Reihen durch das Zeichen φ ausdrücken, so kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, $x=1$ und $z=q^r$ setzen, und erhält dann folgende Relation:

$$79.\quad \frac{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})(1-q^{\gamma+2})\text{ etc.}}{(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})(1-q^{\beta+2})\text{ etc.}}\cdot\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^r)$$
$$=\frac{(1-q^{\alpha+r})(1-q^{\alpha+r+1})(1-q^{\alpha+r+2})\text{ etc.}}{(1-q^{r})(1-q^{r+1})(1-q^{r+2})\text{ etc.}}\cdot\varphi(\gamma-\beta,r,\alpha+r,q,q^{\beta}).$$

Die Formel (79.) zeigt, wie sich mit Hülfe einfacher unendlicher Producte die Function $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$ in eine Reihe derselben Art verwandeln läfst, die nach Potenzen von q^{β} geordnet ist, *so dafs durch (79.) die Vergleichung von Reihen φ mit verschiedenem letztem Element auf die Untersuchung über das Verhalten solcher Reihen mit gleichem letztem Element und verschiedenen ersten drei Elementen reducirt worden ist.*

Die vorstehenden zwei allgemeinen Formeln wollen wir nur auf wenige specielle Fälle anwenden. Es ist $\varphi(-g,1,g,q^2,zq^{2g+1})$ für $g=\infty$, oder

$$1-qz+q^4z^2-q^9z^3+q^{16}z^4-\dots$$
$$=\{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots\}\{(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\dots\}\cdot$$
$$\Big\{1+\frac{1}{(1-q^2)(1-qz)}+\frac{1}{(1-q^2)(1-q^4)(1-qz)(1-q^3z)}+\dots\Big\}.$$

Eine andre Relation findet sich für $\alpha=1$, $\gamma=\beta+1$, $x=q^{-\beta}\xi$; es wird dann

$$\frac{1}{(1-\xi)}+\frac{z}{(1-q\xi)}+\frac{z^2}{(1-q^2\xi)}+\dots.=\frac{1}{(1-z)}+\frac{\xi}{(1-qz)}+\frac{\xi^2}{(1-q^2z)}+\dots.$$

Die so erhaltene Formel, die man übrigens leicht durch Entwicklung der Nenner in Reihen beweisen kann, wird im folgenden Abschnitt zu weitern Verwandelungen angewandt werden. Hier will ich sie nur zur Ableitung einer bekannten Gleichung benutzen. Setzt man q^2 statt q, q statt ξ und qe^{2ix} statt z und multiplicirt mit $\sqrt{q}e^{ix}$, so erhält man

$$\frac{\sqrt{q}\,e^{ix}}{1-q}+\frac{(\sqrt{q})^3e^{3ix}}{(1-q^3)}+\dots.=\frac{\sqrt{q}\,e^{ix}}{(1-q\,e^{2ix})}+\frac{(\sqrt{q})^3e^{ix}}{(1-q^3e^{2ix})}+\dots.,\quad\text{also}$$

$$\frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q}+\frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3}+\dots.=\sin x\left\{\frac{\sqrt{q}(1+q)}{1-2q\cos 2x+q^2}+\frac{\sqrt{q^3}(1+q^3)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\text{etc.}\right\}.$$

IV. Abschnitt.

Für den besondern Fall $x=q^{\gamma-\alpha-\beta}$ läfst sich die Reihe φ für alle Werthe der drei ersten Elemente in ein unendliches Product verwandeln; man setzt dabei natürlich voraus, dafs sie für $x=q^{\gamma-\alpha-\beta}$ endlich bleibt, das heifst, dafs $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist, wenn $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ ins Unendliche fortläuft. Um die Function in diesem Falle zu summiren, kann man von (78.) ausgehn. Macht man darin $x=1$, $z=q^{\gamma-\alpha-\beta}$, so findet sich

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q^{\gamma-\alpha-\beta})$$
$$=\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})\dots.}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\dots.}\cdot\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})\dots.}{(1-q^{\gamma-\alpha-\beta})(1-q^{\gamma+1-\alpha-\beta})\dots.}\cdot\varphi(\gamma-\alpha-\beta,1,1,q^{\beta}).$$

Setzt man für das letzte φ seinen Werth aus (74.), so erhält man

$$80.\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q^{\gamma-\alpha-\beta})=\frac{(1-q^{\gamma-\alpha})(1-q^{\gamma+1-\alpha})\dots.(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})\dots.}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\dots.(1-q^{\gamma-\alpha-\beta})(1-q^{\gamma+1-\alpha-\beta})\dots.}.$$

Ohne viel Rechnung liefert (25.) dasselbe Resultat. Setzt man dort $\alpha+1$ statt α und dann $x=q^{\gamma-\alpha-\beta}$, so findet man

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q^{\gamma-\alpha-\beta})=\frac{(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma+1,q^{\gamma-\alpha-\beta}).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kann man das erste und dritte Element beliebig erhöhen; man erhält für jedes ganze n:

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{(1-q^{\gamma-\beta})(1-q^{\gamma+1-\beta})\dots.(1-q^{\gamma+n-1-\beta})}{(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})\dots.(1-q^{\gamma+n-1})}\cdot\varphi(\alpha+n,\beta,\gamma+n).$$

Für $n=\infty$ wird das Product, welches $\varphi(\alpha+n,\beta,\gamma+n)$ multiplicirt, unendlich und $\alpha+n$ und $\gamma+n$ nähern sich der Gleichheit, so dafs $\varphi(\alpha+n,\beta,\gamma+n)$ in $\varphi(\beta,1,1)$ übergeht. Berücksichtigt man den Werth von $\varphi(\beta,1,1)$ aus (74.), so findet sich die Gleichung (80.).

Hierher gehört auch die Entwicklung von $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ in ein unendliches Product. Um dies bekannte Resultat in seinem Zusammenhange zu entwickeln, multipliciren wir $\varphi(\alpha,1,1,q,q^{\frac{1}{2}-\alpha}z)$ mit $\varphi(\alpha,1,1,q,q^{\frac{1}{2}-\alpha}z)$, wenn z, wie in der Einleitung, e^{2ix} bezeichnet. Setzen wir das Product dieser beiden Functionen

$$=c_0+2c_1\cos 2x+2c_2\cos 4x+\dots+2c_m\cos 2mx+\dots,$$

so ist c_m folgende Reihe:

$$c_m=\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}\cdot q^{\frac{1}{2}m-m\alpha}\Big\{1+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+m})}{(1-q)(1-q^{m+1})}\cdot q^{1-2\alpha}$$
$$+\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\alpha+m})(1-q^{\alpha+m+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})}\cdot q^{2(1-2\alpha)}+\dots\Big\}$$

und nach (80.) ist

$$c_m=q^{\frac{1}{2}m-m\alpha}\cdot\frac{\{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})\}\{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{2-\alpha})\dots\}}{(1-q^{1-2\alpha})(1-q^{2-2\alpha})(1-q^{3-2\alpha})\dots}\cdot$$
$$\cdot\frac{(1-q^{m+1-\alpha})(1-q^{m+2-\alpha})\text{ etc.}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\text{ etc.}}.$$

Man erhält demnach

$$81.\quad \varphi(\alpha,1,1,q,q^{\frac{1}{2}-\alpha}z)\,\varphi(\alpha,1,1,q,q^{\frac{1}{2}-\alpha}z^{-1})$$
$$=\frac{\{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{2-\alpha})(1-q^{3-\alpha})\text{ etc.}\}^2}{\{(1-q)(1-q^2)\text{ etc.}\}\{(1-q^{1-2\alpha})(1-q^{2-2\alpha})\text{ etc.}\}}\cdot$$
$$\Big\{1+2\frac{(1-q^\alpha)}{(1-q^{1-\alpha})}\cdot q^{\frac{1}{2}-\alpha}\cos 2x+2\cdot\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{2-\alpha})}\cdot q^{1-2\alpha}\cos 4x+\text{etc.}\Big\}.$$

Die Seite links in dieser Gleichung läfst sich nach (74.) transformiren; man findet nämlich

$$82.\quad \varphi(\alpha,1,1,q,q^{\frac{1}{2}-\alpha}z)\,\varphi(\alpha,1,1,q^{\frac{1}{2}-\alpha}z^{-1})$$
$$=\frac{(1-2q^{\frac{1}{2}}\cos 2x+q)(1-2q^{\frac{3}{2}}\cos 2x+q^3)\text{ etc.}}{(1-2q^{\frac{1}{2}-\alpha}\cos 2x+q^{1-2\alpha})(1-2q^{\frac{3}{2}-\alpha}\cos 2x+q^{3-2\alpha})\text{ etc.}}.$$

Verbindet man (81.) mit (82.), so entsteht eine allgemeine Formel, die verschiedene Relationen unter Functionen enthält, welche in der Lehre von den elliptischen Integralen von Bedeutung sind. Setzt man q^2 statt q und dann zunächst $\alpha=\infty$, so erhält man

$$\frac{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\text{etc.}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\text{ etc.}}$$
$$=(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\text{ etc.},$$

für die Verwandlung der Reihe $\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ in ein unendliches Product. Das Product, welches gleich $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$ ist, läfst sich bekanntlich leicht aus diesem finden.

Setzt man in (81. und 82.) wiederum q^2 statt q und macht $\alpha=-\frac{1}{2}$, so erhält man

$$\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\text{ etc.}}{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\text{ etc.}}=$$

$$\frac{(1+q)}{(1-q)}\left\{\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\text{ etc.}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\text{ etc.}}\right\}^2\left\{1+2\cdot\frac{(1-q^{-1})}{(1-q^3)}\cdot q^2\cos 2x+2\cdot\frac{(1-q^{-1})(1-q^1)}{(1-q^3)(1-q^5)}\cdot q^4\cos 4x+\text{etc.}\right\}:$$

eine Formel, welche zunächst die Entwicklung von $\dfrac{2K}{\pi\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}-\dfrac{1}{\sin x}$ nach den Sinus der Vielfachen des Bogens x giebt, wie man sie in den „Fundamentis p. 101 No. 18" findet; dann aber überhaupt die Entwicklung eines Quotienten, wie der obige, nach Cosinus der Vielfachen des Bogens x.

Der Ausdruck der Summe $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q^{\gamma-\alpha-\beta})$ läfst sich in eine bequemere Form durch Einführung einer neuen Function bringen, die wir mit $\Omega(q,a)$ oder $\Omega(a)$ bezeichnen. Wir setzen nämlich

$$83.\quad \Omega(q,a)=\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\text{ etc.}}{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})(1-q^{a+3})\text{ etc.}}$$

und erhalten dann

$$84.\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\gamma-\alpha-\beta})=\frac{\Omega(q,\gamma-1)\,\Omega(q,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Omega(q,\gamma-\alpha-1)\,\Omega(q,\gamma-\beta-1)}.$$

Was die Function Ω selbst betrifft, so ist $\Omega(0)=1$, $\Omega(1)=(1-q)$, $\Omega(2)=(1-q)(1-q^2)$, und allgemein, wenn n eine positive ganze Zahl bezeichnet:

$$\Omega(n)=(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots(1-q^n),\quad \Omega(-n)=\infty.$$

Aufserdem findet man für jedes a:

$$\Omega(a)=(1-q^a)\,\Omega(a-1).$$

Die Definitionsgleichung der Ω giebt ferner die Beziehung

$$\frac{\Omega(q^2,\frac{1}{2})\,\Omega(q^2,-\frac{1}{2})}{(1-q)}=\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\text{ etc.}}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\text{ etc.}}\right\}^2.$$

Die rechte Seite läfst sich durch K, k, q bequem ausdrücken; wendet man

die bekannten Formeln dazu an, so findet man

$$\Omega(q^2, \tfrac{1}{2})\,\Omega(q^2, -\tfrac{1}{2}) = \frac{(1-q)}{\sqrt[4]{q}} \cdot \frac{K\sqrt{k}}{\pi}.$$

Die Functionen H und Θ lassen sich leicht auf die Ω zurückführen, indem

$$\Omega\Big(q^2, -\tfrac{1}{2}+\frac{xi}{\log q}\Big)\Omega\Big(q^2, -\tfrac{1}{2}-\frac{xi}{\log q}\Big) = \frac{\{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots\}^2}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)\text{ etc.}}$$

oder

$$85. \quad \Theta\Big(\frac{2Kx}{\pi}\Big) = \sqrt{\Big(\frac{2kk'K^3}{\pi^3\sqrt{q}}\Big)}\frac{1}{\Omega\Big(q^2, -\frac{1}{2}+\frac{xi}{\log q}\Big)\Omega\Big(q^2, -\frac{1}{2}-\frac{xi}{\log q}\Big)} \text{ ist.}$$

Auf ganz ähnliche Art findet man

$$86. \quad H\Big(\frac{2Kx}{\pi}\Big) = \sqrt{\Big(\frac{2^3K^3kk'}{\pi^3}\Big)}\frac{\sin x}{\Omega\Big(q^2, \frac{xi}{\log q}\Big)\Omega\Big(q^2, -\frac{xi}{\log q}\Big)}.$$

Diese Gleichungen, mit (84.) verbunden, geben merkwürdige Entwicklungen von H und Θ. Wendet man nämlich (84.) auf die Function

$$\varphi\Big(\tfrac{1}{2}+\frac{xi}{\log q}, \tfrac{1}{2}-\frac{xi}{\log q}, \tfrac{3}{2}, q^2, q\Big)$$

an, so wird sie gleich folgendem Ausdruck:

$$\frac{\Omega(q^2, \frac{1}{2})\,\Omega(q^2, -\frac{1}{2})}{\Omega\Big(q^2, \frac{xi}{\log q}\Big)\Omega\Big(q^2, -\frac{xi}{\log q}\Big)},$$

also

$$87. \quad H\Big(\frac{2Kx}{\pi}\Big) = 2\sin x\sqrt[4]{q}\sqrt{\Big(\frac{2Kk'}{\pi}\Big)}\Big\{\frac{1}{(1-q)} + \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\cdot q$$
$$+ \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)}\cdot q^2 + \ldots\Big\}.$$

Verwandelt man $\varphi\Big(\frac{1}{2}+\frac{xi}{\log q}, \frac{1}{2}-\frac{xi}{\log q}, 2, q^2, q^2\Big)$ in ein unendliches Product, so giebt (84.) die Gleichung

$$\varphi\Big(\tfrac{1}{2}+\frac{xi}{\log q}, \tfrac{1}{2}-\frac{xi}{\log q}, 2, q^2, q^2\Big) = \frac{\Omega(q^2, 1)\,\Omega(q^2, 0)}{\Omega\Big(q^2, \frac{1}{2}-\frac{xi}{\log q}\Big)\Omega\Big(q^2, \frac{1}{2}+\frac{xi}{\log q}\Big)}$$

$$= (1-q^2)\sqrt{\Big(\frac{\pi^3\sqrt{q}}{2kk'K^3}\Big)}\cdot\frac{\Theta\Big(\frac{2Kx}{\pi}\Big)}{(1-2q\cos 2x+q^2)},$$

oder endlich

$$88.\quad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)}{(1-q^2)}\sqrt{\left(\frac{2kk'K^2}{\pi^2\sqrt{q}}\right)}\left\{1+\frac{(1-2q\cos 2x+q^2)}{(1-q^2)(1-q^4)}\cdot q^2 + \frac{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^2\cos 2x+q^4)}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^4)(1-q^6)}\cdot q^4+\dots\right\}.$$

Wäre man, um eine Entwicklung von Θ zu finden, von $\varphi\left(\frac{xi}{\log q}, \frac{-xi}{\log q}, 1, q^2, q\right)$ ausgegangen, so hätte man erhalten:

$$89.\quad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\left\{1+\frac{(2-2\cos 2x)}{(1-q)(1-q^2)}\cdot q+\frac{(2-2\cos 2x)(1-2q^2\cos 2x+q^4)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}\cdot q^2 + \frac{(2-2\cos 2x)(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)}\cdot q^3+\dots\right\}.$$

Wir gehen jetzt zur Multiplication einer gröfsern Anzahl von Functionen Ω über. Aus der Definition (83.) ergiebt sich unmittelbar

$$90.\quad \Omega(q^n, a)\,\Omega\left(q^n, a-\frac{1}{n}\right)\Omega\left(q^n, a-\frac{2}{n}\right)\dots\Omega\left(q^n, a-\frac{n-1}{n}\right) = c\,\Omega(q, na),$$

$$c = \frac{\{(1-q^n)(1-q^{2n})(1-q^{3n})\text{ etc.}\}^n}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\text{ etc.}};$$

eine Formel, welche der von *Gaufs* aufgestellten Beziehung zwischen $n+1$ Functionen Π entspricht. Ein zweiter, ähnlicher Ausdruck ergiebt sich leicht aus dem Satz, dafs für jedes ganze positive n die Gleichung

$$(1-r)(1-re^{\frac{2\pi i}{n}})(1-re^{\frac{4\pi i}{n}})\dots(1-re^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}) = 1-r^n$$

besteht. Nach diesem Satze ist der Nenner von

$$\Omega(q^n, a) = \frac{(1-q^n)(1-q^{2n})(1-q^{3n})\text{ etc.}}{(1-q^{na+n})(1-q^{na+2n})(1-q^{na+3n})\text{ etc.}}$$

das Product $(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})(1-q^{a+3})$ etc. multiplicirt in

$$(1-q^{a+1}e^{\frac{2\pi i}{n}})(1-q^{a+2}e^{\frac{2\pi i}{n}})(1-q^{a+3}e^{\frac{2\pi i}{n}})\text{ etc.},$$

und noch multiplicirt mit

$$(1-q^{a+1}e^{\frac{4\pi i}{n}})(1-q^{a+2}e^{\frac{4\pi i}{n}})(1-q^{a+3}e^{\frac{4\pi i}{n}})\text{ etc.},$$

bis man endlich zu

$$(1-q^{a+1}e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}})(1-q^{a+2}e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}})(1-q^{a+3}e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}})\text{ etc.}$$

kommt. Berücksichtigt man, dafs sich $e^{\frac{2m\pi i}{n}}$ auch als Potenz von q darstellen

läfst, indem $e^{\frac{2m\pi i}{n}} = q^{\frac{2m\pi i}{n\log q}}$ ist, so wird

$$91.\quad \Omega(q,a)\,\Omega\Big(q, a+\frac{2\pi i}{n\log q}\Big)\,\Omega\Big(q, a+\frac{4\pi i}{n\log q}\Big)\dots\Omega\Big(q, a+\frac{2(n-1)\pi i}{n\log q}\Big) = c_1\,\Omega(q^n, a),$$

$$c_1 = \frac{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\text{ etc.}\}^n}{(1-q^n)(1-q^{2n})(1-q^{3n})\text{ etc.}}.$$

Wir bezeichnen durch $\prod\limits_{m=0}^{m=n-1} f(m)$, wie es üblich ist, das Product $f(0)f(1)f(2)\dots f(n-1)$, und können dann (90.) und (91.) zu folgendem Ausdruck vereinigen:

$$92.\quad \prod_{r=0}^{r=n-1}\prod_{m=0}^{m=n-1}\Omega\Big(q, a+\frac{2m\pi i}{n\log q}-\frac{r}{n}\Big) = \{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\text{ etc.}\}^{n^2-1}\,\Omega(q, na).$$

Mit (85. und 86.) verbunden, liefern (90. und 91.) die Formeln, auf denen die Multiplication der elliptischen Functionen beruht. Verwandelt man dazu q in (90.) in q^2, so erhält man

$$\prod_{m=0}^{m=n-1}\Omega\Big(q^{2n}, a-\frac{m}{n}\Big) = c'\,\Omega(q^2, na),$$

wenn c' der Werth ist, in welchen c durch die obige Verwandlung übergeht. Hieraus findet sich, wenn man $\frac{n-1}{n}-a$ statt a schreibt, mit Anwendung der Reductionsformel der Ω:

$$\Omega(q^2, r) = (1-q^{2r})\,\Omega(q^2, r-1),$$

$$\prod_{m=0}^{m=n-1}\Omega\Big(q^{2n}, \frac{m}{n}-a\Big) = c'\prod_{m=1}^{m=n-1}(1-q^{2(m-na)})\,\Omega(q^2, -na).$$

In der Folge bezeichnen wir die Gröfsen, welche eben so von q^n abhangen, wie K, $H\big(\frac{2Kx}{\pi}\big)$, $\Theta\big(\frac{2Kx}{\pi}\big)$, etc. von q, durch K_n, $H\big(q^n, \frac{2K_nx}{\pi}\big)$, $\Theta\big(q^n, \frac{2K_nx}{\pi}\big)$ etc., so dafs sich nach (86.)

$$\Big(\frac{\pi^3}{2^3K_n^3k_nk_n'}\Big)^{\frac{1}{2}n}\frac{\prod\limits_{m=0}^{m=n-1}H\Big[q^n, \frac{2K_n}{\pi}\cdot i(\log q^n)\Big(a-\frac{m}{n}\Big)\Big]}{\prod\limits_{m=0}^{m=n-1}\sin\Big(i\Big(a-\frac{m}{n}\Big)\log q^n\Big)}$$

$$= \frac{1}{c'c'\prod\limits_{m=1}^{m=n-1}(1-q^{2m-2na})}\sqrt{\Big(\frac{\pi^3}{2^3K^3kk'}\Big)}\,\frac{H\Big(\frac{2K}{\pi}\cdot nai\log q\Big)}{\sin(nai\log q)}.$$

ergiebt. Dividirt man den Factor $\sin nai\log q$ weg, so ist das Product im Nenner links von $m=1$ bis $m=n-1$ zu nehmen. Führt man ferner für a die neue Gröfse $b=nai\log q$ ein, so wird

$$\frac{\prod_{m=1}^{m=n}\sin(b-mi\log q)}{\prod_{m=1}^{m=n}(1-q^{2m}e^{2bi})}=\frac{e^{(b+\frac{1}{2}\pi)(n-1)i}}{2^{n-1}q^{\frac{1}{2}n(n-1)}},$$

also

$$93.\quad \prod_{m=0}^{m=n-1}H\left[q^n,\frac{2K_n}{\pi}(b-mi\log q)\right]=\frac{h\,e^{(b+\frac{1}{2}\pi)(n-1)i}}{q^{\frac{1}{4}(2n-1)n}}H\left(q,\frac{2Kb}{\pi}\right),$$

$$h=\frac{\{(1-q^{2n})(1-q^{4n})(1-q^{6n})\text{ etc.}\}^n}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\text{ etc.}}.$$

Eine ähnliche Gleichung wird für die Function Θ gefunden. Setzt man wieder q^2 statt q in (90.) und multiplicirt die so entstandene Relation mit der, welche man erhält, wenn man in ihr $-a-\frac{1}{n}$ statt a setzt, d. h. mit

$$\prod_{m=0}^{m=n-1}\Omega\left(q^{2n},-\left(a-\frac{m}{n}\right)-1\right)=c'\Omega(q^2,-na-1),$$

so erhält man, indem statt $i(a+\frac{1}{2})n\log q$ die Gröfse b eingeführt wird:

$$\left(\frac{\pi^3\sqrt{q^n}}{2k_nk_n'K_n^3}\right)^{\frac{1}{4}n}\prod_{m=0}^{m=n-1}\Theta\left[q^n,\frac{2K_n}{\pi}(b-mi\log q)\right]$$

$$=\frac{1}{c'c'}\sqrt{\left(\frac{\pi^3\sqrt{q}}{2kk'K^3}\right)}\,\Theta\left[q,\frac{2K}{\pi}(b-i\log q\cdot\tfrac{1}{2}(n-1)\right].$$

Der Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens nimmt eine verschiedene Form an, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Aus den vorhergehenden Gleichungen finden sich nämlich ohne Mühe, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist, folgende Beziehungen:

$$\Theta\left[\frac{2K}{\pi}(x-mi\log q)\right]=(-1)^mq^{-m^2}\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),$$

$$\Theta\left[\frac{2K}{\pi}(x-\tfrac{1}{2}(2m+1)i\log q)\right]=(-1)^mq^{-m^2}\Theta\left[\frac{2K}{\pi}(x-\tfrac{1}{2}i\log q)\right]$$

$$=\frac{i(-1)^m}{\sqrt[4]{q}}\cdot e^{ix}q^{-m^2}H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).$$

Es ist demnach für ein *ungerades n:*

$$94.\quad \prod_{m=0}^{m=n-1}\Theta\left[q^n,\frac{2K_n}{\pi}(b-mi\log q)\right]=\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{q^{\frac{1}{4}(n-1)^2}}\cdot h\,\Theta\left(q,\frac{2Kb}{\pi}\right),$$

und für ein *gerades* n:

$$\prod_{m=0}^{m=n-1} \Theta\left[q^n, \frac{2K_r}{\pi}(b - mi\log q)\right] = -\frac{i\cdot(-1)^{\frac{1}{2}n}\, e^{ix}}{\sqrt[4]{q}\cdot q^{(\frac{1}{2}n-1)^2}}\cdot h H\left(q, \frac{2Kb}{\pi}\right).$$

Aus (91.) findet man durch ähnliche Mittel die beiden Formeln

$$95.\quad \prod_{m=0}^{m=n-1} H\left[q, \frac{2K}{\pi}\left(b + \frac{m\pi}{n}\right)\right] = g H\left(q^n, \frac{2nK_n b}{\pi}\right),$$

$$96.\quad \prod_{m=0}^{m=n-1} \Theta\left[q, \frac{2K}{\pi}\left(b + \frac{m\pi}{n}\right)\right] = g\, \Theta\left(q^n, \frac{2nK_n b}{\pi}\right),$$

$$g = \frac{\{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots\}^n}{(1-q^{2n})(1-q^{4n})(1-q^{6n})\ldots}.$$

Die Formeln (93., 94., 95. und 96.) geben die Multiplication der elliptischen Functionen, wenn man sie so zusammenfafst, wie (90. und 91.) zu (92.) vereinigt wurden.

Aus den Functionen Ω bilden wir durch Differentiation eine neue Classe von Ausdrücken. Wir setzen nämlich

$$97.\quad \frac{\partial \log \Omega(q, a)}{\partial a} = \log q\, \Phi(q, a).$$

Alsdann wird

$$98.\quad \Phi(q, a) = \frac{q^{a+1}}{1-q^{a+1}} + \frac{q^{a+2}}{1-q^{a+2}} + \frac{q^{a+3}}{1-q^{a+3}} + \text{etc.},$$

oder auch, nach (79.),

$$99.\quad \Phi(q, a) = \frac{q^{a+1}}{1-q} + \frac{q^{2a+2}}{1-q^2} + \frac{q^{3a+3}}{1-q^3} + \ldots.$$

Aus (99.) findet man

$$\Phi(q, a) - \Phi(q^2, a) = \frac{q^{a+1}}{1-q} + \frac{q^{3a+3}}{1-q^3} + \frac{q^{5a+5}}{1-q^5} + \ldots,$$

also, wenn man a gleich $-\frac{1}{2} + \frac{xi}{\log q}$ setzt:

$$100.\quad \Phi\left(q, -\tfrac{1}{2} + \frac{xi}{\log q}\right) - \Phi\left(q^2, -\tfrac{1}{2} + \frac{xi}{\log q}\right) = \frac{kK}{2\pi}\cdot e^{i\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}.$$

Aus (90., 91. und 92.) gehen endlich noch folgende Ausdrücke hervor:

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} \Phi\left(q^n, a - \frac{m}{n}\right) = \Phi(q, na),$$

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} \Phi\left(q, a + \frac{2m\pi i}{n\log q}\right) = n\,\Phi(q^n, a),$$

$$\sum_{m=0}^{m=n-1}\sum_{r=0}^{r=n-1} \Phi\left(q, a + \frac{2m\pi i}{n\log q} - \frac{r}{n}\right) = n^2\,\Phi(q, na).$$

Die Formel (100.) auf die beiden letzten Gleichungen anzuwenden, wird man durch den in ihnen vorkommenden Nenner $\log q$ verhindert.

Die Functionen Φ lassen sich nach denselben Verfahren transformiren, durch welche *Gaufs* die Ψ umgestaltet hat. Während man aber dort auf einfachere Functionen, auf Logarithmen kommt, werden hier die Φ wiederum durch Φ mit andern Argumenten ausgedrückt, indem der *Gaufs*ischen Formel

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} \cos m\varphi\, \Psi\left(\frac{m-n}{n}\right) = -\Psi(0)+\tfrac{1}{2}n\log(2-2\cos\varphi) \quad (72.),$$

wo φ einen beliebigen unter den Winkeln $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots \frac{2(n-1)\pi}{n}$ bezeichnet, hier folgender Ausdruck entspricht:

$$\sum_{m=1}^{m=n-1} \Phi\left(q^n, \frac{m-n}{n}\right)e^{mi\varphi} = -\Phi(q^n, 0)+\Phi\left(q, \frac{i\varphi}{\log q}\right).$$

V. Abschnitt.

Die Untersuchungen dieses Abschnitts haben einen andern Character, als die der vier früheren. Während letztere sich an die Abhandlung von *Gaufs* „Über die hypergeometrische Reihe etc." anlehnten, werden wir hier der Arbeit von *Kummer* im 15ten Bande dieses Journals folgen.

Schon in der Einleitung wurde erwähnt, dafs in diesem Abschnitt q auch gröfser als 1 sein darf. Wir sind daher auch nicht mehr gezwungen, dem letzten Elemente Werthe zu geben, die kleiner als 1 sind, sondern werden ganz allgemein von der Function

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, xq^n)$$

sprechen, wo n eine *positive oder negative* ganze Zahl ist. Die gefundenen Resultate werden nur als richtig anzusehen sein, wenn die Beschaffenheit der Elemente die Function zu einer convergenten Reihe macht.

Wir gehen von den Gleichungen (2. und 41.) aus und setzen darin $q^n x$ statt x. Macht man zur Abkürzung

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, xq^n) = \varphi_n,$$

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n = \Delta\varphi_n, \qquad \Delta\varphi_{n+1}-\Delta\varphi_n = \Delta^2\varphi_n,$$

so ergiebt sich

$$\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, q^n x) = -\frac{(1-q^\gamma)}{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)q^n x}\cdot\Delta\varphi_n,$$

$$\varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, q, q^n x) = -\frac{(1-q^{\gamma+1})}{(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta+1})q^n x}\cdot\Delta\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q^n x).$$

Nun ist

$$\varDelta.\frac{\varDelta\varphi_n}{q^n} = \frac{\varDelta\varphi_{n+1}}{q^{n+1}} - \frac{\varDelta\varphi_n}{q^n} = \frac{\varDelta\varphi_{n+1} - q\varDelta\varphi_n}{q^{n+1}} = \frac{\varDelta^2\varphi_n + (1-q)\varDelta\varphi_n}{q^{n+1}},$$

folglich

$$\varphi(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, q, q^n x)$$
$$= \frac{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})q^{2n+1}x^2}.(\varDelta^2\varphi_n + (1-q)\varDelta\varphi_n).$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in (41.) findet man

$$q^{\gamma-1}(1-q^{\alpha+\beta+n+1-\gamma}x)\varDelta^2\varphi_n - \{1-q^{\gamma-1} - xq^n(q^\alpha+q^\beta-2q^{\alpha+\beta})\}\varDelta\varphi_n$$
$$- xq^n(1-q^\alpha)(1-q^\beta)\varphi_n = 0.$$

Für $q=1$ entsteht aus dieser Differenzengleichung die Differentialgleichung, welcher $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als particuläres Integral genügt. Man dividire, um dies zu zeigen, jedes Glied mit $(1-q)^2$ und setze darauf $q=1$, indem man nach bekannten Regeln die Werthe der so entstehenden Brüche von der Form $\frac{0}{0}$ untersucht. Wendet man das Zeichen d an, um die vollständige Differentiation nach q anzudeuten, so wird demnach $\frac{\varDelta\varphi_n}{1-q}$, für $q=1$, gleich der Grenze von $\frac{d\varphi_n}{dq} - \frac{d\varphi_{n+1}}{dq}$ für $q=1$, und $\frac{\varDelta^2\varphi_n}{(1-q)^2}$, für $q=1$, gleich der Grenze von $\frac{1}{2}.\frac{d^2\varphi_{n+2}}{dq^2} - \frac{d^2\varphi_{n+1}}{dq^2} + \frac{1}{2}.\frac{d^2\varphi_n}{dq^2}$. Es ist aber q auf doppelte Weise in der Function φ_n, φ_{n+1} oder φ_{n+2} enthalten: einmal mit x unmittelbar verbunden, dann aber auch noch auf eine Art, die unveränderlich bleibt für alle Werthe von n. Es zerfällt also die vollständige Differentiation von φ_n nach q, in eine Differentiation nach demselben, in sofern es in $q^n x$ vorkommt, und in eine Differentiation, insofern es noch aufserdem in φ_n enthalten ist. Deuten wir das Differentiiren nach q in letzterer Art durch $\frac{\partial\varphi_n}{\partial q}$ an, und die Differentiation nach $q^n x$, insofern es explicite vorhanden ist, durch $\frac{\partial\varphi_n}{\partial(xq^n)}$, so haben wir die Gleichung

$$\frac{d\varphi_n}{dq} = \frac{\partial\varphi_n}{\partial q} + nxq^{n-1}\varphi'(xq^n),$$

wenn wir $\varphi'(z)$ zur Abkürzung statt $\frac{\partial\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, z)}{\partial z}$ schreiben. Eine nochmalige Differentiation giebt

$$\frac{d^2\varphi_n}{dq^2} = \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial q^2} + 2nxq^{n-1}.\frac{\partial\varphi'(xq^n)}{\partial q} + n^2x^2q^{2n-2}\varphi''(xq^n) + n(n-1)xq^{n-2}\varphi'(xq^n).$$

Erwägt man, dafs $\varphi'(xq^n)$, $\varphi'(xq^{n+1})$, $\varphi'(xq^{n+2})$, und eben so $\varphi''(xq^n)$, $\varphi''(xq^{n+1})$, $\varphi''(xq^{n+2})$, so wie ferner auch ihre Differentialquotienten (∂) nach q für $q=1$ einander gleich werden, so findet sich als Werth von $\frac{\Delta\varphi_n}{(1-q)}$, für $q=1$:

$$-x\cdot\frac{\partial F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{\partial x},$$

während $\frac{\Delta^2\varphi}{(1-q)^2}$ in

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{\partial x^2}+x\cdot\frac{\partial F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{\partial x}$$

übergeht. Es verwandelt sich hierauf die obige Differenzengleichung für den Fall $q=1$ in die bekannte Differenzialgleichung:

$$x(1-x)\cdot\frac{\partial^2 F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{\partial x^2}+\{\gamma-x(\alpha+\beta+1)\}\frac{\partial F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{\partial x}-\alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma,x)=0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$g_n = -\frac{1-q^{\gamma-1}-xq^n(q^\alpha+q^\beta-2q^{\alpha+\beta})}{q^{\gamma-1}(1-xq^{\alpha+\beta+n+1-\gamma})} \text{ und}$$

$$h_n = -\frac{xq^n(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{q^{\gamma-1}(1-xq^{\alpha+\beta+n+1-\gamma})},$$

so leuchtet aus dem Vorhergehenden ein, dafs $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,xq^n)$ ein Integral folgender Differenzengleichung ist:

$$\text{I.}\quad \Delta^2 y_n+g_n\Delta y_n+h_n y_n = 0.$$

Es sollen jetzt die Bedingungen untersucht werden, unter welchen Gröfsen w_n und v_n von der Art existiren, dafs ihr Product $w_n v_n$ der Gleichung (I.) für jedes x genügt, während zu gleicher Zeit v_n die Differenzengleichung

$$\text{II.}\quad \Delta^2 v_n+G_n\Delta v_n+H_n v_n=0 \text{ integrirt, wo}$$

$$G_n = -\frac{1-\varrho^{c-1}-\xi\varrho^n(\varrho^a+\varrho^b-2\varrho^{a+b})}{\varrho^{c-1}(1-\xi\varrho^{a+b+n+1-c})} \text{ und}$$

$$H_n = -\frac{\xi\varrho^n(1-\varrho^a)(1-\varrho^b)}{\varrho^{c-1}(1-\xi\varrho^{a+b+n+1-c})}$$

ist und a, b, c, ϱ, ξ von n unabhängige Gröfsen bezeichnen. Da $w_n v_n$ der Gleichung (I.) genügen soll, so mufs dieses Product, statt y_n in (I.) substituirt, die Seite links auf 0 bringen. Nun ist

$$\Delta(w_n v_n) = w_{n+1}v_{n+1}-w_n v_n = w_{n+1}\Delta v_n+v_n\Delta w_n$$
$$= w_n\Delta v_n+v_n\Delta w_n+\Delta v_n\Delta w_n;$$

ferner ist

$$\Delta^2(w_n v_n) = w_n\Delta^2 v_n + 2\Delta w_n\Delta v_n + 2\Delta w_n\Delta^2 v_n + 2\Delta v_n\Delta^2 w_n + v_n\Delta^2 w_n + \Delta^2 v_n\Delta^2 w_n.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (I.) giebt:

$$\Delta^2 v_n[w_n + 2\Delta w_n + \Delta^2 w_n] + \Delta v_n[2\Delta w_n + 2\Delta^2 w_n + g_n w_n + g_n\Delta w_n] + v_n[\Delta^2 w_n + g_n\Delta w_n + h_n w_n] = 0$$

oder

$$w_{n+2}\Delta^2 v_n + (2\Delta w_{n+1} + g_n w_{n+1})\Delta v_n + (\Delta^2 w_n + g_n\Delta w_n + h_n w_n)v_n = 0.$$

Um diese Gleichung mit (II.) in Übereinstimmung zu bringen, setzen wir

$$w_{n+2}G_n = g_n w_{n+1} + 2w_{n+2} - 2w_{n+1},$$

oder

$$\text{III.}\qquad w_{n+2}(G_n - 2) = w_{n+1}(g_n - 2)$$

und

$$H_n w_{n+2} = \Delta^2 w_n + g_n\Delta w_n + h_n w_n = w_{n+2} + (g_n - 2)w_{n+1} + (h_n - g_n + 1)w_n.$$

Vermittels (III.) erhält man hieraus

$$\text{IV.}\qquad (g_{n-1} - 2)(g_n - 2)(H_n - G_n + 1) = (G_{n-1} - 2)(G_n - 2)(h_n - g_n + 1).$$

Während die Gleichung (III.) die Function w_n bestimmt, giebt (IV.) den Zusammenhang zwischen $a, b, c, \rho, \xi, \alpha, \beta, \gamma, q, x$, so dafs man zwei Bedingungen hat, die nothwendig sind, wenn $y_n = w_n v_n$ ein Integral von (I.) sein soll; die aber auch, wie man leicht sieht, ausreichen, indem sich aus ihnen rückwärts (I.) aufstellen läfst. Sind also $\alpha, \beta, \gamma, q, x$ gegeben, so hat man aus (IV.) alle Systeme der zusammengehörigen a, b, c, ρ, ξ zu suchen und für jedes System w_n aus (III.) zu bestimmen; dann ist $w_n\varphi(a, b, c, \rho, \rho^n\xi)$ ein Integral von (I.).

Substituirt man in (III.) und (IV.) für g_n, h_n, G_n, H_n ihre Werthe, so gehen sie in folgende Form über:

$$\text{V.}\qquad \frac{1+\rho^{c-1}-\xi\rho^n(\rho^a+\rho^b)}{\rho^{c-1}(1-\xi\rho^{a+b+n+1-c})}\cdot w_{n+2} = \frac{1+q^{\gamma-1}-xq^n(q^\alpha+q^\beta)}{q^{\gamma-1}(1-xq^{\alpha+\beta+n+1-\gamma})}\cdot w_{n+1},$$

$$\text{VI.}\quad \rho^{c-1}(1-\xi\rho^n)(1-\xi\rho^{a+b+n-c})\{1+q^{\gamma-1}-xq^{n-1}(q^\alpha+q^\beta)\}\{1+q^{\gamma-1}-xq^n(q^\alpha+q^\beta)\}$$
$$= q^{\gamma-1}(1-xq^n)(1-xq^{\alpha+\beta+n-\gamma})\{1+\rho^{c-1}-\xi\rho^{n-1}(\rho^a+\rho^b)\}\{1+\rho^{c-1}-\xi\rho^n(\rho^a+\rho^b)\};$$

so dafs ξ von x durch eine *quadratische Gleichung* abhängt. Man könnte glauben, dafs wenn auch $\alpha, \beta, \gamma, q, x$ gegeben sind, doch a, b, c, ρ beliebig angenommen werden könnten, wenn nur ξ diesen Annahmen entsprechend aus (VI.) bestimmt wird; es ist aber nicht zu übersehn, dafs *ξ von n unabhängig* sein mufs. Es genügt zwar $w_n v_n$ noch immer der Gleichung (I.), wenn ξ den Buchstaben n enthält, sofern nur v_n ein Integral von (II.) ist: dafs

aber dieses grade $\varphi(a, b, c, \varrho, \varrho^n \xi)$ und eine Function von ganz bestimmter Form sei, wissen wir nur für den Fall (und *im Allgemeinen* wird es auch nur in diesem Falle so sein), dafs a, b, c, ϱ, ξ kein n enthalten. Hat man also ein System von Werthen dieser fünf Gröfsen für ein bestimmtes n (z. B. $n = 0$), so mufs dasselbe System der Gleichung (VI.) für jedes n genügen. Diese Veränderliche kommt in (VI.) nur in zwei Verbindungen vor; in den Producten $q^n x$ und $\varrho^n \xi$; auch x und ξ erscheinen in keiner andern Zusammenstellung. Die Auflösung von (VI.) giebt:

$$\text{VII.} \quad \varrho^n \xi = \frac{\psi(q^n x) + \sqrt{(\chi(q^n x))}}{\eta(q^n x)},$$

wenn $\psi(z)$, $\eta(z)$, $\chi(z)$ gewisse ganze Functionen von z, die beiden ersten vom zweiten, die letzte vom vierten Grade bezeichnen, welche die Form $k_0 + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3 + k_4 z^4$ haben. Die k sind von n unabhängig, indem a, b, c, q, ϱ kein n enthalten. Man findet hieraus

$$\text{VIII.} \quad \frac{\psi(q^n x) + \sqrt{(\chi(q^n x))}}{\eta(q^n x)} = \varrho^n \cdot \frac{\psi(x) + \sqrt{(\chi(x))}}{\eta(x)}.$$

Läfst sich die Wurzel aus $\chi(x)$ wirklich ausziehen, so ist $\sqrt{(\chi(x))}$ ein Polynom zweiten Grades, vereinigt sich also mit $\psi(x)$, oder wäre in (VII.) davon nicht zu unterscheiden nöthig gewesen, d. h. man hätte $\chi(x) = 0$ setzen können. Es findet sich demnach aus (VIII.)

$$\text{IX.} \quad \frac{\psi(q^n x)}{\eta(q^n x)} = \varrho^n \cdot \frac{\psi(x)}{\eta(x)},$$

$$\text{X.} \quad \frac{\sqrt{(\chi(q^n x))}}{\eta(q^n x)} = \varrho^n \cdot \frac{\sqrt{(\chi(x))}}{\eta(x)};$$

wo jetzt $\sqrt{(\chi(x)}$ irrational in Bezug auf x, oder gleich Null ist. Diese Bedingungen, welchen φ, η, χ unterworfen sind, die *für alle Werthe von x und n* gelten sollen, specialisiren jene Functionen in der Art, dafs man für ξ nur eine sehr beschränkte Zahl von *Formen* findet, die, ohne Mühe in (VI.) substituirt, die *genauen Werthe* von a, b, c, ϱ, ξ durch $\alpha, \beta, \gamma, q, x$ ausgedrückt geben, welche von allen möglichen, die (VI.) erfüllen, als von n unabhängig, allein übrig bleiben.

Bezeichnen $k_0, k_1, k_2, g_0, g_1, g_2$, von x und n unabhängige Constanten, so setze man

$$\psi(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2,$$
$$\eta(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2.$$

Alsdann ist die Bedingung, welche in (IX.) liegt, durch die Gleichung

$$\frac{k_0'+k_1 q^n x+k_2 q^{2n} x^2}{g_0+g_1 q^n x+g_2 q^{2n} x^2} = \varrho^n . \frac{k_0+k_1 x+k_2 x^2}{g_0+g_1 x+g_2 x^2}$$

ausgedrückt, der wir, wie leicht zu sehen, noch die Beschränkung hinzufügen können, dafs $\frac{\psi(x)}{\eta(x)}$ keine Constante oder Null sein solle. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: entweder sind ϱ und q zu gleicher Zeit gröfser oder kleiner als 1, oder es ist der eine dieser Werthe gröfser als 1, der andere kleiner. *Im ersten Falle* (und wir wollen des bequemen Ausdrucks wegen annehmen, es sei $q<1$), setze man $n=\infty$, und man findet $k_0=0$, wenn nicht zugleich g_0, g_1, g_2 verschwinden. *Schliefsen wir fürs Erste $g_0=0$ aus*, so wird $k_0=0$, folglich

$$\frac{k_1+k_2 q^n x}{g_0+g_1 q^n x+g_2 q^{2n} x^2} = \varrho^n q^{-n} . \frac{k_1+k_2 x}{g_0+g_1 x+g_2 x^2}.$$

Da für $n=\infty$ die Seite links sich in $\frac{k_1}{g_0}$ verwandelt, so darf auch die rechts nicht unendlich werden; es ist also entweder $\varrho=q$ und dann $k_2=g_1=g_2=0$, oder $\varrho>q$ und dann $k_1=k_2=0$, oder $\varrho<q$ und dann zunächst $k_1=0$, $g_1=g_2=0$, hieraus aber $k_2 q^n=\varrho^n q^{-n} k_2$ oder $q^2=\varrho$. *Sind aber zugleich k_0 und g_0 gleich* 0, so findet sich die Bedingung

$$\frac{k_1+k_2 q^n x}{g_1+g_2 q^n x} = \varrho^n . \frac{k_1+k_2 x}{g_1+g_2 q^n x},$$

d. h. $k_1=0$ (man sieht leicht, dafs g_1 nicht zugleich verschwinden kann), und hieraus $\frac{k_2}{g_1+g_2 q^n x} = \frac{k_2 \varrho^n . q^{-n}}{g_1+g_2 x}$. Ist $\varrho=q$, so mufs $g_2=0$ sein; ist $\varrho>q$ oder $\varrho<q$, so wird $k_2=0$; so dafs nun folgende Combinationen übrig bleiben:

$$1)\quad \left.\begin{aligned} \psi(x) &= k_1 x \\ \eta(x) &= g_0 \end{aligned}\right\} \text{ für } \varrho=q,$$

$$2)\quad \left.\begin{aligned} \psi(x) &= k_2 x^2 \\ \eta(x) &= g_0 \end{aligned}\right\} \text{ für } \varrho=q^2,$$

$$3)\quad \left.\begin{aligned} \psi(x) &= k_2 x^2 \\ \eta(x) &= g_1 x \end{aligned}\right\} \text{ für } \varrho=q.$$

Im *zweiten Fall* $q<1$, $\varrho>1$ ist die Untersuchung ganz ähnlich der vorigen. Ist k_0 von 0 verschieden, so mufs g_0 gleich Null sein, indem ϱ^n für

$n=\infty$, selbst unendlich ist. Es wird demnach

$$\frac{k_0+k_1q^nx+k_2q^{2n}x^2}{g_1+g_2q^nx} = (\varrho q)^n.\frac{k_0+k_1x+k_2x^2}{g_1+g_2x},$$

also entweder $\varrho=\frac{1}{q}$ und dann $g_2=0$, $k_1=k_2=0$, oder $\varrho q>1$ und dann $g_1=0$ und hieraus $k_0+k_1q^nx+k_2q^{2n}x^2=(\varrho q^2)^n(k_0+k_1x+k_2x^2)$, d. h. $\varrho=\frac{1}{q^2}$, $k_1=k_2=0$; oder endlich kann auch ϱq kleiner als 1 sein, woraus folgen würde, dafs $g_1=g_2=0$ ist, oder dafs alle k verschwinden. Ist $k_0=0$, so wird

$$\frac{k_1+k_2q^nx}{g_1+g_2q^nx} = \varrho^n.\frac{k_1+k_2x}{g_1+g_2x},$$

folglich $g_1=0$ und hieraus $\varrho=\frac{1}{q}$, $k_2=0$. Im Ganzen giebt der zweite Fall folgende Combinationen:

$$4)\quad \left.\begin{aligned}\psi(x)&=k_0\\ \eta(x)&=g_1x\end{aligned}\right\}\text{ für }\varrho=\frac{1}{q},$$

$$5)\quad \left.\begin{aligned}\psi(x)&=k_0\\ \eta(x)&=g_2x^2\end{aligned}\right\}\text{ für }\varrho=\frac{1}{q^2},$$

$$6)\quad \left.\begin{aligned}\psi(x)&=k_1x\\ \eta(x)&=g_2x^2\end{aligned}\right\}\text{ für }\varrho=\frac{1}{q}.$$

Hätte man die Untersuchung für ein q, welches >1 ist, angestellt, so würden sich dieselben Resultate ergeben haben; es wäre nur nöthig gewesen, bei der Beweisführung $n=-\infty$ zu setzen, wo es im Vorhergehenden gleich ∞ gemacht wurde. Was $\chi(x)$ betrifft, so wird aus der Verbindung von (IX.) mit (X.)

$$\frac{\sqrt{(\chi(q^nx))}}{\psi(q^nx)} = \frac{\sqrt{(\chi(x))}}{\psi(x)}$$

gefunden. Da $\psi(x)$ nur einen der ***drei Werthe*** k_0, k_1x, k_2x^2 annehmen kann, so findet man (da die Wurzel aus $\chi(x)$ irrational nach x sein mufs, wenn sie überhaupt vorhanden sein soll) leicht, dafs $\chi(x)$ gleich Null ist; so dafs ***alle Werthe von ξ in folgenden Formen enthalten sind:***

$$\text{(XI.)}\qquad \xi=hx\qquad \xi=h^2x^2,\qquad \xi=\frac{1}{hx},\qquad \xi=\frac{1}{h^2x^2},$$

und ϱ hangt von q respective durch die Gleichungen

$$\varrho=q,\quad \varrho=q^2,\quad \varrho=\frac{1}{q},\quad \varrho=\frac{1}{q^2}\ \text{ab.}$$

Um h zu finden, oder die Beschränkungen kennen zu lernen, welche der Wahl der Gröfsen a, b, c dadurch aufgelegt werden, dafs ξ jene speciellen Formen (XI.) haben mufs, substituiren wir für ξ diese Ausdrücke in (VI.), nachdem wir vorher $n=0$ gemacht haben. Durch die so eben vollendete Untersuchung wissen wir, dafs die Resultate, die man dadurch erhält, insofern sie die Abhängigkeit der Gröfsen a, b, c, ξ von $\alpha, \beta, \gamma, q, x$ betreffen, für jedes n Gültigkeit haben. Es werden sich nun a, b, c als Functionen von α, β, γ, q ergeben; wir wollen aber hier nicht alle Relationen suchen, die a, b, c mit α, β, γ, q verbinden, sondern nur das Abhängigkeitsgesetz, unter der Voraussetzung, dafs α, β, γ allgemein bleiben, d. h., wir suchen die Art der Functionen χ, χ_1, χ_2, welche a, b, c respective gleich $\chi(\alpha,\beta,\gamma,q)$, $\chi_1(\alpha,\beta,\gamma,q)$, $\chi_2(\alpha,\beta,\gamma,q)$ für alle Werthe von α, β, γ machen. Wir wollen die Anzahl Fälle für diese Abhandlung noch verringern, indem wir festsetzen, es sollen die Functionen $\chi(\alpha,\beta,\gamma,q)$, $\chi_1(\alpha,\beta,\gamma,q)$, $\chi_2(\alpha,\beta,\gamma,q)$ von q unabhängig sein. Haben α, β, γ, q besondere Werthe, oder sind sie durch nicht identische Gleichungen verbunden, so werden wir das Resultat der allgemeinen Untersuchung gleichfalls anwenden können; wir sind aber dann nicht sicher, dafs dann nicht noch eine gröfsere Anzahl von a, b, c für den vorliegenden speciellen Fall vorhanden sei.

Dies vorausgesetzt, bringen wir (VI.), nachdem wir darin $n=0$ angenommen haben, auf die Form

$$\text{XII.}\quad A(1-\xi)(1-\xi\varrho^{a+b-c})(1-xB)(1-xqB) = (1-x)(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-\xi C)(1-\xi\varrho C),$$

wo zur Abkürzung gesetzt wird:

$$A=\frac{\varrho^{c-1}(1+q^{\gamma-1})^2}{q^{\gamma-1}(1+\varrho^{c-1})^2},\qquad B=\frac{q^{\alpha-1}+q^{\beta-1}}{1+q^{\gamma-1}},\qquad C=\frac{\varrho^{a-1}+\varrho^{b-1}}{1+\varrho^{c-1}}.$$

Macht man zunächst $\xi=h^2x^2$, also auch $\varrho=q^2$, so verwandelt sich (XII.) in folgende Gleichung:

$$\text{XIII.}\quad A(1-hx)(1+hx)(1-hxq^{a+b-c})(1+hxq^{a+b-c})(1-xB)(1-xqB) = (1-x)(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-hx\sqrt{C})(1+hx\sqrt{C})(1-hxq\sqrt{C})(1+hxq\sqrt{C}).$$

Damit diese Gleichung für jedes x bestehen könne, mufs zunächst $A=1$ sein; aufserdem ist es nöthig, dafs jeder Factor der einen Seite auf der andern Seite gleichfalls vorkomme. Es läfst sich leicht zeigen, dafs keiner von den beiden Factoren $(1-xB)$, $(1-xqB)$ mit $(1-x)$ oder $(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})$ übereinstimmen kann. Denn wäre $(1-xq^{\varepsilon}B)=(1-xq^{\eta})$, wo ε entweder 0

oder 1, η entweder $\alpha+\beta-\gamma$ oder 0 bezeichnet, so wäre $B=q^{\eta-\epsilon}$, d. h. $\frac{q^{\alpha-1}+q^{\beta-1}}{1+q^{\gamma-1}}$ gleich einer Potenz von q; es bestände (also gegen die Annahme) eine nicht identische Gleichung zwischen α, β und γ. Es sind demnach die Factoren $(1-xB)$, $(1-xqB)$ unter den letzten vier Factoren rechts (XIII.) zu suchen, d. h. es ist entweder $B=h\sqrt{C}$, oder $B=-h\sqrt{C}$, so dafs, wenn die Zeichen $\pm$ diesen beiden Fällen so entsprechen, dafs für $B=h\sqrt{C}$ das obere, für $B=-h\sqrt{C}$ das untere zu nehmen ist, aus (XIII.)

$$(1-hx)(1+hx)(1-hxq^{a+b-c})(1+hxq^{a+b-c})$$
$$=(1-x)(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1\mp hx\sqrt{C})(1\pm hxq\sqrt{C})$$

folgt. Da rechts der Factor $1-x$ vorkommt, so mufs er auch links stehen. Hier hat aber jedes Glied von der Form $1+sx$ ein entsprechendes Glied $1-sx$, so dafs die Seite rechts den Factor $1+x$ enthält. Berücksichtigt man, dafs $B=\pm h\sqrt{C}$ ist, so erhält man

$$\text{entweder}\quad q^{\alpha+\beta-\gamma}=-1,\quad\text{oder}\quad B=-1;$$

welches beides Gleichungen zwischen α, β, γ sind.

Hieraus ist klar, dafs die Gleichung (XIII.) und mit ihr die Annahme $\xi=h^2x^2$ nicht bestehen kann. Eben so wird die Form $\xi=\frac{1}{h^2x^2}$ auszuschliefsen sein; so dafs nur noch die Werthe $\xi=hx$ und $\xi=\frac{1}{hx}$ zu untersuchen sind. Setzen wir in (XII.)

$$\xi=hx\quad\text{und}\quad q=\varrho,$$

so ergiebt sich

$$\text{XIV.}\quad A=q^{c-\gamma}\left(\frac{1+q^{\gamma-1}}{1+q^{c-1}}\right)^2=1,$$

und ferner

$$(1-hx)(1-hxq^{a+b-c})(1-xB)(1-xqB)$$
$$=(1-x)(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-hxC)(1-hqxC);$$

eine Gleichung, die (wie leicht zu sehen), damit α, β, γ allgemein bleiben können, aus folgenden beiden besteht:

$$\text{XV.}\quad (1-hx)(1-hxq^{a+b-c})=(1-x)(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})\ \text{und}$$
$$\text{XVI.}\quad (1-xB)(1-xqB)=(1-hxC)(1-hqxC).$$

Aus (XVI.) folgt

$$B=hC$$

und aus (XV.)

$$\text{entweder}\quad h=1,\qquad a+b-c=\alpha+\beta-\gamma,$$
$$\text{oder}\quad h=q^{\alpha+\beta-\gamma},\qquad a+b-c=-(\alpha+\beta-\gamma);$$

endlich aus (XIV.) entweder $c=\gamma$, oder $c=2-\gamma$; während man sämmtliche imaginären Werthe von a, b, c, die kein neues Resultat geben, unberücksichtigt läfst. Combinirt man alle diese Fälle, so ergeben sich folgende Systeme von Werthen für a, b, c, ϱ, $\varrho^n\xi$:

$$\begin{array}{lllll} \alpha, & \beta, & \gamma, & q, & xq^n, \\ \gamma-\alpha, & \gamma-\beta, & \gamma, & q, & xq^{\alpha+\beta-\gamma+n}, \\ \alpha+1-\gamma, & \beta+1-\gamma, & 2-\gamma, & q, & xq^n, \\ 1-\alpha, & 1-\beta, & 2-\gamma, & q, & xq^{\alpha+\beta-\gamma+n}. \end{array}$$

Für $\xi=\frac{1}{hx}$ und $\varrho=\frac{1}{q}$ findet man gleichfalls vier Systeme, nämlich:

$$\begin{array}{lllll} \alpha, & \alpha+1-\gamma, & \alpha+1-\beta, & \frac{1}{q}, & \frac{1}{xq^n}, \\ 1-\beta, & \gamma-\beta, & \alpha+1-\beta, & \frac{1}{q}, & \frac{1}{xq^{\alpha+\beta-\gamma+n}}, \\ \beta, & \beta+1-\gamma, & \beta+1-\alpha, & \frac{1}{q}, & \frac{1}{xq^n}, \\ 1-\alpha, & \gamma-\alpha, & \beta+1-\alpha, & \frac{1}{q}, & \frac{1}{xq^{\alpha+\beta-\gamma+n}}. \end{array}$$

Zu jedem dieser Werthe von v_n suchen wir das entsprechende w_n aus (V.). Ist z. B. $a=\gamma-\alpha$, $b=\gamma-\beta$, $c=\gamma$, $\varrho=q$, $\xi=xq^{\alpha+\beta-\gamma}$, so wird

$$w_n = w_{n-1}\cdot\frac{(1-xq^{n-1})}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n-1})}.$$

Bezeichnet also k_1 irgend einen von n unabhängigen Werth, so erhält man

$$\text{XVII.}\quad w_n = k_1\cdot\frac{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\dots\dots(1-xq^{n-1})}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-q^{\alpha+\beta-\gamma+1})\dots\dots(1-q^{\alpha+\beta-\gamma+n-1})},$$

einen Ausdruck, der sich nach (75.) auch in folgenden transformiren läfst:

$$w_n = k_1\cdot\frac{\varphi(\gamma-\alpha-\beta,1,1,q,xq^{\alpha+\beta-\gamma})}{\varphi(\gamma-\alpha-\beta,1,1,q,xq^{\alpha+\beta+n-\gamma})}.$$

Es ist leicht zu sehen, dafs sich w_n auch nach Potenzen von xq^n entwickeln läfst. Auf ähnliche Art wird für jedes v_n das entsprechende w_n bestimmt; bildet man dann die Producte w_nv_n, so finden sich folgende acht Integrale von (I.), die, sowohl selbst, als auch mit einer willkürlichen Constante (in Bezug auf n) multiplicirt, folgende Gleichungen befriedigen:

$$1.\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,xq^n),$$

$$2.\quad \frac{(1-x)(1-xq)(1-xq^2)\dots\dots(1-xq^{n-1})}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+1})\dots\dots(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n-1})}\cdot\varphi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,q,q^{\alpha+\beta-\gamma+n}x),$$

$$3.\quad q^{n(1-\gamma)}\varphi(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,q,xq^n),$$

4. $\frac{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})q^{n(1-\gamma)}}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+1})\dots(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n-1})}\cdot\varphi(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, q^{\alpha+\beta+n-\gamma}x)$,

5. $q^{-n\alpha}\varphi\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{q}, \frac{1}{xq^n}\right)$,

6. $\frac{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})q^{n(\beta-\gamma)}}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+1})\dots(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n-1})}\cdot$

$$\varphi\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, \frac{1}{q}, \frac{1}{xq^{\alpha+\beta-\gamma+n}}\right),$$

7. $q^{-n\beta}\varphi\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{q}, \frac{1}{xq^n}\right)$,

8. $\frac{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})q^{n(\alpha-\gamma)}}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma})(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+1})\dots(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n-1})}\cdot$

$$\varphi\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, \frac{1}{q}, \frac{1}{xq^{\alpha+\beta-\gamma+n}}\right).$$

Man sieht leicht, dafs je zwei von diesen Integralen dieselben sind, d. h. nur durch einen constanten Factor sich unterscheiden. Es läfst sich nämlich zeigen, dafs zwei Integrale einer Differenzengleichung wie (I.), die sich auf die Form

$$a_0+a_1xq^n+a_2x^2q^{2n}+\dots$$

bringen lassen, wo a_0, a_1, etc. kein n enthalten, einander gleich sein müssen. Solche Lösungen sind z. B. (1. und 2.). Nimmt man hier $q<1$ an und setzt in

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,xq^n)=\frac{k_1\varphi(\gamma-\alpha-\beta,1,1,q,xq^{\alpha+\beta-\gamma})}{\varphi(\gamma-\alpha-\beta,1,1,q,xq^{\alpha+\beta+n-\gamma})}\cdot\varphi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,q,q^{\alpha+\beta-\gamma+n}x)$$

n gleich ∞, so wird

$$k_1=\frac{1}{\varphi(\gamma-\alpha-\beta,1,1,q,xq^{\alpha+\beta-\gamma})},$$

also

XVIII. $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)=\varphi(\alpha+\beta-\gamma,1,1,q,x)\,\varphi(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,q,q^{\alpha+\beta-\gamma}x)$.

Diese Formel giebt für $q=1$ die bekannte von **Euler** *gefundene Relation* zwischen den beiden hypergeometrischen Reihen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ und $F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x)$:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x).$$

Setzt man auch für α, β, γ specielle Werthe, so lehrt sie z. B., dafs die Reihe $\varphi(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, q^2, x)$, wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet, sich als Resultat der Mutiplication eines einfachen unendlichen Products, nämlich von $\varphi(-\frac{1}{2},1,1,q^2,x)$ mit der *endlichen* Reihe $\varphi(-\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}, q^2, q^{-1}x)$, darstellen läfst: ein Resultat, welches, mit dem Fall $q=1$ verglichen, nicht

uninteressant ist. Setzt man nämlich $q=1$, $x=\sin^2 t$, so verwandeln sich die Reihen respective in $\cos nt$, $\cos t$, $\frac{\cos nt}{\cos t}$, und man findet, dafs, während $\cos nt$, nach Potenzen von $\sin^2 t$ entwickelt, ins Unendliche fortläuft, $\frac{\cos nt}{\cos t}$ abbricht.

Wir wollen noch eine zweite Anwendung des allgemeinen Satzes auf speciellere Reihen machen, indem wir $\varphi(\alpha,1,1,q,rz)\,\varphi\left(\alpha,1,1,q,\frac{r}{z}\right)$ nach Cosinus der Vielfachen von x entwickeln, wo z gleich e^{ix} gesetzt ist, während r einen beliebigen ächten Bruch bezeichnet. Nennt man zur Abkürzung jenes Product $\vartheta(\alpha,r)$, so wissen wir einerseits, dafs sich $\vartheta(\alpha,r)$ auf die Form

$$\vartheta(\alpha,r)=\prod_{m=0}^{m=\infty}\frac{(1-2q^{\alpha+m}r^m\cos 2x+q^{2\alpha+2m}r^{2m})}{(1-2q^m r\cos 2x+q^{2m}r^2)}$$

bringen läfst; andrerseits kann man

$$\vartheta(\alpha,r)=c_0^{(\alpha)}(r)+2c_1^{(\alpha)}(r)\cos x+\dots+2c_m^{(\alpha)}(r)\cos mx+\dots$$

setzen, wo

$$c_m^{(\alpha)}(r)=\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}\cdot\varphi(\alpha,\alpha+m,m+1,q,r^2).$$

Nun ist nach (XVIII.)

$$c_m^{(\alpha)}(r)=\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)}\cdot$$
$$\varphi(2\alpha-1,1,1,q,r^2)\,\varphi(1-\alpha,1-\alpha+m,m+1,q,q^{2\alpha-1}r^2),$$

also

$$c_m^{(\alpha)}(r)=\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{2-\alpha})\dots(1-q^{m-\alpha})}\cdot\varphi(2\alpha-1,1,1,q,r)\,c_m^{(1-\alpha)}(rq^{\alpha-\frac{1}{2}}).$$

Hieraus erhellet der Zusammenhang zwischen $\vartheta(\alpha,r)$ und $\vartheta(1-\alpha,rq^{\alpha-\frac{1}{2}})$. Für $q=1$ ergiebt sich unmittelbar die bekannte, auf verschiedenen Wegen abgeleitete Formel, die für jedes ganze m gilt:

$$\int_0^\pi\frac{\cos mx\,dx}{(a^2+2ab\cos x+b^2)^{n+1}}$$
$$=(-1)^m\frac{\Pi(n+m)\,\Pi(n-m)}{\Pi n.\Pi n}\cdot\frac{1}{(a^2-b^2)^{2n+1}}\int_0^\pi(a^2+2ab\cos x+b^2)^n\cos mx\,dx.$$

Durch Anwendung von (XVIII.) ergiebt sich, dafs die Integrale (3. und 4.), ebenso (5. und 6.), endlich auch (7. und 8.), nicht verschieden sind, so dafs sich die acht Lösungen paarweise in vier Gruppen vertheilen. Die letzten vier Integrale kann man übrigens nach einer Formel in der Einlei-

tung so transformiren, dafs das vierte Element q ist, statt $\frac{1}{q}$. Es sei endlich noch bemerkt, dafs (XVIII.) die Gleichungen (62. und 63.) unter sich enthält.

Im Vorhergehenden haben wir gezeigt, dafs man immer im Stande ist, zwei verschiedene Lösungen zu finden, welche die Gleichung (I.) vollständig integriren. Wir wollen schliefslich Beziehungen unter den Integralen von (I.) aufsuchen. Sind y_n und z_n Auflösungen einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung, wie

$$\Delta^2 y_n + g_n \Delta y_n + h_n y_n = 0,$$

wo g_n und h_n ganz allgemeine Gröfsen bezeichnen, die y_n nicht explicite enthalten, so giebt die vorstehende Relation, mit $\Delta^2 z_n + g_n \Delta z_n + h_n z_n = 0$ verbunden, folgenden Ausdruck:

$$\text{XIX.}\quad (z_n \Delta^2 y_n - y_n \Delta^2 z_n) + g_n (z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n) = 0.$$

Setzt man $V_n = z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n$, so findet sich

$$\Delta V_n = z_n \Delta^2 y_n - y_n \Delta^2 z_n + \Delta z_n \Delta^2 y_n - \Delta y_n \Delta^2 z_n,$$

$$\text{XX.}\quad z \Delta^2 y_n - y_n \Delta^2 z_n = \Delta V_n - (\Delta z_n \Delta^2 y_n - \Delta y_n \Delta^2 z_n).$$

Andrerseits giebt die Verbindung der ursprünglichen Differenzengleichungen:

$$\Delta z \Delta^2 y_n - \Delta y_n \Delta^2 z_n = h_n V_n,$$

so dafs (XX.) in

$$z \Delta^2 y_n - y_n \Delta^2 z_n = \Delta V_n - h_n V_n$$

übergeht und man also aus (XIX.)

$$\Delta V_n + (g_n - h_n) V_n = 0$$

erhält, oder, da $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n$ ist,

$$\text{XXI.}\quad V_{n+1} = V_n (h_n - g_n + 1).$$

Es bleibt nun noch übrig, für die Gröfsen V, g, h ihre Werthe in (XXI.) zu setzen. Die Substitution giebt (da sich $z_n \Delta y_n - y_n \Delta z$ mit $z_n y_{n+1} - y_n z_{n+1}$ vertauschen läfst):

$$\text{XXII.}\quad (z_n y_{n+1} - y_n z_{n+1}) = \frac{(1 - x q^{n-1})}{q^{\gamma-1}(1 - x q^{\alpha+\beta+n-\gamma})} (z_{n-1} y_n - y_{n-1} z_n).$$

Es ist demnach

$$\text{XXIII.}\quad z_n y_{n+1} - y_n z_{n+1} = \frac{k}{q^{n(\gamma-1)}} \cdot \frac{(1-x)(1-xq)\ldots(1-xq^{n-1})}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+1})(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+2})\ldots(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n})},$$

wenn k einen von n unabhängigen Werth bezeichnet.

Diese Gleichung enthält den Satz, dafs sich aus *einem* Integral y_n einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung ein zweites Integral z_n durch

eine einfache *Summation* finden läfst; ganz so wie eine einzige *Integration* ein zweites Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aus einem gegebenen ersten liefert. Um dies klarer vor Augen zu legen, dividire man (XXIII.) durch $y_n y_{n+1}$. Dies giebt

$$\varDelta\left(\frac{z_n}{y_n}\right) = -\frac{k}{y_n y_{n+1} q^{n(\gamma-1)}} \cdot \frac{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{n-1})}{(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+1})(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+2})\dots(1-xq^{\alpha+\beta-\gamma+n})},$$

so dafs die Summation $\frac{z_n}{y_n}$ durch bekannte Gröfsen ausgedrückt giebt. Multiplicirt man endlich mit y_n, so erhält man das zweite Integral z_n.

Für y_n und z_n kann man in (XXIII.) nach und nach die vier verschiedenen Integrale von (I.) setzen. So giebt z. B. die Verbindung des ersten und dritten Integrals von (I.), wenn man die Constante k für $n = \infty$ bestimmt:

$$\begin{aligned}&\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,xq^{n+1})\varphi(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,q,xq^n)\\ &-q^{1-\gamma}\cdot\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,xq^n)\varphi(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,q,xq^{n+1})\\ &= \varphi(\alpha+\beta+1-\gamma,1,1,q,xq^n).\end{aligned}$$

Es würde überflüssig sein, die Gleichungen hinzuzufügen, welche aus den übrigen Combinationen von je zwei Integralen entstehen; die gefundenen Ausdrücke kann man durch die Formel (2.) in der Einleitung noch weiter transformiren, und erhält so Resultate, die den von *Kummer* in diesem Journal Band 15. p. 62 et seq. abgeleiteten ganz ähnlich sind.

Bonn, im Januar 1847.

17.

Über Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Plücker* zu Bonn.)

Eine Reihe von eleganten Sätzen über Curven dritter Ordnung, die Herr *Steiner* (im 32. Bande dieses Journals, welchen ich in den letzten Tagen erhielt) ohne Andeutung eines Beweises mittheilt, veranlafst mich, hier darauf hinzuweisen, wie solche Resultate, denen sich leicht noch andere von derselben Art hinzufügen lassen, entweder die blofse Interpretation einer Gleichungsform sind, die wir unmittelbar hinschreiben können, oder doch wenigstens an eine solche Interpretation sich unmittelbar anknüpfen lassen. Ich habe hier keine andere Absicht, als auf diejenige Methode, die, zur systematischen Grundlage der analytischen Geometrie auszubilden, bisher das Ziel meiner mathematischen Bestrebungen war, aufmerksam zu machen; und dazu mag hier ein einzelnes Beispiel genügen.

Indem wir durch Ω_3 und Ω_2 zwei Functionen dritten und zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen, welche gewöhnliche Parallel-Coordinaten bedeuten mögen, durch die lateinischen Buchstaben lineare Functionen derselben und durch die griechischen Buchstaben constante Coëfficienten darstellen, ist die folgende Gleichung

$$1. \quad \Omega_2 r + \mu s^3 \equiv \Omega_3 = 0,$$

bei *einer* überzähligen Constante, die allgemeine Gleichung der Curven dritter Ordnung. Die Form dieser Gleichung zeigt, dafs die gerade Linie (r) die Tangente in einem Wendungspuncte der Curve Ω_3 ist, und die gerade Linie (s) eine solche, die einerseits durch den Wendungspunct (s, r) geht, andrerseits die Curve Ω_3 noch in solchen zwei Puncten schneidet, in welchen diese von demselben Kegelschnitte Ω_2 dreipunctig osculirt wird. Wenn eine Curve dritter Ordnung Ω_3 gegeben ist, so kann, bei den überzähligen Constanten ihrer Gleichung (1.), (s) jede beliebige gerade Linie sein, die durch einen ihrer Wendungspuncte geht; wenn aber diese Linie einmal beliebig angenommen worden, so ist der Kegelschnitt Ω_2 dadurch vollkommen bestimmt, dafs er die Curve Ω_3 in den beiden übrigen Puncten, in welchen dieselbe von der

Linie (s) geschnitten wird, dreipunctig osculirt. Dieser Kegelschnitt kann insbesondere auch in ein System von zwei geraden Linien ausarten, wonach

$$\Omega_2 \equiv pq;$$

dann verschwindet aus der Gleichung (1.), indem sie in die folgende übergeht:

$$2. \quad pqr + \mu s^3 = 0,$$

die überzählige Constante. Die Linie (s) ist hier dadurch bestimmt, dafs sie gleichzeitig durch die drei Wendunspuncte (p, s), (q, s) und (r, s) geht. Wir können ferner die Linie (s) insbesondere auch dadurch bestimmen, dafs sie die Curve Ω_3, und folglich auch in demselben Puncte den Kegelschnitt Ω_2 berühre. In diesem Berührungspuncte fallen alsdann die beiden Osculationen jener Curve und dieses Kegelschnittes zusammen, indem sie eine sechspunctige Osculation bilden. Hier verschwindet wiederum, wie in dem vorigen Beispiele, die überzählige Constante. Um in Evidenz zu bringen, dafs der Kegelschnitt Ω_2 von der Linie (s) berührt werde, setzen wir zunächst

$$\Omega_2 \equiv st + \varkappa u^2,$$

und da die Function Ω_2 dann immer noch eine willkürliche Constante enthält, dem entsprechend, dafs (t) jede beliebige Tangente des bezüglichen Kegelschnittes sein kann, setzen wir überdies, indem wir für diese Tangente diejenige nehmen, welche, wie (s), durch den Wendungspunct (r, s) geht:

$$t \equiv s + \lambda r.$$

Hiernach geht die allgemeine Gleichung (1.) in die folgenden Formen über:

$$3. \quad \begin{cases} (s(s+\lambda r) + \varkappa u^2) r + \mu s^3 \\ \equiv s(\mu s^2 + sr + \lambda r^2) + \varkappa u^2 r = 0, \end{cases}$$

oder auch, indem wir den Ausdruck in der Klammer der letzten Form in seine (reellen oder imaginären) Factoren ersten Grades auflösen, in die folgende:

$$4. \quad s(s+\alpha r)(s+\alpha' r) + \varrho u^2 r = 0.$$

Die drei geraden Linien

$$s = 0, \qquad s + \alpha r = 0, \qquad s + \alpha' r = 0$$

stehen, in Gemäfsheit der letzten Gleichungsform (4.), in gleicher Beziehung zur Curve: es sind die drei Tangenten, die von dem Wendungspuncte (s, r) aus an die Curve sich legen lassen. Die drei Berührungspuncte auf diesen drei Tangenten liegen sämmtlich auf der geraden Linie (u), und sind solche Puncte, in welchen die Curve Ω_3 von Kegelschnitten sechspunctig osculirt wird. Die Linie (r) bleibt, nach wie vor, die Tangente der Curve im Wendungspuncte (s, r).

Ich bin zuerst in meinem „System der analytischen Geometrie (Berlin 1835)" in genauere Untersuchungen über die Wendungspuncte der algebraischen Curven eingegangen und habe namentlich gezeigt, dafs eine Curve $n$ter Ordnung $3n(n-2)$ solcher Puncte hat (297.); dafs eine Curve der dritten Ordnung demnach *neun* Wendungspuncte hat, und dafs von diesen im allgemeinen Falle immer *drei* reell und *sechs* imaginär sind (299.); dafs ein conjugirter Punct die *sechs* imaginären, ein Doppelpunct *zwei* reelle und *vier* imaginäre, ein Rückkehrpunct die *sechs* imaginären und *zwei* reelle Wendungspuncte absorbirt. Dann habe ich ferner folgenden, hieher gehörigen Satz bewiesen:

*Die sechs Berührungspuncte auf denjenigen sechs Tangenten einer Curve dritter Ordnung, welche, von irgend einem Puncte der Linie S *) aus, an die Curve sich legen lassen, liegen auf einer Curve zweiter Ordnung, welche durch die drei Winkelpuncte des von den Wendungstangenten **) gebildeten Dreiecks und den Pol der Linie S, in Beziehung auf dies Dreieck, geht. Von jedem der drei Wendungspuncte lassen sich nur noch drei Tangenten an die Curve legen, und die drei Berührungspuncte auf denselben liegen in gerader Linie. Die drei geraden Linien, welche man auf diese Weise erhält, gehen durch die drei Winkelpuncte des obigen Dreiecks und schneiden sich alle drei im Pole der Linie S ****) (326.).

Nach dem eben citirten Satze entsprechen den drei reellen Wendungspuncten einer Curve dritter Ordnung (von den imaginären Wendungspuncten können wir hier ganz absehen) hiernach im Allgemeinen *neun* der fraglichen Osculationspuncte; diese neun Puncte liegen zu dreien auf drei geraden Linien, und diese drei geraden Linien schneiden sich wiederum in demselben Puncte. Hiedurch ist zugleich eine Reihe von Situationssätzen gegeben, die zu entwickeln hier der Ort nicht ist. Die neun Osculationspuncte sind aber keinesweges immer reell: *es können auch sechs derselben imaginär sein.* Ein Blick auf die im Systeme gegebene Aufzählung und Darstellung der 219 verschiedenen

---

*) Als Linie S ist diejenige bezeichnet, welche durch die drei reellen Wendungspuncte geht.

**) Richtiger ausgedrückt: Tangenten in den Wendungspuncten.

***) Als Pol einer gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf ein gegebenes Dreieck, ist derjenige Punct bezeichnet, durch welchen jede der drei geraden Linien geht, die einen Winkelpunct des Dreiecks mit demjenigen Puncte verbinden, welcher auf der gegenüberliegenden Seite zu den beiden übrigen Winkelpuncten und dem Durchschnitte mit der gegebenen geraden Linie als vierter harmonischer Theilungspunct gehört. Rückt die Linie unendlich weit, so ist ihr Pol der Schwerpunct des Dreiecks.

Arten der Curven dritter Ordnung zeigt zum Beispiel, dafs die erste Art [illegible], die dritte Art nur drei reelle Osculationspuncte von der fraglichen Art hat.

Der im obengenannten Bande des Journals S. 182 von Hrn. *Steiner* an die Spitze des „Auszugs aus einer am 27. November 1845 in der Akad. der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung" gestellte Satz lautet:

Eine Curve dritter Ordnung enthält im Allgemeinen 27 solche Puncte P, in deren jedem sie von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt werden kann. Von diesen 27 Puncten sind 9 reell und 18 imaginär. Die Gleichung vom 27ten Grade, durch welche die 27 Puncte P bestimmt werden, ist immer algebraisch aufzulösen; was für die Algebra selbst von Interesse ist.

Wenn der zweite Theil des vorstehenden Satzes immer richtig wäre, was nach dem Vorstehenden nicht der Fall ist, so würde er auf elegante Weise sich neben den oben schon erwähnten Satz stellen, dafs von den neun Wendungspuncten (das heifst, von denjenigen neun Puncten, in welchen eine Curve dritter Ordnung von einer geraden Linie dreipunctig berührt wird) immer doppelt so viele imaginär als reell sind. Was den dritten Theil des Satzes betrifft, so möchte die Bildung der Gleichungen vom 27ten Grade, deren Wurzeln die Coordinatenwerthe der 27 Osculationspuncte sind, so complicirt sein, dafs das besagte algebraische Interesse dadurch in den Hintergrund treten würde. Wenn dieser Theil des Satzes überhaupt aber *richtig* sein sollte (was ich bis jetzt nicht glaube), so müfsten sich auch, was bisher noch nicht bekannt war, die neun Wendungspuncte einer Curve dritter Ordnung durch die Auflösung von Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten bestimmen lassen, wonach dann erst durch die Auflösung einer eben solchen Gleichung die jedem einzelnen Wendungspuncte entsprechenden drei Osculationspuncte sich ergeben würden.

Schliefslich erlaube ich mir nur noch eine allgemeine Bemerkung über die von mir angewandte Methode analytischer Beweisführung, beziehe mich hierbei indefs, um leichter verstanden zu werden, lediglich auf das einzelne vorliegende Beispiel. *Meine Gleichungsformen sind vollständige Darstellungen graphischer Constructionen, in denen nichts Fremdartiges sich findet; es sind ideale, mit analytischen Symbolen hingezeichnete Figuren.* Ich will einen Kegelschnitt Ω_2 construiren, der eine gegebene Curve dritter Ordnung in zwei Puncten osculirt und schreibe sogleich die Gleichung

$$1. \quad \Omega_2 r + \mu s^3 = 0,$$

als die entsprechende, hin. Es treten in dieser Gleichung, gleichzeitig mit Ω_2, die linearen Functionen s und r auf, und diese stehen zu der Construction des Kegelschnittes Ω_2 in nothwendiger Beziehung: jener entspricht die durch die beiden Osculationspuncte gehende gerade Linie, dieser die Tangente in einem Wendungspuncte. Die Gleichung (1.) zeigt, dafs die erstgenannte Linie (s) der Bedingung unterworfen ist, ebenfalls durch diesen Wendungspunct zu gehen, und da sie eine willkürliche Constante enthält, kann sich die fragliche Linie (s) beliebig um denselben drehen, so dafs ihr in jeder andern Lage ein anderer Kegelschnitt Ω_2 entspricht. In einer besondern Lage entspricht ihr ein System von zwei geraden Linien. Es ist dies ausgedrückt in der Gleichung

$$2. \quad pqr + \mu s^3 = 0,$$

welche die gerade nothwendige Anzahl von Constanten einschliefst. Wir erblicken in ihr eine gerade Linie (s) dargestellt, die durch drei Wendungspuncte der gegebenen Curve geht, und die drei Tangenten p, q, r in diesen drei Puncten. Die Discussion dieser Gleichungsform ist die Discussion der Wendungspuncte der Curven dritter Ordnung *). Drei solcher Puncte sind reell und liegen auf der geraden Linie (s). Der algebraischen Umformung der Gleichung (1.) in die Gleichung (2.) (an solchen Umformungen scheitern die gewöhnlichen Methoden der analytischen Geometrie) *sind wir ganz überhoben;* wir haben uns blofs zu überzeugen, ob die Anzahl der unabhängigen Constanten noch die nothwendige geblieben ist. Wir können ferner auch die durch den Wendungspunct gehende Linie (s) der Gleichungsform (1.) dadurch näher bestimmen, dafs sie die gegebene Curve dritter Ordnung berühre. Dann fallen die beiden Osculationspuncte in einen einzigen zusammen, und der Kegelschitt Ω_2 osculirt diese Curve sechspunctig. Dieser sechspunctig osculirende Kegelschnitt tritt in der Gleichungsform

$$3. \quad \{s(s+\lambda r)+\varkappa u^2\}r+\mu s^3 = 0,$$

welche, wie (2.), die gerade nothwendige Anzahl von Constanten enthält, in Evidenz. Alles Willkürliche ist hier wiederum ausgeschlossen. Durch eine einfache Form-Änderung, indem wir zu der Gleichung

$$4. \quad s(s+\alpha r)(s+\alpha' r)+\varkappa u^2 r = 0$$

übergehen, verschwindet plötzlich der osculirende Kegelschnitt aus der Construction und statt desselben zeichnen sich, neben der Tangente (r) im Wendungspuncte, die sämmtlichen drei durch diesen Punct gehenden Tangenten der

*) System 3ter Abschnitt §. 8.

gegebenen Curve und diejenige gerade Linie hin, welche durch die drei Berührungspuncte auf diesen drei Tangenten geht. Jede der vier Gleichungsformen, als Bild der gegebenen Curve dritter Ordnung und der davon abhängigen Kegelschnitte und geraden Linien, unmaskirt durch die Annahme willkürlicher Coordinaten-Axen, ist, in Worten ausgedrückt, ein geometrischer Satz. Die den beiden letzten Gleichungsformen entsprechenden Sätze gruppiren sich, weil eine dieser Formen aus der andern unmittelbar hervorgeht, zusammen, und mit ihnen überdies auch noch ein dritter Satz, indem die Gleichung (3.) sich auch in der Form

$$(s^2+\varkappa u^2)r+(\lambda r^2+\mu s^2)s = 0$$

oder in der Form

$$5. \quad (s+\beta u)(s-\beta u)r+\mu(s+\gamma r)(s-\gamma r)s = 0$$

schreiben läfst; wobei vier neue gerade Linien in Evidenz treten *).

Die Geometrie der höhern Curven kann der Algebra und ihrer Begriffs-Bestimmungen nicht entbehren. Es giebt nicht einmal eine geometrische Definition einer Curve dritter Ordnung; und wo es keine allgemeine Definition giebt, da giebt es auch keine methodische Behandlung. Die Bestimmung einer

---

*) Die Gleichung des osculirenden Kegelschnitts

$$s(s+\lambda r)+\varkappa u^2 = 0$$

wird befriedigt, wenn zugleich

$$s^2+\varkappa u^2 = 0 \quad \text{und} \quad r = 0$$

ist, woraus sich zeigt, wie die erste dieser beiden Gleichungen

$$s^2+\varkappa u^2 \equiv (s+\beta u)(s-\beta u) = 0$$

zwei solche gerade Linien darstellt, die den Osculationspunct (s, u) mit denjenigen beiden Puncten verbinden, in welchen der Kegelschnitt von der Tangente (r) im Wendungspuncte (r, s) geschnitten wird. Ebenso stellt die Gleichung

$$\mu s^2+\lambda r^2 \equiv \mu(s+\gamma r)(s-\gamma r) = 0$$

zwei durch den Wendungspunct (r, s) gehende gerade Linien dar. Und somit ist der im Texte angedeutete, in der Gleichungsform (5.) ausgesprochene Satz folgender:

Wenn man den Punct, in welchem eine gegebene Curve dritter Ordnung von einem Kegelschnitte sechspunctig osculirt wird, mit denjenigen beiden Puncten, in welchen dieser Kegelschnitt von der Tangente der Curve in dem entsprechenden Wendungspuncte geschnitten wird, durch zwei gerade Linien verbindet, so begegnen diese der Curve noch in solchen vier Puncten, die, paarweise, mit dem Wendungspuncte in gerader Linie liegen.

Wenn man einen der vier Durchschnittspuncte kennt, so sind die drei übrigen unmittelbar dadurch bestimmt, dafs einerseits die Gleichungen

$$s = 0, \quad u = 0, \quad s+\beta u = 0, \quad s-\beta u = 0,$$

und andrerseits die Gleichungen

$$s = 0, \quad r = 0, \quad s+\gamma r = 0, \quad s-\gamma r = 0,$$

vier Harmonicalen darstellen.

Curve dritter Ordnung als einer solchen, die von einer geraden Linie in drei Puncten geschnitten wird, ist die geometrische Umschreibung einer algebraischen Definition und kommt darauf hinaus, zu sagen, dafs eine solche Curve durch die allgemeine Gleichung dritten Grades zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten x und y dargestellt werde, indem, wenn wir zwischen einer solchen Gleichung und der allgemeinen Gleichung ersten Grades zwischen x und y eine dieser beiden Gröfsen eliminiren, die resultirende Gleichung vom dritten Grade ist. Wollen wir dieser Definition ihre algebraische Basis nehmen, so hört sie auf Definition zu sein; denn, auch abgesehen von dem Imaginären, können wir nicht mehr nach dieser allgemeinen Bestimmung eine bestimmte Curve von der fraglichen Art construiren. Die allgemeinste geometrische Definition einer Curve dritter Ordnung wäre nach meiner Meinung immer noch diejenige, welche als Interpretation der Gleichung (2.) sich ergiebt, wenn wir diese in folgender Weise schreiben:

$$\frac{pqr}{s^3} = \mu.$$

„Wenn vier gerade Linien (p), (q), (r) und (s) gegeben sind, so ist „der geometrische Ort solcher Puncte, für welche das Product aus den Ab„ständen von den drei ersten gegebenen geraden Linien zu dem Cubus des „Abstandes von der vierten geraden Linie in einem gegebenen Verhältnisse „steht, eine Curve dritter Ordnung." (Die vier gegebenen geraden Linien können hierbei, unbeschadet der Allgemeinheit, immer als reell angesehen werden. Auf ähnliche Weise, wie ich in meinem *Systeme* eine Aufzählung der verschiedenen Arten der Curven dritter Ordnung an die Gleichungsform

$$pqr + \mu s = 0$$

geknüpft habe, ergiebt sich auch hier eine solche Aufzählung; wobei die verschiedene gegenseitige Lage der obigen vier geraden Linien das Princip der Eintheilung liefert. Neben diese neue Aufzählung stellt sich unmittelbar die ganz analoge der Curven dritter Classe.) Aber wer würde es unternehmen, aus der vorstehenden, oder aus irgend einer andern Definition, auf geometrischem Wege, die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung systematisch abzuleiten? Dies ist offenbar nicht möglich, ohne Nebeneinanderstellung der coordinirten Fälle, die durch das Reelle und Imaginäre bedingt werden. Wollten wir aber unmittelbar das Imaginäre in die geometrische Discussion aufnehmen, so hiefse das algebraisch verfahren. Andrerseits weifs ich recht wohl, dafs auch an das Imaginäre sich eine *nähere* oder *entferntere* geometrische Be-

deutung anschliefst. Zwei Kegelschnitte schneiden sich zum Beispiel in vier reellen oder imaginären Puncten, durch welche sich immer drei Systeme von zwei geraden Linien legen lassen; die geraden Linien zweier dieser drei Systeme können imaginär sein; die beiden imaginären Linien der beiden Systeme schneiden sich in zwei Puncten, die ihrerseits entweder reell oder imaginär sind: aber auch wenn sie imaginär sind, liegen sie *immer* auf einer reellen geraden Linie. Es ist dies die geometrische Einkleidung eines algebraischen Factums. Nehmen wir als einfacheres Beispiel den Fall zweier Kreise, durch deren beide, reelle oder imaginäre, Durchschnittspuncte immer eine reelle gerade Linie geht, so können wir diese gerade Linie hier auch geometrisch, etwa als die Linie der gleichen Tangenten, definiren und so das Imaginäre gewissermafsen umgehen. Wir können dies immer, wenn die Curven von der zweiten Ordnung sind, wo, indem wir dieselben als Schnitte einer Kegelfläche definiren, diese Kegelfläche die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade vertritt. Hier reichen, um die Discussion allgemein und systematisch zu machen, die Projections-Methoden, oder die Collineation, oder die Theorie der harmonischen Proportionen und der Involutionen aus, welche alle einen gemeinschaftlichen Ursprung haben.

Schon im Jahre 1830, in der Vorrede zum zweiten Bande meiner „Entwicklungen" habe ich mich in folgender Weise ausgedrückt. „Man kann „das Verhältnifs der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspuncten „betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dafs die Analysis „eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für „sich allein dasteht, und dafs die Geometrie, so wie von einer andern Seite „die Mechanik, blofs als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem „grofsen erhabenen Ganzen erscheint. Wenn wir diese Ansicht zu Grunde „legen und consequent durchführen, so erhält dadurch die Behandlung der „Geometrie einen eigenthümlichen Character, auf den ich hier noch besonders „aufmerksam machen zu müssen glaube." Zu dieser Ansicht, die der leitende Gedanke aller meiner Arbeiten in dem Gebiete der analytischen Geometrie war, bekenne ich mich auch jetzt noch; und zwar mit klarerem Bewufstsein, als damals, wo Manches für mich noch unbestimmte Anschauung war. Und jetzt kann ich auch, indem ich mich auf ein Beispiel, wie das in dem Vorstehenden behandelte, beziehe, klarer und bestimmter mich aussprechen, und also auch hoffen, vollständiger verstanden zu werden.

Bonn, im März 1847.

18.

Note sur le theorème de Pascal.

(Par Mr. *Plücker*, prof. de math. à l'université de Bonn.)

Dans la deuxième partie d'un Mémoire intitulé „Sur quelques théorèmes de la géométrie de position" (Journal vol. XXXI p. 213—230) M. *Cayley* s'exprime ainsi:

„Sur le théorème de *Pascal*. En considérant six points sur la même „conique, et les prenant dans un ordre déterminé, pour en former un hexagone, „on sait que les côtés opposés se rencontrent dans trois points situés en ligne „droite. En prenant les points dans un ordre quelconque, on en peut former „soixante hexagones, à chacune desquelles correspond une droite; il s'agit main„tenant de trouver la relation entre ces droites."

„M. *Steiner* a prouvé dans son ouvrage „„Systematische Entwicklun„gen etc."" que ces soixante droites passent trois à trois par vingt points, et „il ajoute que ces vingt points sont situés quatre à quatre sur quinze droites. „La première partie de ce théorème peut être démontrée assez facilement, „comme nous le verrons: mais pour la seconde partie, je n'ai pas réussi à „trouver les combinaisons de quatre points qui doivent être situés en ligne droite, „et il me parait même qu'il est impossible de les trouver."

„Je ne sais pas s'il existe une démonstration de la seconde partie du „théorème; je n'ai pu la trouver nulle-part. Au cas que cette partie du théo„rème n'étoit pas correcte, il parait que l'on devra peut-être lui substituer la „proposition suivante." „Les vingt points déterminent deux à deux dix lignes „qui passent trois à trois par dix points" (Note) p. 219.

„Je vais ajouter quelques reflexions sur la manière de chercher les „relations qui existent entre ces vingt points" etc. p. 222.

Je me propose de faire disparaître de ce qui precède tout ce qu'il renferme d'incorrect et d'hypothétique. De simples citations suffiront pour parvenir à ce but.

En 1828 M. *Steiner* proposa dans les Annales de M. *Gergonne* *) à démontrer le théorème suivant:

---

*) Théorèmes sur *l'Hexagrammum mysticum*, proposés à démontrer par M. *J. Steiner*, de Berlin. *Gerg.* Ann. vol. XVIII.

Six points pris arbitrairement sur le périmètre d'une conique quelconque, sont les sommets de soixante hexagones inscrits, et les points de contact de soixante hexagones circonscrits (*Carnot*, Géométrie de position) lesquels jouissent des propriétés suivantes.

1°. Dans chacun des hexagones inscrits les points de concours des directions des côtés opposés appartiennent tous les trois à une même droite (D) (*Pascal*), de sorte qu'on obtient ainsi soixante droites D.

1°. Dans chacun des hexagones circonscrits, les droites qui joignent les sommets opposés concourent toujours par trois dans un même point P (*Brianchon*), de sorte qu'on obtient ainsi soixante points P.

2°. Ces soixante droites D concourent trois à trois dans un même point p, de sorte qu'on obtient ainsi vingt points p.

2°. Ces soixante points P appartiennent, trois à trois, à une même droite d, de sorte qu'on obtient ainsi vingt droites d.

3°. Ces vingt points p appartiennent, quatre à quatre, à une même droite δ, de sorte q'on obtient ainsi cinq droites δ.

3°. Ces vingt droites d concourent, quatre à quatre, dans un même point ϖ, de sorte qu'on obtient ainsi cinq points ϖ.

4°. Ces cinq droites concourent dans un même point ϖ'.

4°. Ces cinq points ϖ appartiennent à une même droite δ.

Les numéros 3, et 4 contiennent des propositions fausses. J'ai prouvé dans un Mémoire publié en 1829 *), qu'il faut les remplacer par les théorèmes suivants:

3°. Ces vingt points p appartiennent à quinze droites δ, dont chacune en contient quatres, de sorte que par chacun des vingt points p, passent trois des quinze droites δ.

3°. Ces vingt droites d concourent dans quinze points ϖ, par chacun desquelles en passent quatre, de sorte que chacune des vingt droites d contient trois des quinze points ϖ.

Mr. *Steiner* a bien voulu adopter ma rédaction du théorème dans un ouvrage publié plus tard et cité par M. *Cayley*.

Dans mon Mémoire de 1829 on trouve une analyse complète du théorème de M. *Steiner* et du mien. Les deux démonstrations analytiques, que j'ai données du premier de ces deux théorèmes me paraissent remarquables

*) Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coëfficienten. Journal Vol. 5. p. 268.

pour leur extrême simplicité *). Le second théorème, *suite immédiate du théorème même de Pascal*, n'exige point une démonstration nouvelle.

Quant au théorème de *Pascal*, je voudrois bien le regarder par préférence comme un cas particulier du théorème fondamental suivant sur les courbes du troisième ordre.

Trois ou plusieurs courbes du troisième ordre, passant par les mêmes huit points donnés, vont se couper toutes dans un même neuvième point **).

Si l'on remplace deux des trois courbes par des systèmes de trois lignes droites, ce théorème se change immédiatement dans le suivant:

Si l'on inscrit à une courbe du troisième ordre un hexagone quelconque 1 2 3 4 5 6 dont les côtés opposés 12 et 45, 23 et 56 vont se rencontrer sur la courbe, le même aura lieu pour les deux côtés 56 et 61.

En remplaçant enfin la dernière courbe du troisième ordre par le système d'une conique et d'une ligne droite quelconque, le dernier théorème se transforme sur le champ dans celui de *Pascal*. Je ferai remarquer, en passant,

*) C'est cette simplicité inattendue qui m'a suggéré l'idée de traiter d'une manière analogue et uniforme tous les théorèmes de la géométrie linéaire de situation, et j'y ai réussi en donnant les méthodes générales pour les démontrer au moyen de symboles, représentant des expressions linéaires, et des coëfficients indéterminés. (Voyez le X. et XI. vol. du présent Journal: „Analytisch-geometrische Aphorismen §. 1 et §. 111.") En vertu de la nature des théorèmes, on peut même quelquefois se passer des derniers, ou du moins, on n'a pas besoin de les mettre en évidence. C'est le cas du théorème en question.

**) Ce théorème, ou plutôt celui qui correspond à l'intersection de deux courbes d'un ordre quelconque, me parait le théorème le plus important de la Géométrie des courbes. Je l'ai donné pour la première fois en 1827 dans une note de mon ouvrage intitulé: *Analytisch-geometrische Entwicklungen,* Tome I. p. 228, et après je l'ai traité avec plus de détail dans l'ouvrage „*Theorie der algebraischen Curven,*" qui a paru en 1839. Il étoit naturel d'étendre le théorème en question aux intersections des surfaces; ce que j'ai fait en 1829 dans un mémoire publié dans les Annales de M. *Gergonne,* pour le cas des surfaces du même ordre. Il restait encore à discuter le cas des surfaces d'un ordre différent. C'est ce qui à été fait dans deux mémoires, l'un de M. *Jacobi* et l'autre de moi, qui étoient en même tems entre les mains de l'Editeur, mais dont l'un à été publié un peu plutôt que l'autre. (Journal vol. XV. cah. I. 1836.) J'ai appris par le mémoire de M. *Jacobi,* que les formules, que j'avois données dans le mien, n'étoient exactes que pour un seul des deux cas généraux et coordonnés, et que, pour l'autre cas, il falloit soumettre ces formules à une réduction nouvelle. Dans mon dernier ouvrage (*System der Geometrie des Raumes*) qui a paru au commencement d'Août 1846, j'ai repris la même question. M. *Cayley,* dans un mémoire plus récent (*Cambridge and Dublin mathematical Journal* n. VII) y revient également. Le livre cité n'étant pas venu à sa connaissance, il n'a pu que citer mon Mémoire de 1836, à l'occasion duquel il réproduit l'observation que je viens de faire.

qu'au théorème que je viens d'énoncer, se rattachent, pour les courbes du troisième ordre, une foule de constructions, analogues à celles qui dérivent, pour les coniques, du théorème de *Pascal*. Une courbe du troisième dégré étant tracée, l'on pourra, par exemple, dans chacun de ses points, construire la tangente. Par une nouvelle particularisation (en fesant par exemple coïncider les points 1 et 2, 4 et 5), l'on obtient entre autres théorémes le théorème suivant:

Si les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à une courbe du troisième ordre, vont se couper sur la courbe, le même aura lieu pour le quadrilatère circonscrit, dont les côtés touchent la courbe dans les sommets du premier quadrilatère.

Un plus ample détail dépasseroit le but de cette note.

Bonn, au mois de Mars 1847.

19.

Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe.

(Von Herrn Dr. *Plücker*, Professor der Mathematik an der Universität zu Bonn.)

---

1. Es ist bekannt, dafs in jedem Puncte einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung und Classe (eines einschaligen Hyperboloïds und eines hyperbolischen Paraboloïds) zwei gerade Linien sich schneiden, die ganz auf der Fläche liegen und den beiden verschiedenen Erzeugungen der Fläche (durch die Bewegung einer geraden Linie) angehören. Durch diese beiden Linien von verschiedener Erzeugung ist der Punct auf lineare Weise bestimmt. Um ferner jede dieser beiden Linien in gleicher Weise zu bestimmen, wollen wir auf der Fläche selbst zwei gerade Linien, die bezüglich der ersten und der zweiten Erzeugung angehören: die beiden, in irgend einem Puncte O sich schneidenden Axen OX und OY, beliebig annehmen. Die Puncte jeder dieser beiden Axen bestimmen wir durch ihre Abstände vom Puncte O und nennen diese Abstände ξ und η. Durch jeden bestimmten Werth a, den wir ξ beilegen, ist ein Punct P der Axe OX bestimmt, und durch diesen Punct ist eine einzige Linie PM, die der zweiten Erzeugung angehört, gegeben. Nehmen wir andrerseits für η einen bestimmten Werth b an, so ist dadurch ein Punct Q auf der Axe OY und durch diesen Punct eine einzige Linie QM, der ersten Erzeugung, gegeben. Die beiden Linien PM und QM schneiden sich in einem einzigen Puncte M, und dieser Punct der Fläche ist also durch die beiden Gleichungen

$$\xi = a, \qquad \eta = b$$

auf lineare Weise bestimmt. Umgekehrt braucht man, wenn man den Punct M als gegeben betrachtet und dann die diesem Puncte entsprechenden Werthe von ξ und η bestimmen will, durch denselben blofs die beiden Erzeugenden MP und MQ zu legen. Dann sind die Segmente, OP und OQ, oder a und b, welche diese Linien auf den beiden Axen OX und OY abschneiden, die verlangten Werthe. Auch diese Bestimmung ist eine *lineare*.

2. Wir nennen ξ und η *Coordinaten;* es sind veränderliche Gröfsen, die für einen gegebenen Punct der Fläche bestimmte Werthe erhalten. Auf

ganz gleiche Weise, wie ein Punct in der Ebene XOY durch seine Coordinaten-Werthe gegeben ist, ist es hier ein *Punct der Fläche.* Eine Gleichung zwischen ξ und η stellt im Allgemeinen eine Curve dar, die einmal in der Ebene XOY, das anderemal *auf der Fläche* liegt. Alle analytischen Entwicklungen, ebene Curven betreffend, können wir also unmittelbar auf Curven übertragen, die auf einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung liegen.

3. Wenn wir erwägen, dafs die beiden geraden Linien, die durch einen gegebenen Punct M der Fläche gehen, in derjenigen Ebene liegen, welche die Fläche in diesem Puncte *berührt*, so ergiebt sich die Bestimmung der Coordinaten dieses Puncts ξ und η unmittelbar. Es sind diejenigen Segmente, welche von den beiden Axen OX und OY durch die Berührungs-Ebene in dem gegebenen Puncte M abgeschnitten werden. Aus diesem Gesichtspuncte lassen sich auch analytisch, wenn eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung gegeben ist und auf ihr zwei Axen beliebig angenommen werden, die Coordinaten irgend eines Punctes derselben ohne Mühe bestimmen.

Es sei

$$1. \quad z(az+by+cx+d)+\mu xy = 0\,^{*)}$$

die allgemeine Gleichung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten. Die Richtung der Axe (x,y) oder OZ ist, während die beiden andern Axen (x,z) und (y,z), oder OX und OY, ganz auf der Fläche liegen, durchaus willkürlich angenommen, und in Folge hiervon enthält die vorstehende Gleichung noch überzählige Constanten. Die Gleichung

$$az+by+cx+d = 0$$

stellt diejenige Tangential-Ebene der Fläche dar, welche durch die beiden zweiten geraden Linien geht, die zugleich auf dieser Fläche und in den beiden Coordinaten-Ebenen XOZ und YOZ liegen.

Wenn wir auf der Fläche irgend einen Punct (x', y', z') annehmen, so erhalten wir für die Tangential-Ebene in diesem Puncte, nach bekannter Weise, sogleich die folgende Gleichung:

$$(2az'+by'+cx'+d)z+(bz'+\mu x')y+(cz'+\mu y')x+dz' = 0.$$

*) Ich verweise in Beziehung auf diese Gleichungsform und auf Alles, was an diese Form sich anknüpft, auf mein „System der Geometrie des Raumes, in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend," 1846 in 4°, und namentlich auf §. 5.: „Discussion der Gleichungsform

$$tu = \mu vw,$$

in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung." S. 99—135.

Für diejenigen beiden Puncte dieser Ebene, welche auf den beiden Axen OX und OY liegen, ergiebt sich hiernach

$$2.\quad x \equiv \xi = -\frac{dz'}{cz'+\mu y'} \quad \text{und} \quad y \equiv \eta = -\frac{dz'}{bz'+\mu x'}.$$

Umgekehrt ergeben sich, um in gewöhnlicher Weise den Punct der Fläche durch seine neuen Coordinaten ξ und η zu bestimmen, folgende Gleichungen:

$$3.\quad \frac{y'}{z'} = -\left\{\frac{d}{\mu}\cdot\frac{1}{\xi}+\frac{c}{\mu}\right\}, \quad \frac{x'}{z'} = -\left\{\frac{d}{\mu}\cdot\frac{1}{\eta}+\frac{b}{\mu}\right\}.$$

4. Wir wollen die durch die allgemeine Gleichung ersten Grades zwischen ξ und η dargestellte Curve eine *Curve auf der Fläche von der ersten Ordnung* nennen und ihre Natur analytisch bestimmen. Diese allgemeine Gleichung, für welche wir folgende annehmen wollen:

$$4.\quad A\eta+B\xi+C = 0,$$

läfst sich, wenn man für η und ξ ihre oben entwickelten Werthe in x', y' und z' setzt und zugleich die Accente wegläfst, in folgende umformen:

$$Adz(cz+\mu y)+Bdz(bz+\mu x)-C(cz+\mu y)(bz+\mu x) = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn man x, y und z, wie früher ξ und η, als veränderlich betrachtet, eine Kegelfläche zweiter Ordnung dar, welche die gegebene Fläche in derjenigen Curve schneidet, die durch die Gleichung (4.) dargestellt wird. Entwickelt man, so ergiebt sich

$$5.\quad (Adc+Bdb-Ccb)z^2+(Ad-Cb)\mu zy+(Bd-Cc)\mu zx-C\mu^2xy = 0,$$

und wenn man, in Gemäfsheit der Gleichung der Fläche, für das letzte Glied

$$-C\mu(az+by+cx+d)z$$

setzt:

$$6.\quad z[\{Adc+Bdb-C(cb+\mu a)\}z+\mu d\{Ay+Bx+C\}] = 0.$$

Hieraus folgt, dafs die Kegelfläche (5.), deren Mittelpunct auf der Fläche im Anfangspuncte der Coordinaten liegt, die Fläche in einer ebenen Curve schneidet. Diese ebene Curve wird also unmittelbar durch die Gleichung (4.) dargestellt. *Die Curven auf der Fläche von der ersten Ordnung sind demnach ebene Curven.* Wenn wir also in der letzten Gleichung den Factor z weglassen (der Tangential-Ebene im Anfangspuncte entspricht die zweite, hier nicht in Betracht kommende Durchschnitts-Ebene des Kegels und der gegebenen Fläche), so ist die Gleichung

$$7.\quad (Adc+Bdb-C(cb+\mu a))z+\mu d(Ay+Bx+C) = 0$$

die Gleichung der Ebene der durch (4.) dargestellten Curve. Die Form der

letzten Gleichung führt zu der Bemerkung, dafs diese Ebene die Tangential-Ebene im Anfangspuncte in derselben geraden Linie schneidet, welche in dieser Ebene durch die Gleichung (4.) dargestellt wird, wenn man ξ und η als gewöhnliche Parallel-Coordinaten x und y construirt, so dafs

$$Ay+Bx+C=0.$$

5. Nimmt man statt der Gleichung (4.) die allgemeine Gleichung zweiten Grades, so ist die dargestellte Curve auf der Fläche die Durchschnitts-Curve dieser Fläche mit einer Kegelfläche 4ter Ordnung, deren Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Die Ordnung dieser Kegelfläche steigt bis zur $2n$ten, wenn die Curve durch eine Gleichung $n$ten Grades in ξ und η dargestellt wird.

Eine Curve auf der Fläche von der ersten Ordnung hangt nur von zwei Constanten ab und wird durch zwei Puncte auf eine einzige Weise bestimmt. Von derselben Anzahl von Constanten hangt die Gleichung (7.) ab; die bezügliche Ebene, welche durch ihr Durchschneiden der gegebenen Fläche die fragliche Curve bestimmt, geht (was unmittelbar daraus folgt, dafs ihre Gleichung nur zwei lineare Constanten $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ hat) durch einen von diesen Constanten unabhängigen festen Punct.

Eine Curve auf der Fläche von der 2ten, und überhaupt von der $n$ten Ordnung ist bezüglich durch fünf und $\frac{n(n+3)}{1\cdot 2}$ beliebig auf der Fläche angenommene Puncte auf lineare Weise bestimmt; durch eben so viele Puncte ist es auch die Kegelfläche 4ter und überhaupt $2n$ter Ordnung, welche die gegebene Fläche in der fraglichen Curve schneidet.

6. Die vorstehenden Entwicklungen lassen sich dadurch noch vereinfachen, dafs man die Axe OZ durch den Mittelpunct der Fläche legt; dann verschwinden die Constanten b und c, und je nachdem alsdann a einen endlichen Werth behält, oder ebenfalls verschwindet, ist die Fläche ein Hyperboloïd, oder geht in ein Paraboloïd über. Im ersten Falle können wir a gleich Eins setzen. Dies giebt für die Gleichung der Fläche:

$$8. \qquad z(z+d)+\mu xy=0.$$

Die Axen OY und OX sind irgend zwei Linien der zwiefachen Erzeugung der Fläche; ihr Durchschnitt O ist der Scheitel des in die dritte Axe OZ fallenden Durchmessers des Hyperboloïds, und $(-d)$ ist die Länge desselben. Es gehen hier die Gleichungen (2.) in die folgenden über:

$$2, a. \qquad \xi = -\delta \cdot \frac{z}{y}, \qquad \eta = -\delta \cdot \frac{z}{x},$$

indem man zugleich der Kürze wegen $\frac{d}{\mu} \equiv \delta$ setzt, und die Gleichung der Ebene der durch (4.) dargestellten Curven ist:

$$7, a. \qquad Cz + d(Ay + Bx + C) = 0.$$

Alle durch diese Gleichung, bei willkürlicher Annahme von A, B, C, dargestellten Ebenen gehen durch den festen Punct

$$z = -d, \qquad y = 0, \qquad x = 0;$$

also *durch den zweiten Scheitel S des durch O gehenden Durchmessers der Fläche.* Durch denselben festen Punct gehen also auch alle, bei beliebiger Constanten-Annahme, durch die Gleichung (4.) dargestellten Curven. Um demnach eine solche Curve zu construiren, welche durch zwei gegebene Puncte auf der Fläche geht, braucht man blofs eine Ebene durch diese beiden Puncte und zugleich durch den festen Punct zu legen: diese Ebene schneidet die Fläche in der zu construirenden Curve.

7. So wie man zwei beliebige, auf dem Hyperboloïd liegende und in irgend einem Puncte desselben sich schneidende gerade Linien als Coordinaten-Axen *OX* und *OY* annehmen kann und dann der *feste Punct* sogleich sich ergiebt: so läfst sich auch, umgekehrt, dieser letztere von vorneherein beliebig annehmen und es lassen sich danach die Coordinaten-Axen bestimmen. So gelangen wir zunächst zu folgendem Resultate:

Alle Sätze über gerade Linien in der Ebene übertragen sich auf ebene Curven, die auf einem Hyperboloïd liegen und die alle durch einen, auf demselben beliebig angenommenen festen Punct gehen.

Sobald Curven auf der Fläche von der zweiten und von höhern Ordnungen nach der 5ten Nummer geometrisch bestimmt worden sind, lassen sich auch auf diese Curven die analogen Beziehungen der durch dieselben Gleichungsformen in der Ebene dargestellten Curven übertragen. Es bestehen zum Beispiel die Sätze von *Pascal* und *Brianchon* gleichzeitig; sammt ihrer ganzen Erweiterung. (Vergl. die vorhergehende Abhandlung: „Note sur le théorème de *Pascal*.") Ich beschränke mich hier auf die Aussage der Sätze selbst.

Wenn man in und um eine Curve auf einer Fläche von der zweiten Ordnung, auf eben dieser Fläche ein Sechseck beschreibt, dessen Seiten ebene Curven sind, die durch irgend einen festen Punct der Fläche gehen, so liegen einmal die drei Durchschnittspuncte der drei Paare gegenüber-

liegender Seiten des eingeschriebenen Sechsecks mit dem festen Puncte in derselben Ebene, und andrerseits schneiden sich diejenigen drei ebenen Curven, welche die drei Paare gegenüberliegender Winkelpuncte des umschriebenen Sechsecks mit dem festen Puncte verbinden, aufser in diesem Puncte, noch in einem zweiten Puncte der Fläche.

Den ersten der beiden Sätze können wir auch hier aus dem allgemeinern Satze über Curven auf der Fläche von der dritten Ordnung, die alle in demselben neunten Puncte sich schneiden, wenn sie durch acht gegebene Puncte gehen, ableiten. So wie in der Ebene, wenn fünf Puncte eines Kegelschnittes gegeben sind, der *Pascal*sche Satz zur Construction jedes sechsten Punctes desselben dienen kann, und dieser Satz hiernach sogar auch als *Definition* der Kegelschnitte sich hinstellen läfst: so können wir auch den entsprechenden Satz als *Definition* der Curven auf der Fläche von der zweiten Ordnung zu Grunde legen und, statt von der Betrachtungsweise der 5ten Nummer auszugehen, hiernach diese Curven construiren.

8. Wenn die Fläche ein hyperbolisches *Paraboloïd* ist, läfst sich die allgemeine Gleichung derselben in folgender Weise schreiben:

$$9. \quad xy + \delta z = 0,$$

und man erhält alsdann für die Gleichung derjenigen Ebene, in welcher die Curve auf der Fläche

$$A\eta + B\xi + C = 0$$

liegt, folgende:

$$7, b. \quad Ay + Bx + C = 0.$$

Alle Schnitt-Ebenen also, in welchen Curven auf der Fläche von der ersten Ordnung liegen, sind den Durchmessern der Fläche parallel; was mit der 6ten Nummer übereinstimmt.

9. Es ist überhaupt klar, dafs alle Resultate, zu denen wir nach den vorstehenden Andeutungen gelangen, sobald sie sich nicht auf die Natur der Fläche *als einer geradlinigen* beziehen, für *alle* Flächen zweiter Ordnung unmittelbar Geltung behalten. Es kommt dies darauf hinaus, die beiden geraden Linien OX und OY in der Berührungs-Ebene der Fläche durch zwei imaginäre gerade Linien zu ersetzen; das heifst, in den Gleichungen (8. und 9.) x und y bezüglich mit $(x + \alpha y\sqrt{-1})$ und $(x - \alpha y\sqrt{-1})$ zu vertauschen *).

*) Durch die Andeutungen des Textes werden analytische Entwicklungen hervorgerufen, die zu verfolgen uns *hier* zu weit führen würde. Die Lage eines Puncts läfst

10. Den einfachsten geometrischen Gesichtspunct für die Entwicklungen der frühern Nummern gewinnen wir auf folgende Weise. Wenn wir gerade Linien, die in irgend einer gegebenen Ebene liegen, auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung projiciren und hierbei zum Mittelpuncte der Projection irgend einen festen Punct der Fläche selbst nehmen: so sind die Projectionen der geraden Linien ebene Curven, welche durch den festen Punct gehen. Nehmen wir überdies für die Ebene der geraden Linien die Tangential-Ebene der Fläche in demjenigen Puncte an, in welchem dieselbe zum zweiten Male von dem durch den festen Punct gehenden Durchmesser geschnitten wird; ferner diejenigen beiden geraden Linien, in welchen die Fläche von der Berührungs-Ebene geschnitten wird, zu Coordinaten-Axen OX und OY: so stellt, was unmittelbar aus dem Schlufsresultate der 4ten Nummer folgt, *dieselbe Gleichung*

$$Ay+Bx+C=0$$

in der Tangential-Ebene XOY eine gerade Linie und auf der Fläche (es ist hier überflüssig in der Bezeichnung x und y mit ξ und η zu vertauschen) eine ebene Curve dar: *von beiden ist die eine die Projection der andern.* Denselben Coordinatenwerthen entsprechen also zwei Puncte, von welchen einer die Projection des andern ist. Derselben Gleichung beliebigen Grades zwischen x und y entsprechen Curven, von denen eine ebenfalls die Projection der andern ist. Nennen wir die fragliche Art von Projection (indem wir die Benennung von der Kugel auf beliebige Flächen zweiter Ordnung (hier zunächst auf das einschalige Hyperboloïd) übertragen) *stereographische Projection,* so gelangen wir zu folgendem Satze:

Eine beliebige Curve auf einer Fläche zweiter Ordnung, und ihre stereographische Projection, werden beide durch eine und dieselbe Gleichung dargestellt, wenn man diejenigen beiden geraden Linien, in welcher die Fläche von der Tangential-Ebene, auf welche wir projiciren, geschnitten wird, in beiden Fällen zu Coordinaten-Axen nimmt.

11. Es seien OX und OY die beiden Coordinaten-Axen in der Tangential-Ebene XOY (Taf. III. Fig. 1.), so sind

$$x\equiv\xi=OP \quad \text{und} \quad y\equiv\eta=OQ$$

---

sich auch durch die Vermittlung *imaginärer Coordinaten-Axen* bestimmen. Wir könnten uns hierbei der gewöhnlichen Verwandlungsformen bedienen, die den Übergang von einem Coordinaten-Systeme zu einem andern geben. Durch eine Gleichung zwischen imaginären Coordinaten kann eine reelle Curve dargestellt werden; eine Ellipse zum Beispiel, indem man ihre imaginären Asymptoten zu Coordinaten-Axen nimmt.

einerseits die Coordinaten eines Puncts M auf der Fläche, und ***andrerseits*** seiner stereographischen Projection N. Wenn der letztgenannte Punct N irgend eine Curve beschreibt, deren Gleichung

$$10. \quad \varphi(y, x) = 0$$

ist, so stellt nach dem Vorstehenden ***dieselbe Gleichung*** die stereographische Projection dieser Curve auf der Fläche dar, die wir, wenn die Fläche eine geradlinige ist, nach der 1ten Nummer unmittelbar construiren können.

Für die projicirende Kegelfläche, deren Mittelpunct S und der Punct ($z = -d$, $y = 0$, $x = 0$) ist, erhalten wir unmittelbar nachstehende Gleichung:

$$11. \quad \varphi\left(\frac{dy}{z+d}, \frac{dx}{z+d}\right) = 0;$$

welche sich, wenn man z verschwinden läfst, auf die Gleichung (10.) reducirt.

Denselben Punct M auf der Fläche kann man aber nach der 3ten Nummer auch dadurch bestimmen, dafs man durch die gerade Linie PQ, in derselben Berührungs-Ebene XOY, eine zweite Berührungs-Ebene PQM an die Fläche legt und auf dieser den Berührungspunct nimmt. Wenn der so bestimmte Punct M, wie oben, auf der Fläche eine Curve beschreibt, so umhüllt die gerade Linie PQ in der Ebene XOY eine Curve. Bestimmen wir die Linie PQ durch ihre Coordinaten $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$, das heifst durch die mit entgegengesetztem Zeichen genommenen reciproken Werthe derjenigen beiden Segmente, die von ihr auf den beiden Coordinaten-Axen OX und OY abgeschnitten werden, so dafs also

$$\frac{t}{w} = -\frac{1}{OP}, \quad \frac{u}{w} = -\frac{1}{OQ}$$

ist, und nehmen wir ferner, wie früher, x, y und z für die Coordinatenwerthe des entsprechenden Puncts auf der Fläche an, so geben die Gleichungen (2.) der 6ten Nummer:

$$\frac{t}{w} = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{y}{z} \quad \text{und} \quad \frac{u}{w} = \frac{1}{\delta}\cdot\frac{x}{z}.$$

Die in der Tangential-Ebene von der Linie PQ umhüllte Curve läfst sich durch die Gleichung zwischen $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$:

$$12. \quad \psi\left(\frac{u}{w}, \frac{t}{w}\right) = 0$$

darstellen; durch ***dieselbe Gleichung*** also auch die entsprechende Curve auf der Fläche. Der Grad der letzten Gleichung bestimmt die Classe der Curve

in der Tangential-Ebene: wir können sagen, ***die Curve auf der Fläche sei von eben dieser Classe.*** Hiernach heifst eine Curve auf der Fläche von der $n$ten Ordnung und $m$ten Classe, wenn ihre Gleichung (10.) in x und y vom $n$ten und ihre Gleichung in $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$ vom $m$ten Grade ist.

Wenn man in die letzte Gleichung für $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$ ihre Werthe in x, y und z setzt, so erhält man zur Bestimmung der Curve auf der Fläche folgende Gleichung:

$$13. \quad \psi\left(\frac{1}{\delta}\cdot\frac{x}{z}, \frac{1}{\delta}\cdot\frac{y}{z}\right) = 0,$$

welche eine Kegelfläche darstellt, deren Mittelpunct in den Berührungspunct O fällt und deren Ordnung dieselbe ist, wie die Classe der Curve auf der Fläche.

Wenn eine beliebige algebraische Curve auf der Fläche gegeben ist, so bestimmt die Ordnung der stereographisch-projicirenden Kegelfläche (deren Mittelpunct S ist) die ***Ordnung*** der Curve; und die Ordnung der durch dieselbe gelegten Kegelfläche, deren Mittelpunct der Berührungspunct O ist, bestimmt die ***Classe*** der Curve. Die Ordnung einer Curve auf der Fläche ist die Ordnung ihrer stereographischen Projection; die Classe derselben ist die Classe der ebenen Curve, in welcher diejenige Abwicklungsfläche, welche die gegebene Fläche in der fraglichen Curve berührt, die Berührungs-Ebene in O, auf welche stereographisch projicirt wird, schneidet. Die Definition von ***Ordnung*** und ***Classe*** der Curven auf der gegebenen Fläche hangt hiernach von der Annahme der Coordinaten-Axen OX und OY ab; Ordnung und Classe vertauschen sich gegenseitig, wenn man die Puncte O und S mit einander vertauscht und also S zum Anfangspuncte der Coordinaten nimmt.

12. Wenn die Classe der Curve auf der Fläche die ***erste*** ist, so gehen alle geraden Linien OQ durch denselben Punct in der Ebene XOY, und die durch die allgemeine Gleichung (13.) dargestellte Kegelfläche reducirt sich alsdann auf eine durch den Anfangspunct gehende Ebene: auf die Polar-Ebene des eben bezeichneten Puncts. Die Curve auf der Fläche ist irgend eine ebene Curve, die durch den Punct O geht.

Wenn die Kegelfläche (13.) von der ***zweiten*** Ordnung ist, so schneidet sie die gegebene Fläche in einer Curve ***zweiter Classe,*** und die dieser entsprechende Abwicklungsfläche schneidet die Tangential-Ebene in dem Puncte O (dem Mittelpuncte jener Kegelfläche (13.)), in einem Kegelschnitte. Im Allgemeinen ist die Curve zweiter Classe auf der Fläche nicht zugleich auch von

der *zweiten Ordnung*, sondern im Allgemeinen von der *vierten* Ordnung. Die durch dieselbe gehende projicirende Kegelfläche, mit dem Mittelpuncte in S, ist also im Allgemeinen ebenfalls nicht von der zweiten Ordnung; sie ist es nur in dem besondern Falle, wenn die Curve auf der Fläche eine *ebene* Curve ist. Eine solche Curve ist also im Allgemeinen gleichzeitig von der zweiten Ordnung und von der zweiten Classe; und, umgekehrt, *jede Curve zweiter Ordnung und Classe ist eine ebene Curve.*

Die stereographische Projection einer ebenen Curve auf der Fläche ist ein *erster* Kegelschnitt (10.). Die dieser Curve entsprechende Abwicklungsfläche ist eine, die gegebene Fläche in der ebenen Curve berührende Kegelfläche zweiter Ordnung und schneidet die Tangential-Ebene in O in einem *zweiten* Kegelschnitte (13.). Nehmen wir hiernach für die Gleichung jenes ersten Kegelschnitts, statt der (10.), folgende:

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

so mufs, wenn man y und x bezüglich mit $\left(-\frac{w}{u}\right)$ und $\left(-\frac{w}{t}\right)$ vertauscht, auch die resultirende Gleichung (13.), damit sie den zweiten Kegelschnitt darstelle, vom zweiten Grade in $\frac{t}{w}$ und $\frac{u}{w}$ bleiben. Dies erfordert aber, dafs die Coëfficienten A und C in der vorstehenden Gleichung verschwinden; weshalb denn der erste Kegelschnitt durch folgende Gleichung in Punct-Coordinaten:

$$14. \quad Bxy+Dy+Ex+F=0,$$

und der zweite Kegelschnitt durch folgende Gleichung in Linien-Coordinaten:

$$15. \quad Bw^2-Dtw-Euw+Ftu=0$$

dargestellt wird.

Eine ebene Curve auf der Fläche hangt, wenn diese gegeben ist, nur noch von drei Constanten ab: von denselben Constanten, wie diejenige Ebene, in welcher sie liegt. Darum hangen ebenfalls auch die Kegelschnitte (14. und 15.), durch deren Vermittelung wir ebenfalls die ebene Curve bestimmen können, nur von *drei* linearen Constanten ab. Alle durch die Gleichung (14.) dargestellten Kegelschnitte haben, was ihre Gleichung unmittelbar zeigt, Asymptoten, die den beiden Coordinaten-Axen parallel sind; sie sind, mit andern Worten, ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte.

Die stereographischen Projectionen der ebenen Curven auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung sind untereinander ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren Asymptoten denjenigen beiden geraden

Linien parallel sind, in welchen die gegebene Fläche von der sie berührenden Bild-Ebene geschnitten wird.

Die Gleichung (15.) wird befriedigt, wenn einerseits w und t und andrerseits w und u gleichzeitig verschwinden; das heifst: es wird der bezügliche Kegelschnitt von den beiden Coordinaten-Axen OX und OY berührt. Erwägen wir hier, dafs alle Kegel zweiter Ordnung (die einer gegebenen Fläche dieser Ordnung) diese Fläche in einer ebenen Curve berühren, so erhalten wir folgenden Satz:

Alle einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung umschriebenen Kegelflächen schneiden irgend eine gegebene feste Tangential-Ebene derselben in solchen Curven zweiter Classe, welche sämmtlich diejenigen beiden geraden Linien, in welchen die Fläche von ihrer Tangential-Ebene geschnitten wird, berühren.

13. Wenn die gegebene Fläche nicht durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben werden kann, so sind die stereographischen Projectionen der auf ihr liegenden ebenen Curven ähnliche und ähnlich-liegende Ellipsen, deren Axen den Axen derjenigen Ellipsen, in welchen die Fläche von den der Bild-Ebene parallelen Ebenen geschnitten wird, parallel sind. Ein specieller Fall verdient hier eine besondere Aufmerksamkeit: derjenige nämlich, wo einer der beiden Kreispuncte der Fläche Mittelpunct der Projection (S) und also der andere derjenige Punct O ist, in welchem die Fläche von der Bild-Ebene berührt wird. Dann sind alle stereographischen Projectionen *Kreise,* von welchen man sagen kann, dafs sie unendlich viele Asymptoten haben, deren jedes Paar durch die Doppel-Gleichung

$$y \pm x\sqrt{-1} = 0,$$

die keine bestimmte (imaginäre) Richtung mehr angiebt, dargestellt wird. Ferner sind alsdann die Durchschnitts-Curven der umschriebenen Kegelflächen mit der Bild-Ebene solche Kegelschnitte, die den Kreispunct O zu einem ihrer beiden Brennpuncte haben, die, wie bekannt, dadurch bestimmt werden, dafs in ihnen unendlich viele (imaginäre) Tangenten sich schneiden *).

*) Ich habe dies zuerst im zweiten Bande meiner „Analytisch geometrischen Entwicklungen" (S. 64) gezeigt und daran die Definition der Brennpuncte geknüpft. Dann habe ich ferner nachgewiesen, dafs es auch für Curven höherer Ordnung entsprechende Puncte giebt, und diese Puncte allgemein bestimmt. („Über solche Puncte, die bei Curven einer höhern Ordnung, als der zweiten, den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen," S. Journal, Band X. S. 84.) Auch im Raume finden analoge Beziehungen Statt. Bei Flächen zweiter Ordnung vertreten die drei Focal-Curven (die Focal-Ellipse, die Focal-

Die stereographischen Projectionen aller ebenen Curven auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung sind Kreise, wenn ein Kreispunct dieser Fläche zum Projections-Mittelpuncte genommen wird.

In dem Falle der Kugel ist *jeder* Punct derselben ein Kreispunct; und somit gelangen wir zu demjenigen Satze, welcher dem *Ptolomäi*schen Projections-Verfahren zum Grunde liegt, nämlich:

Alle einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung umschriebene Kegelflächen werden von der Tangential-Ebene in einem Kreispuncte derselben, in solchen Curven zweiter Classe geschnitten, deren ein Brennpunct mit diesem Kreispuncte zusammenfällt.

Auf die Kugel übergehend, können wir jede beliebige Tangential-Ebene zur schneidenden Ebene nehmen. Dann giebt der Satz den von *Quetelet* zuerst mitgetheilten Satz, dafs, wenn man einem Rotationskegel zwei Kugeln einschreibt, die gleichzeitig eine gegebene Ebene berühren, die beiden Berührungspuncte zugleich die Brennpuncte des durch diese Ebene bestimmten Kegelschnitts sind.

14. Die allgemeine Gleichung (11.) der *projicirenden Kegelfläche* verwandelt sich in dem fraglichen Falle, dafs die Curve auf der Fläche eine *ebene Curve* ist und durch die Gleichung (14.) dargestellt wird, in folgende:

$$16.\qquad B\cdot\frac{d^2xy}{(z+d)^2}+D\cdot\frac{dy}{z+d}+E\cdot\frac{dx}{z+d}+F=0,$$

und die allgemeine Gleichung der durch dieselbe Curve gehenden Kegelfläche (15.) wird

$$17.\qquad Fxy-E\delta xz-D\delta yz+B\delta^2z^2=0.$$

Um die Ebene, in welcher die Curve auf der Fläche liegt, zu bestimmen, braucht man nur eine dieser beiden Gleichungen mit der Gleichung der gegebenen Fläche selbst, nämlich mit

$$8.\qquad z(z+d)+\mu xy=0$$

zusammenzustellen. Eliminirt man demnach xy zwischen den beiden letzten der vorstehenden Gleichungen, so ergiebt sich, wenn man den alsdann hervortretenden gemeinschaftlichen Factor z vernachlässigt, und berücksichtigt, dafs $\mu\delta=d$ ist, folgende Gleichung:

Hyperbel und die imaginäre Focal-Curve) das System der beiden reellen und das System der beiden imaginären Brennpuncte der Kegelschnitte. Ich habe gezeigt („System der Geometrie des Raumes," S. 333), dafs die unendlich vielen imaginären Ebenen, welche durch eine beliebige Tangente einer Focal-Curve gehen (so wie zwei imaginäre gerade Linien in einem reellen Puncte sich schneiden können, so können sich auch zwei imaginäre Ebenen in einer geraden Linie schneiden), sämmtlich Tangential-Ebenen der Fläche sind.

$$18. \quad (F-Bd\delta)z+d(Dy+Ex+F) = 0$$

für die zu bestimmende Ebene. Diese Ebene schneidet die Bild-Ebene in der geraden Linie, deren Gleichung

$$19. \quad Dy+Ex+F = 0 \text{ ist.}$$

Der Mittelpunct der umschriebenen Kegelfläche, welche die gegebene Fläche in der fraglichen ebenen Curve berührt, ist der Pol der Ebene (18.) in Beziehung auf die Fläche (8.). Für die Coordinaten dieses Pols, die wir durch zwei Accente unterscheiden wollen, ergiebt sich in bekannter Weise:

$$z''-d = Bd\cdot\frac{d\delta}{F+Bd\delta}, \quad y'' = E\cdot\frac{d\delta}{F+Bd\delta}, \quad x'' = D\cdot\frac{d\delta}{F+Bd\delta}.$$

Projicirt man den so bestimmten Punct und nennt die Coordinaten seiner Projection y^0 und x^0, so verhält sich offenbar

$$z''-d:y'':x'' \equiv Bd:E:D, \quad = -d:y^0:x^0, \text{ so dafs}$$

$$20. \quad y^0 = -\frac{E}{B} \text{ und } x^0 = -\frac{D}{B} \text{ ist.}$$

15. Es bleibt noch übrig, die Beziehung der geraden Linie (19.) und des Puncts (20.) zu jedem der beiden Kegelschnitte (14. und 15.) nachzuweisen. Der erste dieser beiden Kegelschnitte schneidet (was die Form seiner Gleichung zeigt) die beiden Coordinaten-Axen OX und OY in denjenigen beiden Puncten, durch welche auch die Linie (19.) geht. (Für geradlinige Flächen ergiebt sich dies auch aus unmittelbarer Anschauung, indem in diesen beiden Puncten die zu projicirende Curve die Bild-Ebene schneidet.) Diese gerade Linie ist demnach die gemeinschaftliche Chorde des Systems der beiden durch den Punct O gehenden (reellen oder imaginären) geraden Linien, in welchen die Fläche von der Bild-Ebene geschnitten wird, und der stereographisch auf diese Ebene projicirten Curve (14.). Eine solche Chorde ist, wie bekannt, der Polare des Puncts O, in Beziehung auf dieselbe Curve, parallel, liegt aber diesem Puncte doppelt so nah; sie kann demnach auch für den Fall, dafs die Projectionen Ellipsen sind, construirt werden. Wenn insbesondere die Ebene der Curve auf der Fläche in eine Tangential-Ebene dieser letztern, die Curve selbst also in ein System von zwei reellen geraden Linien oder in einen Punct (ein System von zwei imaginären geraden Linien) übergeht, so begegnen wir dem Satze, dafs die stereographische Projection irgend eines Puncts einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und der Berührungspunct in der Bild-Ebene, von der Tangential-Ebene in jenem Puncte, und insbesondere von ihrer Durchschnitts-Linie mit der Bild-Ebene, gleich weit abstehen. Wenn die stereographischen Projectionen *Kreise* sind, so ergeben sich mancherlei particuläre Beziehungen.

Die directe Discussion der Gleichung (15.) lehrt, dafs dieselbe gerade Linie (19.) diejenigen beiden Puncte verbindet, in welchen der bezügliche Kegelschnitt die beiden Coordinaten-Axen berührt. Diese, immer reelle gerade Linie, in welcher die Bild-Ebene von der Ebene der Curve, auf der Fläche geschnitten wird, ist die Polare des Puncts O in Beziehung auf den fraglichen Kegelschnitt (15.). Sie ist insbesondere die zum Brennpuncte O gehörige Directrix dieses Kegelschnitts, wenn die Fläche von der Bild-Ebene in einem Kreispuncte berührt wird, oder insbesondere eine Kugel ist.

16. Die Coordinaten des Mittelpuncts des stereographisch-projicirten Kegelschnitts (14.) sind

$$y = -\frac{E}{B} \quad \text{und} \quad x = -\frac{D}{B}.$$

Aus der Übereinstimmung dieser Werthe mit den Coordinaten-Werthen (20.) folgt, dafs dieser Mittelpunct die Projection des Mittelpuncts derjenigen Kegelfläche ist, welche die gegebene Fläche zweiter Ordnung in der ihr aufgeschriebenen Curve berührt. Wenn ich nicht irre, hat Herr *Chasles* diesen Satz bereits in *Liouville's* Journal gegeben.

Die Coordinaten des Mittelpuncts der durch die Gleichung (15.) in Linien-Coordinaten dargestellten Curve zweiter Classe sind, wie bekannt,

$$y = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{E}{B},\quad x = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{D}{B};\quad \text{und}\quad y = -\frac{E}{B},\quad x = -\frac{D}{B},$$

sind die Coordinaten-Werthe desjenigen Puncts, in welchem die beiden, den beiden Coordinaten-Axen parallelen Tangenten des fraglichen Kegelschnitts (15.) sich schneiden. Dieser Durchschnittspunct fällt also mit dem Mittelpuncte der Curve (14.) und mit der Projection des Mittelpuncts der umschriebenen Kegelfläche zusammen. Wenn die Bild-Ebene die gegebene Fläche in einem Kreispuncte berührt, oder wenn letztere insbesondere eine Kugel ist, so ist der fragliche Punct der zweite Brennpunct des Kegelschnitts (15.).

17. Wenn man die zuletzt gewonnenen Resultate zusammenfafst, so ergiebt sich nachstehender Satz:

Wenn man auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung ebene Curven und um dieselben die entsprechenden Kegelflächen beschreibt und dann ferner eine beliebige Tangential-Ebene als Bild-Ebene der stereographischen Projection nimmt: so schneiden die Ebenen der aufgeschriebenen Curven diese Bild-Ebene in geraden Linien, welche einerseits die gemeinschaftlichen Chorden des Systems der beiden (reellen oder imaginären)

Durchschnitts-Linien der Fläche mit der Bild-Ebene und der stereographisch-projicirten Curven, andrerseits die Polaren des Berührungspuncts in der Bild-Ebene in Beziehung auf die Durchschnitts-Curven dieser Ebene mit den umschriebenen Kegelflächen sind. Es sind ferner die Projectionen der Mittelpuncte der umschriebenen Kegelflächen einerseits auch die Mittelpuncte der stereographisch-projicirten Curven, und andrerseits diejenigen Puncte, in welchen zwei Tangenten der Durchschnitts-Curven, welche den durch den Berührungspunct in der Bild-Ebene gehenden Tangenten parallel sind, sich schneiden.

Wenn die stereographischen Projectionen insbesondere Kreise sind, so sind die Mittelpuncte dieser Kreise zugleich auch die zweiten Brennpuncte derjenigen Kegelschnitte, in welchen die Bild-Ebene von den entsprechenden umschriebenen Kegelflächen geschnitten wird, und sie lassen sich, wie im allgemeinen Falle, als die Projectionen der Mittelpuncte dieser Kegelflächen construiren. In derselben Voraussetzung schneiden die Ebenen der aufgeschriebenen Curven die Bild-Ebene in geraden Linien, welche einerseits die gemeinschaftlichen Chorden des Berührungspuncts in der Bild-Ebene und der Projections-Kreise, andrerseits die Directricen der fraglichen Durchschnitts-Curven sind, welche dem in diesen Berührungspunct fallenden Brennpuncte zugehören.

Hier ist nicht der Ort, den Gegenstand weiter zu verfolgen *).

---

*) Nur eine einzelne Andeutung füge ich in dieser Note noch hinzu.

Je zwei Flächen zweiter Ordnung, die in *einer* ebenen Curve sich schneiden, schneiden sich aufserdem noch in einer zweiten ebenen Curve. Es ist dieses der Fall der beiden Kegelflächen (16. und 17.). Die zweiten ebenen Durchschnitts-Curven jeder dieser beiden Kegelflächen und der gegebenen Fläche zweiter Ordnung reduciren sich auf zwei Paare (reeller oder imaginärer) gerader Linien, die in denjenigen beiden parallelen Ebenen liegen, welche die Fläche in den beiden Puncten O und S berühren. Wenn endlich drei Flächen zweiter Ordnung in derselben ebenen Curve sich schneiden, so gehen diejenigen drei Ebenen, welche die übrigen ebenen Durchschnitts-Curven je zweier der drei Flächen enthalten, durch dieselbe gerade Linie, oder sind insbesondere parallel. Die Durchschnitts-Curve der beiden Kegelflächen liegt also in einer Ebene, die den Tangential-Ebenen in O und S parallel ist. Um diese Ebene analytisch zu bestimmen, wollen wir die Gleichungen der beiden Kegelflächen folgendergestalt schreiben:

$$16. \quad Bd^2xy+Ddy(z+d)+Edx(z+d)+F(z+d)^2=0,$$

$$17. \quad Fxy \quad -D\delta yz \quad -E\delta xz \quad +B\delta^2z^2 \quad =0,$$

und dann, nachdem wir die erste mit F, die zweite mit Bd^2 multiplicirt haben, von einander abziehen. Der resultirenden Gleichung läfst sich alsdann folgende Form geben:

$$\{(F-Bd\delta)z+d(Dy+Ex+F)\}\{F+Bd\delta)z+Fd\}=0,$$

und sie läfst sich in die folgenden beiden Gleichungen auflösen:

$$18. \quad (F-Bd\delta)z+d(Dy+Ex+F)=0 \quad \text{und} \quad (F+Bd\delta)z+Fd=0.$$

18. Die einfache lineare Coordinaten-Bestimmung, die ich in den ersten Nummern der gegenwärtigen Abhandlung gegeben habe, begründet eine analytische Geometrie für geometrische Örter, die, statt in einer Ebene zu liegen, einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung aufgeschrieben sind. Eine Menge von analytisch geometrischen Fragen treten uns hier von selbst entgegen; ich bin aber in keine derselben eingegangen. Andrerseits entsprechen jedem neuen Coordinaten-Systeme neue Übertragungs-Principien. Denn diese sind in der allgemeinsten Begriffs-Bestimmung nichts anderes, als *unmittelbare gegenseitige Bestimmung der geometrischen Deutungen einer und derselben analytischen Entwicklung in verschiedenen Coordinaten-Bestimmungen.* Im vorliegenden Falle sind wir unerwartet und ungesucht zu der allgemeinsten Auffassung der stereographischen Projection und dabei zu einigen neuen Resultaten gelangt, welche auch für nicht geradlinige Flächen ihre volle Geltung behalten. Ich schliefse bei dieser Gelegenheit mit einer allgemeinen Bemerkung, für welche sich Beispiele in dem Vorstehenden finden und die wir gelegentlich weiter durch Beispiele unterstützen werden: dafs nemlich, wenn man von der Betrachtung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung ausgeht, manche Sätze sich unmittelbar ergeben, die versteckt bleiben, wenn man zunächst nur Ellipsoiden als Repräsentanten der Flächen dieser Ordnung vor Augen hat.

Bonn, im März 1847.

Diese beiden Gleichungen stellen die Ebenen der Durchschnitts-Curven der beiden Kegelflächen (16. und 17.) dar; die durch die zweite Gleichung dargestellte Ebene ist der Bild-Ebene parallel und giebt für ihren Abstand von dieser:

$$\frac{1}{z} = -\left(\frac{1}{d} + \frac{B\delta}{F}\right).$$

Jede solche, der Bild-Ebene parallele Ebene schneidet die gegebene Fläche zweiter Ordnung und die beiden Kegelflächen (16. und 17.) in ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitten, und wenn insbesondere die beiden Puncte O und S diametral gegenüberliegende Kreispuncte der gegebenen Fläche sind, in Kreisen. Es ist hieraus ersichtlich, dafs, wenn man jede ebene Curve auf dieser Fläche durch eine zweier solcher Kegelflächen, deren Mittelpuncte die beiden Scheitel O und S desselben Durchmessers sind, auf die andere derselben projicirt, alle Projectionen unter sich und mit den stereographischen Projectionen der aufgeschriebenen Curven ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte sind. Wenn die neuen Projectionen in einer und derselben Ebene liegen sollen, so mufs der Werth des Quotienten $\frac{B}{F}$ unverändert bleiben und also, nach der 14ten Nummer, auch z'' denselben Werth behalten. Die aufgeschriebenen Curven sind alsdann diejenigen, in welchen die gegebene Fläche von solchen umschriebenen Kegelflächen berührt wird, deren Mittelpuncte sämmtlich in einer der Bild-Ebene parallelen Ebene liegen. Die Ebenen der aufgeschriebenen Curven gehen also sämmtlich durch einen und denselben Punct des durch O und S gehenden Durchmessers der Fläche.

20.

Über eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe.

(Von dem Herrn Professor Dr. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. Neben die bekannte *Monge*sche Erzeugung eines einschaligen Hyperboloïds durch die Bewegung einer geraden Linie, die in allen ihren Lagen drei gegebene gerade Linien schneidet, habe ich in meinem Systeme der Geometrie des Raums folgende zweite, gleich einfache Erzeugung der Fläche gestellt *).

Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien und ein Punct, durch welchen nach allen Richtungen gerade Linien gehen, gegeben sind, so können die beiden gegebenen geraden Linien in irgend eine andere gegenseitige Lage gebracht werden, ohne dafs auf ihnen die Puncte, in welchen sie von den übrigen geraden Linien geschnitten werden, eine andere Lage annähmen: alsdann verwandelt sich, wenn die beiden gegebenen geraden Linien nicht mehr in derselben Ebene liegen, diese Ebene im Allgemeinen in ein einschaliges Hyperboloïd, und jene beiden geraden Linien gehören der einen, die übrigen der andern Erzeugung dieser Fläche an.

Die Erzeugung der Fläche läfst sich auch leicht auf mechanischem Wege zur Anschauung bringen. Man nehme zu diesem Ende zwei dünne Stäbe AZ und $A'Z'$ (Taf. III. Fig. 2.), befestige in möglichst vielen beliebigen Puncten $L, M, N, O, P, Q, \ldots$ des ersten Stabes die Fäden $LL', MM', NN', OO', PP', QQ', \ldots$ und führe dieselben durch Durchbohrungen des zweiten Stabes, welche in den Puncten $M', N', O', P', Q', \ldots$ so angebracht sind, dafs alle Fäden, wenn sie durch Gewichte gespannt werden, in demselben Puncte Ω sich schneiden. Ändert man alsdann die Lage des zweiten Stabes gegen den ersten durch beliebige Verschiebung und Drehung desselben im Raume, so bilden die Fäden, nach der Lagen-Änderung, im Allgemeinen ein einschaliges Hyperboloïd. Die beiden Stäbe vertreten zwei Linien von der einen Erzeu-

---

*) Vergl. den 5ten Paragraphen der Discussion der Flächen zweiter Ordnung und Classe. *Discussion der Gleichungsform*

$$tu = \mu vw$$

in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung. S. 99—134.

gung, die Fäden die Linien von der andern, und jede gerade Linie, welche drei Fäden schneidet, schneidet alle, und ist eine neue Linie von der ersten Erzeugung. Jeder neuen Lagen-Änderung entspricht ein neues Hyperboloïd; welches auch in ein Paraboloïd übergehen kann. Bleiben die beiden Stäbe (Fig. 2. und 3.) nach der Lagen-Änderung in derselben Ebene, so umhüllen die Fäden im Allgemeinen einen Kegelschnitt, der überdies von den beiden Stäben berührt wird. Man kann auch umgekehrt, von einem gegebenen Hyperboloïde ausgehend, irgend zwei Linien von der einen Erzeugung für die beiden Stäbe, und die Linien von der andern Erzeugung für die Fäden nehmen. Durch continuirliche Bewegung des einen Stabes gegen den andern gestaltet sich das gegebene Hyperboloïd continuirlich in andere Hyperboloïde um, die zuletzt, wenn die beiden Stäbe in dieselbe Ebene gelangen, in einen Kegelschnitt übergehen und die, wenn insbesondere zwei sich entsprechende Puncte N und N' der beiden Stäbe in einen Punct zusammenfallen, in das System dieses und eines zweiten Punctes Ω ausarten.

2. Das in dem Vorstehenden betrachtete einschalige Hyperboloïd stellt sich als Fläche zweiter *Classe* dar und kann daher auch in einen *Kegelschnitt* und in ein System von *zwei Puncten* ausarten. Die besprochene Erzeugung ist aber nicht mehr auf Kegelflächen anwendbar. Neben dieser Erzeugung *mufs* das Princip der Reciprocität eine zweite liefern, bei welcher das einschalige Hyperboloïd als Fläche zweiter Ordnung sich darstellt, und kann daher auch in eine *Kegelfläche* und ein System von *zwei Ebenen* ausarten. Diese zweite Erzeugung verliert ihre Anwendbarkeit bei Kegelschnitten. Während die geraden Linien, welche das Hyperboloïd bilden, in dem Vorstehenden durch zwei Puncte, die sie verbinden, bestimmt werden, stellen sie sich in dem Nachstehenden als die Durchschnitts-Linie zweier Ebenen dar:

Wenn zwei gerade Linien A und A' gegeben sind, welche durch einen gegebenen Punct C gehen, so lassen sich durch diese beiden geraden Linien unendlich viele Systeme zweier Ebenen legen, deren Durchschnitts-Linie F in eine durch den Punct C gehende gegebene Ebene B fällt, und auch selbst durch C geht. Bringt man die beiden Linien A und A' in irgend eine andere gegenseitige Lage, während die durch jede derselben gehenden und mit ihr als fest verbunden betrachteten Ebenen sich gleichzeitig mit fortbewegen, so verwandelt sich der geometrische Ort für die Linie F, der ursprünglich die Ebene B war, in eine geradlinige Fläche von der zweiten Ordnung. Während die Linie F in ihren ver-

schiedenen Lagen der einen Erzeugung angehört, gehören die Linien A und A', in ihrer neuen Lage, der andern Erzeugung an.

3. Die *Monge*sche Erzeugung der Fläche verdoppelt sich nicht durch das Princip der Reciprocität. Dieses Princip führt nur auf die ursprüngliche Construction wieder zurück; denn es ist in geometrischer Beziehung offenbar gleichbedeutend, eine gerade Linie den Bedingungen zu unterwerfen, dafs sie einmal jede von drei gegebenen geraden Linien schneidet, das anderemal mit jeder von drei gegebenen geraden Linien in derselben Ebene liegt. Indem wir hiernach das nach *Monge* erzeugte einschalige Hyperboloïd in gleicher Art als Fläche zweiter *Ordnung* und Fläche zweiter *Classe* betrachten müssen, erkennen wir von vornherein als nothwendige Folge, dafs die fragliche Erzeugung sich weder auf Kegelflächen, noch auf Kegelschnitte übertragen lassen könne.

21.

Bemerkung zu der Abhandlung: „Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung."

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. In dem vorhergehenden kurzen Aufsatze über eine neue Erzeugung der geradlinigen Flächen zweiter „Ordnung und Classe" habe ich hervorgehoben, wie eine Ebene, die man sich aus geraden Linien bestehend vorstellt, in ein einschaliges Hyperboloïd sich umgestalten, so wie umgekehrt, ein gegebenes Hyperboloïd in eine Ebene sich ausbreiten lasse. Man kann dabei eine gerade Linie jeder der beiden Erzeugungen des Hyperboloïds als fest betrachten, und wenn man dieselben zu Coordinaten-Axen nimmt, alle analytischen Entwicklungen der in der Überschrift angeführten Abhandlung *unmittelbar* von den *Flächen* zweiter Ordnung und Classe auf *Curven* derselben Ordnung und Classe übertragen. *Es lassen sich also auch die Beziehungen der stereographischen Projection von dem Raume auf die Ebene übertragen.* Bei diesen Übertragungen treten uns Fragen entgegen, deren Erörterung in mehrseitiger Beziehung ein besonderes Interesse darzubieten scheint.

2. Es seien (Taf. III. Fig. 4.) OX und $O'X'$ zwei Linien der einen und OY und PP' zwei Linien der zweiten Erzeugung eines gegebenen einschaligen Hyperboloïds. Diese vier Linien bilden ein dieser Fläche aufgeschriebenes Viereck. Man kann alsdann, indem man die beiden Linien OX und OY, und auf der erstern auch $P, R, S, \ldots$ als fest betrachtet, die Linie $O'X'$, auf welcher die Puncte P', R', S' unverrückt bleiben, beliebig um den auf OY liegenden Punct O' so lange sich drehen lassen, bis sie mit OX in eine und dieselbe Ebene rückt. Indem wir alsdann die Puncte $P', R', S', \ldots$ in ihren neuen Lagen durch $p, r, s, \ldots$ bezeichnen, sind die Linien PP', RR', SS', .., welche früher das Hyperboloïd bildeten, in den neuen Lagen Pp, Rr, Ss, .. mit den beiden Linien OX und OY in dieselbe Ebene gerückt, in welcher sie einen Kegelschnitt umhüllen, der auch von den beiden eben genannten Linien berührt wird. Der geometrische Ort für diejenigen geraden Linien, welche früher die Fläche bildeten, ist nun die Ebene des

umhüllten Kegelschnitts, oder vielmehr derjenige Theil dieser Ebene, welcher *aufserhalb* des Kegelschnitts liegt. Man kann hierbei, um der Anschauung zu Hülfe zu kommen, ein einschaliges Hyperboloïd nach der Richtung der imaginären Axe so zusammengedrückt sich vorstellen, dafs es in den Hauptschnitt fällt; wo dann die Curve in demselben von allen Erzeugenden des frühern Hyperboloïds berührt wird.

3. In No. 1. der in der Überschrift genannten Abhandlung haben wir die beiden geraden Linien OX und OY zu Coordinaten-Axen genommen und durch die auf denselben angenommenen Segmente

$$\xi = OP \quad \text{und} \quad \eta = OQ$$

die Lage eines Puncts auf der Fläche in linearer Weise bestimmt. Es schneiden sich nemlich die beiden durch die Puncte P und Q gehenden zweiten Erzeugenden PM und QM in dem zu bestimmenden Puncte M. Nach der Umgestaltung der Fläche sind die beiden Axen OX und OY zwei Tangenten des umhüllten Kegelschnitts. Auf diesen beiden Tangenten bestimmen die Werthe der beiden Coordinaten ξ und η zwei Puncte P und Q, durch welche sich noch zwei Tangenten an den umhüllten Kegelschnitt, der an die Stelle der gegebenen Fläche getreten ist, legen lassen. Durch den Durchschnitt dieser beiden letzten Tangenten ist der Punct M, wie früher, *auf lineare Weise* bestimmt.

Wir wollen in dem allgemeinen Falle einer gegebenen Fläche, welche wir in der frühern Abhandlung discutirten, ξ und η die *stereographischen Coordinaten des Puncts M* nennen und auch diese Benennung von dem Raume auf die Ebene übertragen.

4. Wenn andrerseits der Punct M gegeben ist, so bleibt die Bestimmung seiner stereographischen Coordinaten, die, wenn er einem einschaligen Hyperboloïde angehört, linear ist, nicht mehr linear, nachdem die Fläche sich in eine Curve oder, in anderer Beziehung, in eine Ebene umgestaltet hat. Um nemlich die Coordinaten des gegebenen Puncts M zu construiren, lege man von demselben aus zwei Tangenten MP' und MQ' an die Curve. Diese Tangenten schneiden die beiden Coordinaten-Axen nicht blofs in den beiden Puncten P und Q, sondern aufserdem auch noch in den beiden Puncten P' und Q'. Es läfst sich demnach der Punct M in gleicher Weise sowohl durch die Segmente OP und OQ, die wir ξ und η nannten, als auch durch die Segmente OP' und OQ', die wir ξ' und η' nennen wollen, bestimmen. So wie ξ und η, so sind also auch ξ' und η' stereographische Coordinaten des

gegebenen Puncts *M*. Diese *zwiefache* Coordinaten-Bestimmung ist dadurch bedingt, dafs zwar der doppelten Erzeugung der Fläche auch eine doppelte Umhüllung der Curve durch eine sich bewegende gerade Linie entspricht (die umhüllende gerade Linie kann sich nemlich nach zwiefacher Richtung drehen): dafs sich aber nun nicht mehr von vornherein unterscheiden läfst, welcher der beiden Umhüllungen eine gegebene Tangente der umhüllten Curve angehört. Eine andere Bestimmung der stereographischen Coordinatenwerthe eines Puncts bestand nach No. 3. der citirten Abhandlung darin, dafs wir in diesem Puncte die Tangential-Ebene construirten, welche alsdann von den beiden Coordinaten-Axen OX und OY die Segmente ξ und η abschnitt. Die Tangential-Ebene aller Puncte der zu einer Ebene abgeplatteten Fläche fallen mit dieser Ebene zusammen, und folglich müssen die Ausdrücke für ξ und η unter unbestimmter Form sich darstellen und ihre wahren Werthe zwiefach sein *).

Man erhält also durch Vermittelung zweier Coordinaten-Axen und eines gegebenen, dieselben berührenden Kegelschnitts, *ein neues Coordinatensystem, von solcher Beschaffenheit, dafs in demselben die Bestimmung eines Puncts durch seine Coordinaten linear, umgekehrt aber, die Bestimmung der Coordinaten eines gegebenen Puncts vom zweiten Grade ist.*

5. Da ein gegebener Punct *M*, welcher früher der Fläche angehörte, nun sowohl ξ und η, als auch ξ' und η' zu stereographischen Coordinaten hat, so entsprechen jetzt diesem Puncte auch zwei Puncte *R* und *R'*, die auf gewöhnliche Weise durch die Parallel-Coordinatenwerthe

$$x = \xi, \quad y = \eta \quad \text{und} \quad x = \xi', \quad y = \eta'$$

bestimmt sind, als *stereographische Projectionen*, indem auch die Bedeutung dieses Worts von dem Raume auf die Ebene übertragen wird.

Der *Mittelpunct der stereographischen Projection* ist in den frühern Betrachtungen der zweite Scheitel desjenigen Durchmessers des gegebenen Hyperboloïds, dessen erster Scheitel in den Durchschnitt der beiden Coordinaten-Axen fällt, oder, wenn wir ihn analytisch bestimmen, derjenige Punct der Fläche, dessen stereographische Coordinaten unendlich grofs sind. Diese zwiefache Auffassungsweise zeigt, dafs, wenn das Hyperboloïd durch einen Kegelschnitt ersetzt wird, der Projections-Mittelpunct der zweite Endpunct *S* des Durchmessers *OS'*, oder, was hiermit übereinstimmt, der Durchschittspunct

*) Es ist dies ganz Dem analog, wie man zwei Tangenten in einem Doppelpuncte erhält, nachdem die im Allgemeinen lineare Tangenten-Bestimmung ihren Dienst versagt hat.

derjenigen beiden Tangenten des gegebenen Kegelschnitts ist, die den beiden Coordinaten-Axen parallel sind.

Bewiesen ist also durch Übertragung der Constructionen im Raume auf Constrüctionen in der Ebene, dafs der gegebene Punct M und seine beiden stereographischen Projectionen R und R', nebst dem Projections-Mittelpunct S, *alle vier auf derselben geraden Linie liegen.*

6. Eine Gleichung zwischen den beiden stereographischen Coordinaten ξ und η, nemlich

$$\Phi(\eta, \xi) = 0,$$

stellt eine Curve dar, deren Puncte sich in bekannter Weise unmittelbar construiren lassen, wenn man etwa für ξ Werthe beliebig annimmt, die entsprechenden Werthe von η berechnet, und dann die zu diesen Coordinatenwerthen gehörenden Puncte bestimmt.

Neben diese erste Curve stellt sich eine *zweite,* deren Gleichung ganz dieselbe ist, nemlich

$$\Phi(y, x) = 0;$$

nur dafs ξ und η als gewöhnliche Parallel-Coordinaten construirt und demnach durch x und y ersetzt werden. Diese zweite Curve nennen wir, der Consequenz gemäfs, die *stereographische Projection* der ersten.

Wir haben endlich noch eine *dritte* Curve früher betrachtet, nemlich diejenige, in welcher die dem gegebenen Hyperboloïde in der ersten Curve umschriebene Abwickelungsfläche die Coordinaten-Ebene schneidet. Diese Curve wurde in Linien-Coordinaten, indem wir die Segmente OP und OQ durch $\left(-\frac{w}{t}\right)$ und $\left(\frac{-w}{u}\right)$ bezeichneten, nemlich durch die Gleichung

$$\Phi\left(-\frac{w}{u}, -\frac{w}{t}\right) = 0$$

dargestellt. Die *dritte* Curve hat hier, wo an die Stelle des Hyperboloïds ein Kegelschnitt getreten ist, unverändert ihre Beziehung zur stereographischen Projection der ersten Curve behalten.

7. Es ist nach den Anschauungs-Arten in No. 2. klar, dafs *ebene* Curven auf dem gegebenen einschaligen Hyperboloïd, nachdem sich dasselbe in einen Kegelschnitt umgestaltet hat, Curven entsprechen, die diesen Kegelschnitt zweimal, in reellen oder in imaginären Puncten, berühren und von der zweiten Ordnung geblieben sind. Der vorletzte Satz von No. 10. der in der Überschrift citirten Abhandlung geht hier also in den folgenden über:

Die stereographischen Projectionen aller Kegelschnitte, welche den gegebenen Kegelschnitt zweimal berühren, sind solche, deren Asymptoten den beiden gegebenen Tangenten parallel sind, und arten, insbesondere wenn die erstgenannten Kegelschnitte durch den Mittelpunct der Projection gehen, in gerade Linien aus.

Ich habe die vorstehenden geometrischen Beziehungen nur vorläufig aus der Übertragung geometrischer Anschauungen vom Raume auf die Ebene abgeleitet, um für die folgenden analytischen Entwicklungen, die durch die Einmischung fremder Factoren verwickelter werden, als es auf den ersten Blick scheinen möchte, Anhaltspuncte zu gewinnen, und um sich orientiren und die Rechnungen controliren zu können. Durch diese analytischen Entwicklungen wird die fragliche Übertragung, die vielleicht noch nicht ganz gerechtferigt scheinen möchte, ihre Begründung finden.

8. Wir wollen die gegebene, die beiden Coordinaten-Axen OY und OX berührende Curve zweiter Classe durch folgende Gleichung in Linien-Coordinaten darstellen:

$$1. \quad Aw^2 + 2Buw + 2Dtw + 2Etu = 0,$$

indem wir diejenigen beiden Segmente, welche eine beliebige Tangente der gegebenen Curve von den Coordinaten-Axen OY und OX abschneidet, durch $\left(-\frac{w}{u}\right)$ und $\left(-\frac{w}{t}\right)$ bezeichnen *). Dieselbe Curve wird alsdann, wenn man dieselben Axen beibehält, durch nachstehende Gleichung in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten dargestellt:

$$2. \quad D^2y^2 + 2(AE - BD)xy + B^2x^2 - 2DEy - 2BEx + E^2 = 0 \text{ **)}.$$

Es seien demnach η und ξ die stereographischen Coordinaten irgend eines gegebenen Puncts (y, x). Diesen Punct können wir dann als den Durchschnitt derjenigen beiden Tangenten construiren, welche von den beiden Axen OY und OX die beiden Segmente η und ξ abschneiden. Dieselben beiden Tangenten schneiden die beiden Axen zum zweiten Male; wir nennen die entsprechenden Segmente η' und ξ'. Dann sind, nach dem Vorstehenden, η' und ξ' ebenfalls stereographische Coordinaten desselben Puncts.

---

*) Eine Curve zweiter *Classe* ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, die auch durch ein System von *zwei Puncten* vertreten werden kann, während eine Curve zweiter Ordnung ebenfalls eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, die in ein System von *zwei geraden Linien* ausarten kann.

**) Vergl. „Analytisch-geometrische Entwicklungen. Bd. II. S. 120." Eine allgemeinere Auffassung des Gegenstandes, zunächst für drei Dimensionen, findet man in meinem „System der Geometrie des Raumes."

Die Gleichungen der beiden fraglichen, in dem gegebenen Puncte sich schneidenden Tangenten sind hiernach die folgenden:

$$3.\quad \frac{y}{\eta}+\frac{x}{\xi'}=1 \quad \text{und} \quad \frac{y}{\eta'}+\frac{x}{\xi}=1,$$

und für den Durchschnitt derselben findet sich

$$4.\quad x=\frac{\frac{1}{\eta'}-\frac{1}{\eta}}{\frac{1}{\eta'\xi'}-\frac{1}{\eta\xi}} \quad \text{und} \quad y=\frac{\frac{1}{\xi'}-\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\eta'\xi'}-\frac{1}{\eta\xi}}.$$

Um diese Coordinatenwerthe zu entwickeln, gehen wir zu der Gleichung (1.) zurück und erhalten aus derselben, indem wir nach einander

$$-\frac{w}{u}=\eta \quad \text{und} \quad -\frac{w}{t}=\xi$$

setzen:

$$5.\quad -\frac{w}{t}\equiv\xi'=2\cdot\frac{D\eta-E}{A\eta-2B} \quad \text{und} \quad -\frac{w}{u}\equiv\eta'=2\cdot\frac{B\xi-E}{A\xi-2D}.$$

Dieselbe Gleichung (1.) giebt unmittelbar, wenn man nach einander u und t verschwinden läfst, für die Coordinaten des Durchschnittpuncts der beiden den Coordinaten-Axen parallelen Tangenten, das heifst, für den ***Mittelpunct der stereographischen Projection:***

$$6.\quad -\frac{w}{t}=\frac{2D}{A}\equiv\lambda \quad \text{und} \quad -\frac{w}{u}=\frac{2B}{A}\equiv\varkappa;$$

welches Coordinatenwerthe sind, die sich auch aus (5.) unmittelbar ergeben, wenn man η und ξ unendlich grofs annimmt. Die Coordinaten des Mittelpuncts der gegebenen Curve zweiter Classe sind demnach:

$$7.\quad x=\tfrac{1}{2}\lambda=\frac{D}{A} \quad \text{und} \quad y=\tfrac{1}{2}\varkappa=\frac{B}{A}.$$

Läfst man endlich noch in den Ausdrücken (5.) η und ξ verschwinden, so findet sich für die Abstände der Berührungspuncte auf den beiden Axen OY und OX vom Anfangspuncte, bezüglich

$$\frac{E}{D} \quad \text{und} \quad \frac{E}{B}.$$

Setzt man die Werthe (5.) für ξ' und η' in die Ausdrücke (4.) für x und y, reducirt und läfst den gemeinschaftlichen Factor

$$A\eta\xi-2D\eta-2B\xi+2E$$

in den Nennern und Zählern weg, so erhält man folgende einfache Ausdrücke:

$$8.\quad x=2\cdot\frac{(D\eta-E)\xi}{A\eta\xi-2E} \quad \text{und} \quad y=2\cdot\frac{(B\xi-E)\eta}{A\eta\xi-2E},$$

für die gewöhnlichen Coordinaten des gegebenen Puncts durch seine stereographischen Coordinaten.

Eben so erhält man, um x und y durch ξ' und η' auszudrücken:

$$9. \quad x = 2\cdot\frac{(D\eta'-E)\xi'}{Ay'x'-2E} \quad \text{und} \quad y = 2\cdot\frac{(B\xi'-E)\eta'}{A\eta'\xi'-2E}\ ^{*}).$$

9. Aus den Gleichungen (8. und 9.) ergiebt sich, mit Berücksichtigung von (6.):

$$10. \quad \begin{cases} x-\lambda = -\dfrac{2E(\xi-\lambda)}{A\eta\xi-2E} = -\dfrac{2E(\xi'-\lambda)}{A\eta'\xi'-2E}, \\[2ex] y-\kappa = -\dfrac{2E(\eta-\kappa)}{A\eta\xi-2E} = -\dfrac{2E(\eta'-\kappa)}{A\eta'\xi'-2E}, \end{cases}$$

und hieraus

$$11. \quad \frac{y-\kappa}{x-\lambda} = \frac{\eta-\kappa}{\xi-\lambda} = \frac{\eta'-\kappa}{\xi'-\lambda}.$$

Wenn man die Werthe von η und ξ, η' und ξ' als Parallel-Coordinaten construirt, so enthält die letzte Doppel-Gleichung die Bestätigung des Schlufssatzes von No. 6.: dafs nemlich jeder gegebene Punct mit seinen beiden stereographischen Projectionen und dem Projections-Mittelpuncte in gerader Linie liegt.

10. Wir haben jetzt noch *die stereographischen Coordinaten η und ξ des gegebenen Puncts durch seine gewöhnlichen Coordinaten y und x auszudrücken.* Zu diesem Ende nehme man aus (11.) den Werth

$$\eta = \frac{y-\kappa}{x-\lambda}(\xi-\lambda)+\kappa$$

von η, um ihn in die erste der Gleichungen (10.) zu setzen. Dies giebt, nach einfachen Reductionen:

$$12. \quad (Ay-2B)\xi^2-2(Dy-Bx-E)\xi-2Ex = 0,$$

und wenn man diese, in Beziehung auf ξ quadratische Gleichung auflöset und der Kürze wegen

$$Dy^2+2(AE-DB)xy+Bx^2-2DEy-2BEx+E^2 \equiv \Omega$$

setzt, worauf

$$\Omega = 0$$

---

*) Es ergeben sich diese Ausdrücke unmittelbar aus der Symmetrie der vorstehenden Entwicklungen. Zur Bestätigung kann man aber auch aus den Gleichungen (5.) die folgenden ableiten:

$$\xi = 2\cdot\frac{D\eta'-E}{A\eta'-2B}, \qquad \eta = 2\cdot\frac{B\xi'-E}{A\xi'-2D},$$

und dann diese Werthe von ξ und η in die Ausdrücke (8.) setzen.

die Gleichung der gegebenen Curve zweiter Classe ist, findet sich:

$$13. \quad \xi = \frac{Dy - Bx - E \pm \sqrt{\Omega}}{Ay - 2B},$$

und man kann neben diesen Ausdruck unmittelbar folgenden schreiben:

$$14. \quad \eta = \frac{Bx - Dy - E \pm \sqrt{\Omega}}{Ax - 2D}.$$

Ferner ergiebt sich aus den vorstehenden Werthen von ξ und η, unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.):

$$15. \quad \begin{cases} \xi - \lambda = \dfrac{4BD - A(Dy + Bx + E) \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(y - \varkappa)}, \\ \eta - \varkappa = \dfrac{4BD - A(Dy + Bx + E) \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(x - \lambda)}. \end{cases}$$

Aus der Doppel-Gleichung (11.) zeigt sich, dafs in den letzten beiden Gleichungen, und folglich auch in den beiden vorhergehenden, die obern und die untern Vorzeichen zusammengenommen werden müssen: wenn also den obern Zeichen η und ξ entsprechen, so sind die untern auf η' und ξ' zu beziehen.

11. Vermittels der in No. 8. und 10. entwickelten Ausdrücke läfst sich einerseits jede Curve, deren Gleichung in gewöhnlichen Coordinaten gegeben ist, unmittelbar durch eine Gleichung in den neuen stereographischen Coordinaten ausdrücken; anderseits jeder geometrische Ort bestimmen, der durch eine Gleichung in den letztgenannten Coordinaten gegeben ist. Zu diesen letzten Bestimmungsarten wollen wir zunächst übergehen und vor Allem die Frage stellen, welcher geometrische Ort durch die allgemeine Gleichung *ersten* Grades in stereographischen Coordinaten gegeben sei. Es sei diese Gleichung

$$16. \quad F\eta + G\xi + H = 0.$$

Wir wollen der Kürze wegen

$$4BD - A(Dy + Bx + E) \equiv -A(D(y - \varkappa) + B(x - \lambda) + E) \equiv \Xi \text{ und}$$
$$2(2BD - AE) \equiv \zeta$$

setzen. Dann ist

$$17. \quad \Xi^2 - A^2\Omega \equiv A^2\zeta(y - \varkappa)(x - \lambda);$$

also kann man die Gleichungen (15.) auf folgende Weise schreiben:

$$18. \quad \xi - \lambda = \frac{\Xi \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(y - \varkappa)} \quad \text{und} \quad \eta - \varkappa = \frac{\Xi \pm A\sqrt{\Omega}}{A^2(x - \lambda)}.$$

Führt man die vorstehenden Werthe von $\xi - \lambda$ und $y - \varkappa$ in die Gleichung (16.) ein, nachdem man dieselbe (indem der Kürze wegen

$$F\varkappa + G\lambda + H \equiv H'$$

gesetzt wird) zuvor auf die Form

$$F(\eta-\varkappa)+G(\xi-\lambda)+H'=0$$

gebracht hat, so erhält man

$$\left(\frac{F}{x-\lambda}+\frac{G}{y-\varkappa}\right)(\Xi\pm A\sqrt{\Omega})+A^2H'=0$$

für die Gleichung des durch die Gleichung (16.) dargestellten Orts, in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten. Um diese Gleichung zu entwickeln, sondere man zunächst das irrationale Glied

$$\Xi+\frac{A^2H'(y-\varkappa)(x-\xi)}{F(y-\varkappa)+G(x-\xi)}=\mp A\sqrt{\Omega}$$

ab. Wenn man hierauf quadrirt und die identische Gleichung (17.) berücksichtigt, so wird

$$A^2(y-\varkappa)(x-\xi)$$

zum gemeinschaftlichen Factor und nach Hinweglassung desselben ergiebt sich

$$19.\quad \zeta(F(y-\varkappa)+G(x-\lambda))^2+2H'\Xi(F(y-\varkappa)+G(x-\lambda))+A^2H'^2(y-\varkappa)(x-\lambda)=0,$$

also

$$20.\quad \left(F(y-\varkappa)+G(x-\lambda)+\frac{H'}{\zeta}\cdot\Xi\right)^2=\left(\frac{H'}{\zeta}\right)^2(\Xi^2-A^2\zeta(y-\varkappa)(x-\lambda))=\left(\frac{AH'}{\zeta}\right)^2\Omega;$$

letzteres wieder in Folge der identischen Gleichung (17.). Setzt man endlich noch

$$\frac{1}{A}\left\{\frac{\zeta}{H'}(F(y-\varkappa)+G(x-\lambda))+\Xi\right\}\equiv\Theta,$$

so läfst sich der letzten Gleichung folgende Form geben:

$$21.\quad \Omega-\Theta^2=0.$$

Hieraus ist zu sehen, dafs derjenige geometrische Ort, welcher durch die Gleichung (16.) dargestellt wird, oder (was nach der No. 6. Dasselbe ist) welcher die durch die Gleichung ersten Grades in Parallel-Coordinaten

$$22.\quad Fy+Gx+H=0$$

dargestellte gerade Linie zur stereographischen Projection hat, eine Curve zweiter Ordnung ist, welche die gegebene Curve auf der geraden Linie

$$\Theta=0$$

zweimal berührt und die überdies (was aus der Gleichungsform (19.) in die Augen springt) *durch den Projections-Mittelpunct geht.*

Es stimmt dieses mit dem Resultat in (No. 7.) überein. Um die gerade Linie Θ zu finden, brauchen wir nur diejenigen beiden Tangenten der ge-

gebenen Curve zweiter Classe zu bestimmen, die von den Coordinaten-Axen Segmente abschneiden, welche die Gleichung

$$F\eta + G\xi + H = 0 \quad (16.)$$

befriedigen, und dann die Berührungspuncte auf diesen Tangenten durch eine gerade Linie zu verbinden.

Wenn man aus der Gleichung (19.) nur diejenigen Glieder nimmt, die $y-\varkappa$ und $x-\lambda$ in der ersten Potenz enthalten, und sie gleich Null setzt, so stellt die daraus hervorgehende Gleichung

$$F(y-\varkappa) + G(x-\lambda) = 0,$$

nach bekannter Entwicklungsart, die Tangente der bezüglichen Curve in dem Projections-Mittelpuncte dar, dessen Coordinaten $\varkappa$ und λ sind. Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, dafs *diese Tangente der geraden Linie* (22.), *das heifst, der geradlinigen Projection der Curve* (21.) *parallel ist.*

12. Man kann auch, von der Gleichung (21.) ausgehend, zu der Gleichung (16.) zurückkehren. Aber so wie jeder Punct *zwei* stereographische Projectionen hat (5.), so hat auch die Curve (21.) neben der geraden Linie (16.) noch einen zweiten geometrischen Ort zu ihrer stereographischen Projection. Um denselben zu finden, bieten sich unmittelbar die Gleichungen (8.) dar. Einfacher aber kann man sich der Gleichungen (15.) bedienen, und gelangt dann noch leichter zum Ziele, wenn man in die Gleichung (16.) für η und ξ ihre Werthe in η' und ξ' setzt. Aus der Note zu (No. 8.) ergiebt sich:

$$23. \quad \xi-\lambda = \frac{\zeta}{A^2(\eta'-\varkappa)}, \qquad \eta-\varkappa = \frac{\zeta}{A^2(\xi'-\lambda)};$$

wonach die Gleichung (16.), nachdem man sie zuvor wieder auf die Form

$$F(\eta-\varkappa) + G(\xi-\lambda) + H' = 0$$

bringt, sogleich in nachstehende sich verwandelt:

$$24. \quad A^2H'(\eta'-\varkappa)(\xi'-\lambda) + F\zeta(\eta'-\varkappa) + G\zeta(\xi'-\lambda) = 0.$$

Diese Gleichung, in welcher auch die Accente weggelassen werden können, weil η' und ξ' veränderliche Gröfsen sind, die sich gerade so construiren lassen wie η und ξ, *ist eine zweite Gleichung zwischen denselben Coordinaten, welche dieselbe Curve darstellt, die durch die Gleichung* (16.) *dargestellt wird.* Wenn wir in der letzten Gleichung η' und ξ' als Parallel-Coordinaten construiren und demnach durch y und x ersetzen, so erhalten wir

$$25. \quad H'(y-\varkappa)(x-\lambda) + F(y-\varkappa) + G(x-\lambda) = 0$$

für die Gleichung der *zweiten Projection der Curve* (21.), deren erste Projection die gerade Linie (22.) ist. Diese zweite Projection hangt, wie die

erste, nur von zwei Constanten ab: sie ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind, und die überdies durch den Projections-Mittelpunct geht. Die Tangente dieser Hyperbel in dem Projections-Mittelpuncte ist, wie aus der vorstehenden Gleichung unmittelbar hervorgeht, der geraden Linie (22.) *parallel.* In Gemäfsheit der Schlufs-Bemerkung in No. 11. wird demnach die projicirte Curve (21.) von ihrer zweiten Projection im Projections-Mittelpuncte *berührt.*

13. Im Allgemeinen werden die beiden stereographischen Projectionen einer gegebenen Curve

$$\Psi(y,x) = 0$$

nur eine einzige Curve bilden. Sollen die beiden Projectionen als gesonderte Curven sich darstellen, so ist es nöthig, dafs die Ausdrücke (15.) in Folge der vorstehenden Gleichung der gegebenen Curve rational werden. Dies geschieht namentlich auch dann, wenn an die Stelle der Gleichung (21.) folgende tritt:

$$26. \quad \Omega - \sigma^2 Z^2 = 0,$$

welche irgend einen *beliebigen* Kegelschnitt darstellt, der die gegebene Curve zweiter Classe in ihren beiden Durchschnitten mit einer gegebenen geraden Linie

$$Z = 0$$

berührt, und der, weil der constante Coëfficient σ^2 positiv ist, ganz aufserhalb derselben liegt. Je nachdem die gegebene gerade Linie die gegebene Curve schneidet, oder nicht schneidet, oder berührt, hat der fragliche Kegelschnitt mit dieser Curve einen reellen, oder einen imaginären doppelten Contact, oder eine vierpunctige Osculation. Wenn Z insbesondere auf eine blofse Constante sich reducirt, sind beide Curven concentrisch und ähnlich und ähnlich liegend. In Folge der Gleichung (26.) lösen die beiden Gleichungen (15.) sich in folgende beiden Paare rationaler Gleichungen auf:

$$27. \quad \begin{cases} \xi - \lambda = \dfrac{\Xi + A\sigma Z}{A^2(y-x)}, & \xi' - \lambda = \dfrac{\Xi - A\sigma Z}{A^2(y-x)}, \\ \eta - \lambda = \dfrac{\Xi + A\sigma Z}{A^2(x-\lambda)}, & \eta' - x = \dfrac{\Xi - A\sigma Z}{A^2(x-\lambda)}. \end{cases}$$

In diesen vier Ausdrücken sind die Zähler lineare Functionen von x und y.

14. Um die gegenwärtigen Bemerkungen nicht zu weit auszudehnen, berühre ich nur noch einige der interessanteren Fragen mit wenigen Worten.

Unerörtert ist in dem Vorstehenden noch die Frage geblieben, *welches die allgemeine Gleichung der geraden Linie in den neuen stereographischen Coordinaten sei.* Es seien die Coordinaten der geraden Linie $\left(\frac{u'}{w'}\right)$ und $\left(\frac{t'}{w'}\right)$;

ihre Gleichung in Parallel-Coordinaten ist dann:

$$28. \quad u'y+t'x+w' = 0,$$

und geht nach den Verwandlungs-Formeln (8.) unmittelbar in die folgende über:

$$w'(A\eta\xi-2E)+2u'(B\xi-E)+2t'(D\eta-E) = 0;$$

und *dieselbe* Gleichung erhalten wir auch nach den Verwandlungs-Formeln (9.) zwischen η' und ξ'. Es läfst sich diese Gleichung auch in folgender Weise schreiben:

$$29. \quad A(u'x+t'\lambda+w')\eta\xi-2E(u'\eta+t'\xi+w') = 0.$$

Wenn man η und ξ mit y und x vertauscht, so stellt die resultirende Gleichung

$$30. \quad A(u'x+t'\lambda+w')xy-2E(u'y+t'x+w') = 0$$

die stereographische Projection der geraden Linie (28.) dar; und zwar liegen nach der eben gemachten Bemerkung, auf der durch die letzte Gleichung dargestellten Curve die *beiden* Projectionen jedes Puncts der geraden Linie. Diese Curve ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den beiden Coordinaten-Axen parallel sind, und welche diese Axen in denselben beiden Puncten schneidet, wie die gerade Linie selbst. Da die Gleichung (30.), eben wie die Gleichung der geraden Linie, nur zwei lineare Constanten $\left(\frac{u'}{w'}\right)$ und $\left(\frac{t'}{w'}\right)$ enthält, so gehen alle solche Hyperbeln, die durch *einen* festen Punct gehen, zugleich auch noch (wir abstrahiren hier von den beiden unendlich weit entfernten Durchschnittspuncten) durch einen *zweiten* festen Punct, und diese beiden festen Puncte liegen, wie leicht ersichtlich ist, wenn man zwei Gleichungen von der Form (30.) von einander abzieht, auf einer durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie *).

Wenn die gerade Linie (28.) *unendlich weit rückt* und also t' und u' verschwinden, so ergiebt sich aus (30.):

$$Axy-2E = 0.$$

Ihre stereographische Projection ist also eine vollkommen bestimmte Hyperbel, deren Asymptoten mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen.

Wenn insbesondere

$$u'x+t'\lambda+w' = 0$$

---

*) Und zwar nach dem von mir zuerst aufgestellten allgemeinen Satze: dafs alle Curven $n$ter Ordnung, welche durch Gleichungen dargestellt werden, in denen m lineare Constanten vorkommen (wir nehmen m gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}n(n+3)$ an), wenn sie durch dieselben $m-1$ Puncte gehen, aufserdem noch in denselben $n^2-(m-1)$ Puncten sich schneiden. *Theorie der algebraischen Curven.* S. 9.

ist, so geht die gerade Linie (28.) durch den Projections-Mittelpunct. Dann reducirt sich die Gleichung (30.) auf

$$u'y+t'x+w' = 0:$$

das heifst, *eine solche gerade Linie ist ihre eigene stereographische Projection.*

15. Jedem reellen Werthenpaare η, ξ entspricht ein Punct, der aufserhalb der gegebenen Curve Ω liegt; und umgekehrt: jedem aufserhalb liegenden Puncte entsprechen reelle Coordinatenwerthe. Liegt aber ein Punct innerhalb der Curve Ω, so sind seine zwiefachen Coordinatenwerthe *imaginär*, und mit diesen die beiden stereographischen Projectionen des Puncts. Liegt er auf dem Umfange der Curve, so fallen seine beiden Projectionen zusammen. Wenn folglich ein gegebener geometrischer Ort die gegebene Curve Ω schneidet, so erhält man für die innerhalb dieser Curve liegenden (reellen) Puncte imaginäre Coordinatenwerthe, welche die Gleichung des Orts befriedigen. Insofern man also, wie bei gewöhnlichen Parallel-Coordinaten, nur reelle Werthe der beiden Veränderlichen berücksichtigt, *werden die innerhalb der gegebenen Curve Ω liegenden Theile des gegebenen Orts nicht mehr durch die Gleichung desselben dargestellt.* Nimmt man zum Beispiel die zuletzt betrachtete Gleichung

$$29. \quad A(u'x+t'\lambda+w')\eta\xi-2E(u'\eta+t'\xi+w) = 0,$$

so stellt dieselbe die gerade Linie (28.) in ihrer ganzen Ausdehnung nur dann vor, wenn diese gerade Linie die gegebene Curve Ω nicht schneidet. Wenn sie hingegen dieselbe schneidet, so stellt die vorstehende Gleichung die innerhalb der Curve Ω liegenden Puncte nicht mehr dar, sondern *eine, nach beiden Erstreckungen hin unbegränzte, aber in der Mitte unterbrochene gerade Linie.* Den Puncten des fehlenden, in den Durchschnittspuncten mit der gegebenen Curve Ω begränzten Segments entsprechen die imaginären Coordinatenwerthe, welche die vorstehende Gleichung befriedigen.

Da die beiden Projectionen eines gegebenen Puncts immer auf derjenigen geraden Linie liegen, welche diesen Punct mit dem Projections-Mittelpuncte verbindet, und auf dieser geraden Linie, bevor sie imaginär werden, zusammenfallen: so ist klar, dafs überhaupt diejenigen geraden Linien, welche durch den Projections-Mittelpunct und die Durchschnittspuncte eines gegebenen Orts mit der gegebenen Curve Ω gehen, die stereographische Projection des Orts in den (einzigen) Projectionen der Durchschnittspuncte berühren müssen. (Wenn demnach der Ort von der $n$ten Ordnung ist, so ist die Projection desselben von der $2n$ten Classe.) Je nachdem insbesondere eine gegebene gerade Linie, deren Projection die durch die Gleichung

30. $A(u'x+t'\lambda+w')xy-2E(u'y+t'x+w') = 0$

dargestellte Hyperbel ist, die Curve Ω schneidet, oder nicht, liegt der Projections-Mittelpunct aufserhalb oder innerhalb dieser Hyperbel. Wenn die gerade Linie die Curve berührt, so geht die Hyperbel in ein System von zwei geraden Linien über.

16. Insbesondere können wir auch als Curve Ω eine *Hyperbel,* und als Coordinaten-Axen die beiden *Asymptoten* derselben annehmen. Dann fällt (indem wir in der Gleichung (1.) B und D verschwinden lassen) der Projections-Mittelpunct S mit dem Puncte O, den wir zum Anfangspunct genommen haben, zusammen.

17. Insbesondere läfst sich auch die gegebene Curve zweiter Classe, Ω, durch *ein System von zwei Puncten* ersetzen, und es lassen sich durch diese beiden Puncte die beiden Coordinaten-Axen legen. (Es ist alsdann $2BD = AE$.)

18. Es bleiben noch die Übertragungs-Principien zu erwähnen, die sich an die neue allgemeine Coordinaten-Bestimmung anknüpfen. Die Übertragung kann Statt finden: *erstens* von einer Projection auf die projicirten Örter; *zweitens* von einer Projection auf die andere, und *drittens* von dem projicirten Orte auf seine Projection.

Einer beliebigen geraden Linie, als Projection, entspricht, als projicirter Ort, ein Kegelschnitt, der die gegebene Curve zweiter Classe Ω zwiefach berührt und überdies durch den Projections-Mittelpunct geht. Dem Durchschnitte zweier gegebener geraden Linien entspricht ein einziger Durchschnitt der beiden entsprechenden Kegelschnitte; und dieser ist unter den *vier* Durchschnitten derselben dadurch bestimmt, dafs er mit dem Projections-Mittelpuncte und demjenigen Puncte, in welchem die beiden Berührungs-Chorden der Kegelschnitte und der Curve Ω sich schneiden, in gerader Linie liegt. *Der Winkel, welchen zwei gegebene gerade Linien bilden, ist* (nach der Bemermerkung am Ende von No. 11.) *demjenigen Winkel gleich, unter welchem die entsprechenden Kegelschnitte im Projections-Mittelpuncte sich schneiden.* Parallelen geraden Linien entsprechen also Kegelschnitte, die sich im Projections-Mittelpuncte berühren.

19. Einer gegebenen geraden Linie, als *erster* Projection, entspricht, als *zweite* Projection, eine Hyperbel, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind, und die durch den Projections-Mittelpunct geht. Dem Durchschnitte zweier gegebenen geraden Linien der ersten Projection entspricht, in der zweiten Projection, der zweite Durchschnitt der beiden entsprechenden

Hyperbeln. Es schneiden sich jene beiden geraden Linien *unter denselben Winkeln*, wie die beiden Hyperbeln im Projections-Mittelpuncte. Wenn insbesondere jene parallel sind, berühren sich diese in dem letztgenannten Puncte.

20. Wenn man gegebene gerade Linien stereographisch projicirt, so entspricht ihnen, als vollständige Projection, eine Hyperbel, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind. Dem einzigen Durchschnitte zweier gegebener geraden Linien entsprechen zwei solche Durchschnitte der beiden Hyperbeln, die mit dem Projections-Mittelpuncte in gerader Linie liegen. Den Winkelpuncten eines Dreiecks entsprechen die Winkelpuncte eines Sechsecks, dessen Diagonalen in dem Projections-Mittelpuncte sich schneiden. Nur den Puncten auf dem Umfange der Curve Ω entsprechen einzige (zusammenfallende) Puncte.

21. Ich gebe hier keine Beispiele der Übertragung. Nur die letzte Bemerkung möge gestattet sein, dafs sich den beiden reellen Tangenten der gegebenen Curve Ω, die wir zu Coordinaten-Axen genommen haben, auch *imaginäre* substituiren lassen. Dann liegen die beiden Puncte O und S innerhalb dieser Curve. Ganz interessante Resultate ergeben sich hier insbesondere dann, wenn man den Punct O in einem der beiden *Brennpuncte* der Curve Ω annimmt: dann fällt der Projections-Mittelpunct in den andern Brennpunct. Es läfst sich dies unmittelbar mit den entsprechenden Erörterungen der in der Überschrift citirten Abhandlung in Verbindung bringen, wenn man erwägt, dafs bei der Umgestaltung einer Fläche zweiter *Classe* in eine Curve dieser Classe, die *Kreispuncte* der erstern zu *Brennpuncten* der letztern werden*).

22. Es scheint angemessen, zum bessern Verständnisse des Vorstehenden, schliefslich noch einige Anschauungen hinzuzufügen.

In Figur 6. ist als Curve Ω ein Kreis angenommen, der die beiden (rechtwinkligen) Axen OY und OX berührt. Demnach ist S der Projections-Mittelpunct.

Die gerade Linie AB ist die stereographische Projection einer Hyperbel, welche den Kreis Ω in den beiden Puncten D und E berührt, welche durch die beiden Puncte F und L, in denen die Axen von der geraden Linie AB geschnitten werden, und durch den Projections-Mittelpunct S geht, und welche in dem letztgenannten Puncte eine gerade Linie ST, die mit AB parallel ist, zur Tangente hat.

---

*) Vergl. „System der Geometrie des Raumes. S. 255."

Neben der geraden Linie AB hat die so eben bestimmte Hyperbel zu ihrer Projection auch noch eine Hyperbel. Diese *zweite* Hyperbel geht ebenfalls durch den Projections-Mittelpunct S und berührt in diesem Puncte die Linie ST, und folglich auch die projicirte (erste) Hyperbel. Ihre Asymptoten sind den beiden Axen parallel, und sie schneidet diese Axen in den beiden Puncten J und N, durch welche auch die projicirte Hyperbel geht.

Wenn man durch den Projections-Mittelpunct S irgend eine gerade Linie zieht, welche die projicirte Hyperbel, die gerade Linie AB und die zweite Hyperbel, bezüglich in den Puncten M, m und m' schneidet, so sind m und m' die beiden stereographischen Projectionen des Puncts M.

Wenn wir den Radius des Kreises Ω gleich 10 setzen, so dafs

$$\frac{D}{A} = \frac{B}{A} = 10 \quad \text{und} \quad \frac{E}{A} = 100$$

ist, so ist die Gleichung der geraden Linie AB:

$$31. \quad y = 2x+15.$$

Man kann also die projicirte (erste) Hyperbel durch die lineare Gleichung

$$32. \quad \eta = 2\xi+15$$

in stereographischen Coordinaten darstellen. Dieselbe Hyperbel können wir aber auch nach (No. 12.)*) durch die zweite Gleichung

$$33. \quad 7\eta\xi-180\eta-60\xi+2000 = 0$$

in denselben stereographischen Coordinaten darstellen, und

$$34. \quad 7xy-180y-60x+2000 = 0$$

ist die Gleichung der zweiten Projection dieser Curve; nemlich der zweiten Hyperbel.

Nimmt man statt der Gleichung (31.) folgende an:

$$y+x = 20,$$

so ist die durch dieselbe dargestellte gerade Linie CW eine der beiden stereographischen Projectionen des durch den Projections-Mittelpunct S gehenden concentrischen Kreises, welcher demnach durch die lineare Gleichung in stereographischen Coordinaten

$$\eta+\xi = 20$$

und daneben noch durch eine zweite Gleichung von der Form der Gleichung (33.) dargestellt wird. Dieser Kreis ist als ein Kegelschnitt zu betrachten, welcher

*) Man braucht nur in die Gleichung (32.) für ξ und η bezüglich

$$2\cdot\frac{D\eta-E}{A\eta-2B} \equiv 20\cdot\frac{\eta-10}{\eta-20} \quad \text{und} \quad 2\cdot\frac{B\xi-E}{A\xi-2D} \equiv 20\cdot\frac{\xi-10}{\xi-20}$$

zu setzen.

den gegebenen Kreis doppelt berührt; nur ist die Berührungs-Chorde unendlich weit vorgerückt.

Der Durchschnitt U der beiden geraden Linien AB und CW entspricht dem Durchschnitte G der beiden projicirten Curven. Dieser Durchschnitt G ist unter den letzten drei der vier Durchschnittspuncte S (der Projections-Mittelpuncte) G, H und K derjenige, welcher auf einer durch S gehenden geraden Linie liegt, die der Berührungs-Chorde DE parallel ist (das heifst, die durch den Durchschnittspunct von NE mit der unendlich weit liegenden Berührungs-Chorde der beiden Kreise geht). Es liegen die Punctenpaare G und U, H und V, K und W mit dem Puncte S in gerader Linie. U einerseits, und V und W anderseits, sind diejenigen beiden Puncte, in welchen die erste Projection CW des concentrischen Kreises bezüglich die eine und die andere Projection der ersten Hyperbel schneidet. Die zweite Projection des eben genannten Kreises ist eine (nicht gezeichnete) dritte Hyperbel, welche die zweite in S berührt und auf den Linien SV und SW die gerade Linie AB schneidet.

23. In (Fig. 7.) ist die stereographische Projection der geraden Linie PQ eine Hyperbel, deren Asymptoten den beiden Coordinaten-Axen OX und OY parallel sind, die durch die beiden Durchschnitte D und E der geraden Linie PQ mit diesen beiden Axen geht, und die von denjenigen beiden geraden Linien, welche den Projections-Mittelpunct S mit den beiden Durchschnitten der geraden Linie PQ und des Kreises Ω verbinden, berührt wird. Jede durch den Projections-Mittelpunct S gehende gerade Linie schneidet die Hyperbel in zwei Puncten, welche die beiden stereographischen Projectionen desjenigen Puncts sind, in welchem sie die gerade Linie PQ schneidet. Auf den beiden geraden Linien SA und SB fallen die beiden Projectionen bezüglich in aa' und bb' zusammen.

Wenn man die beiden Segmente OD und OE bezüglich gleich 15 und 18 annimmt, so geht die Gleichung (30.), indem man

$$\frac{t'}{w} = 18, \qquad \frac{u'}{w} = 15, \qquad \frac{E}{A} = 100 \quad \text{und} \quad \varkappa = \lambda = 20$$

setzt, in die folgende über:

$$13\eta\xi - 120\eta - 100\xi + 1800 = 0.$$

Diese Gleichung stellt die nach beiden Erstreckungen hin unbegränzte gerade Linie PQ, mit Ausnahme desjenigen Segments dar, welches innerhalb des Kreises Ω liegt.

Bonn, im April 1847.

Fac-simile einer Handschrift v. P. Paoli.

Ill.mo Sig.re Sig.re e Prone Colmo

V.S. Ill.ma è troppo giusta per non rilevare, che nel Biglietto trasmessomi si contengono varie proposizioni, le quali non sono punto coerenti ai discorsi tenuti tra Noi, ed ai fatti accaduti. Non le farà dunque maraviglia, se Le rimetto questo Biglietto a Lei diretto, che io intendo di non ricevere nè accettare, perchè accettandolo parrebbe che confermassi e facessi la ricevuta di molte espressioni, le quali conosco essere così inesatte, come poco urbane. La supplico pertanto di ritenerlo presso di Se, e di comunicarmene quello solo, che appartiene al nostro affare, spogliandolo degli abbellimenti ad esso stranieri e con la più distinta stima ed ossequio passo a confermarmi

Di V.S. Ill.ma

Di Casa 14. Giugno 1796.

Sig.re Auditore Bernardo Lessi Avvocato Regio &

Dio.mo Obb.mo Servitore
Pietro Paoli

1.

N S O i φ A P B F

2.

S E G B F b m n M P N β r a C T R A D

3.

S E G B F P C A D

4.

S O A L B N D C M

1.

$CA_1 = a \quad A_1A = a_1$

$CB_1 = b \quad B_1B = b_1$

$CD = c$

2.

3.

1. Z S B Q O

6. T S V m E K P I X W

2. N' M' L' Q' P L M N O P C

3. L M N' N O M'

7. S C' B E Z bb' Q

1.
Z
B
S
Q
O
6.
T
S
V
E
K
P
I
X
W
N'
M'
L'
O'
2.
L
M
N
O
7.
S
3.
M'
N'
L
M
N
O
B
E
Z
c'
bb'
Q

STORAGE ARE